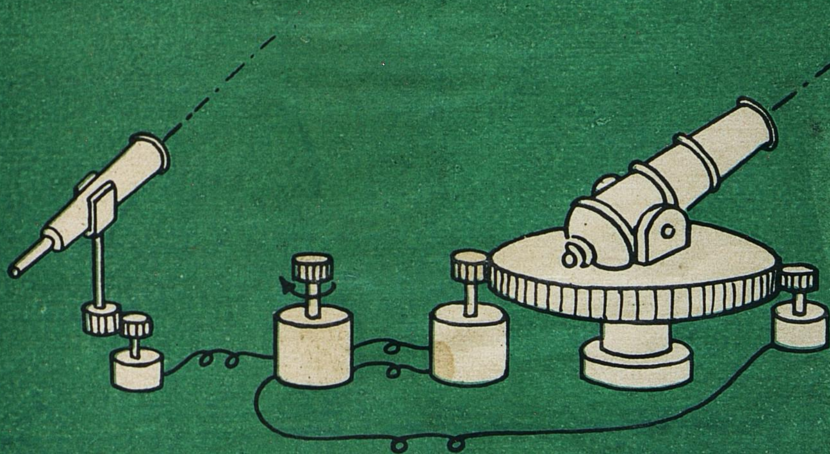
நவீன ஆள் குவைகள்

MODERN CONTROL SYSTEMS

சீ. இரகுநாதன்





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ) வரிசை எண் — 692

நவீன ஆள் குவைகள்

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
சி. இரகுநாதன், பி.எஸ்சி., பி.இ., எம்.டெக்.,
விரிவுரையாளர், மின்னியல் துறை,
அழகப்பச் செட்டியார் பொறி இயல்
தொழில்நுட்பக் கல்லூரி,
காரைக்குடி.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—March, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 692

MODERN CONTROL SYSTEMS

S. RAGHUNATHAN

Price Rs. 17-05

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
Ravishankar Printers,
84, Perambur Barracks Road,
Madras—600007

பதிப்புரை

நவீன ஆள் குவைகள் என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 692ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 727 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

நவீன ஆள் குவைகள்

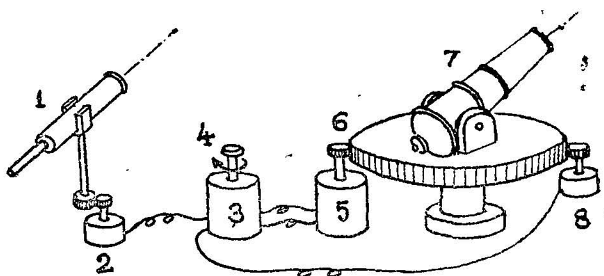
1. ஆள் குவை அறிமுகம்
(Introduction to Control Systems)

1·1. ஆள் குவை வகைகள் (Control system classification)

1·1.1. வரையறையும் விளக்கமும்

'ஆள் குவை' என்றால் என்ன? இதை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.

விமானம் தாங்கிக் கப்பல்களில் மாற்றார் விமானங்களை வீழ்த்தும் பெரும் சுழற் பீரங்கிகள் உண்டு. அவை எவ்வாறு இயங்குகின்றன என்பதைப் படம் 1.1-ன் உதவியால் தெளியலாம். படத்தில் காண்பது ஓர் 'ஆள் குவை'.



படம் 1.1 பீரங்கித் திருப்ப ஆள் குவை

1. தொலைநோக்கி	5. மின் இயக்கி
2. மின் பிரித்தி-1	6. பல் இணை
3. மின் ஆக்கி	7. பீரங்கி
4. ஆற்றல் ஊட்டம்	8. மின் பிரித்தி-2

மாற்றார் விமானத்தைப் பார்வையில் பற்ற உதவுவது ஒரு தொலைநோக்கி. இரு வட்ட மின் பிரித்திகள் (circular potential

dividers), ஒரு மின் ஆக்கி (generator), ஒரு மின் இயக்கி (motor) ஆகிய உறுப்புகள் ஒருங்கே இயங்கித் தொலைநோக்கி திரும்பும் திசை எல்லாம் உடனுக்குடன் பீரங்கி மேடையும் திரும்ப வழி செய்கின்றன.

தொலைநோக்கி, பீரங்கி மேடை இரண்டும் திரும்பாத நிலையில் வட்ட மின் பிரித்திகளின் மின் அழுத்தம் சுழி ஆகும்.

ஒரு விமானத்தைக் காணத் தொலைநோக்கியைத் திடீரெனத் திருப்புகிறோம். இத் திருப்பத்திற்கு ஏற்ப, மின்பிரித்தி 1-ல் மட்டும் ஒரு மின் அழுத்தம் ஏற்படுகிறது. இது அப்படியே மின் ஆக்கிக்குச் செலுத்தப்படுகிறது.

இதுவே திறன் பெருக்கப்பட்டு மின் இயக்கிக்கு அனுப்பப் படுகிறது. மின் இயக்கி தோற்றுவிக்கும் திருப்பு விசையால் (torque) அதன் தண்டு சுழல, அதன் வேகம் ஒரு பல் இணையால் குறைக்கப்பட்டுப் பீரங்கி மேடையைத் திருப்புகிறது.

பீரங்கி மேடையின் திருப்பத்திற்கு ஏற்ப, மின் பிரித்தி 2-ல் ஒரு மின் அழுத்தம் தோன்றுகிறது. இது மின் ஆக்கியின் ஊட்ட (input) மின் அழுத்தத்தைக் குறைக்கிறது.

பீரங்கி மேடை, தொலைநோக்கியின் அளவே திரும்பியதும் இரு மின் பிரித்திகளின் மின் அழுத்தங்களும் சமம் ஆகின்றன. இவற்றின் மின் அழுத்த வேறுபாடே மின் ஆக்கிக்குச் செலுத்தப் படுவதால், மின் ஆக்கியின் ஊட்ட மின் அழுத்தம் சுழி ஆகிறது. பீரங்கி மேடையும் நின்றுவிடுகிறது.

உந்தத்தால் பீரங்கி மேடை, உடனே நிற்காது. சிறிது அதிகம் நகர்ந்துவிடுவதாகக் கொள்வோம். இதனால் மின் பிரித்தி 2-ல் மின் அழுத்தம் அதிகம் ஆகி, ஓர் எதிர்மின் அழுத்தம் மின் ஆக்கிக்கு அனுப்பப்படுகிறது. மின் இயக்கி எதிர்த் திசையில் சுழலப் பீரங்கி மேடையும் திரும்பித் தேவையான திசையில் நிற்கிறது.

தொலைநோக்கியின் திருப்பமே, பீரங்கி மேடையின் 'விரும்பும் திருப்பம்' ஆகும். பீரங்கி மேடையின் 'விரும்பும்-திருப்ப'த்திற்கும் (desired turning), 'நேர்-திருப்ப'த்திற்கும் (actual turning) உள்ள வேறுபாடு 'வழு' (error) எனப்படும். இவ் வழு உள்ளவரை வழுவிற்கு ஏற்பத் திருத்தல் நிகழ்ச்சியும் தொடரும்.

சில அலைவுகளுக்குப் பின் ('குவை'யில் உராய்தடை அதிகம் இருப்பின் அலைவே இராது) வழு குறைந்து மறைந்து போகும். பீரங்கி மேடை விரும்பும் திசையில் திரும்பி நிற்கும்.

இந்த எடுத்துக் காட்டில்—

1. மின் பிரித்தி, ஆக்கி, இயக்கி போன்ற பல உறுப்புகள் இருக்கின்றன ;

2. அவை ஒன்றோடு ஒன்று இடை இணைப்புகளால் பிணைந்து உள்ளன ;

3. அவை யாவும் பீரங்கியைத் திருப்பும் ஒரே தொழிலைப் புரிய ஒருங்கே செயல்படுகின்றன ;

4. பீரங்கி மேடையைத் திருப்புவதற்கான பெரிய ஆற்றலின் ஒழுக்கை, தொலைநோக்கியைத் திருப்பச் செலவிடும் சிறிய திறனால் கட்டுப்படுத்த முடிகிறது.

இனி இப் பின்னணியில் சில வரையறைகளைக் காண்போம்.

1. குவை (System) : ஒன்றோடு ஒன்று ஒழுங்குற இணைந்து, ஒரு தொழில் நோக்கி ஒருங்கே செயல்படும் பல்வேறு உறுப்புகளின் தொகுப்பே 'குவை' ஆகும்.

2. ஆள் குவை (Control system): தொழிலைப் புரியும் பேராற்றல் ஒழுக்கை, சிறிதே திறனால் கட்டுப்படுத்தி ஆளும் குவையே 'ஆள் குவை' ஆகும்.

3. பின் ஊட்டு ஆள் குவை (Feedback control system): நேரும் விளைவைக் கணித்து அதைப் பின் ஊட்டி, விரும்பும் விளைவுடன் ஒப்பிட்டு, வரும் வழுவிற்கு ஏற்ப, ஓர் அறிகுறி (signal) கொண்டு, வழு குறையும் வழி இயங்கும் ஆள் குவையே 'பின் ஊட்டு ஆள் குவை' ஆகும்.

4. அறிகுறிகள் (Signals): ஆள் குவையில் இயக்கத்தை உண்டாக்கும் மாறிகள் (variables) மூவகைப்படும் :

(i) மின் அழுத்தம் (Electric potential or voltage)
(ii) இயந்திர விசை (Mechanical force)
(iii) இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

இம்மூன்றும் பொதுவாக அறிகுறிகள் (signals) என அழைக்கப் படுகின்றன.

மேலும் சில சிறப்புச் சொற்களை (terminology) மேற்கண்ட பீரங்கித் திருப்ப ஆள் குவையின் உதவியால் தெளியலாம்.

ஆதார ஊட்டம் (Reference input): தொலைநோக்கித் தண்டின் திருப்பம்.

கட்டுப்படு ஈட்டம் (Controlled output): பீரங்கி மேடையின் திருப்பம்.

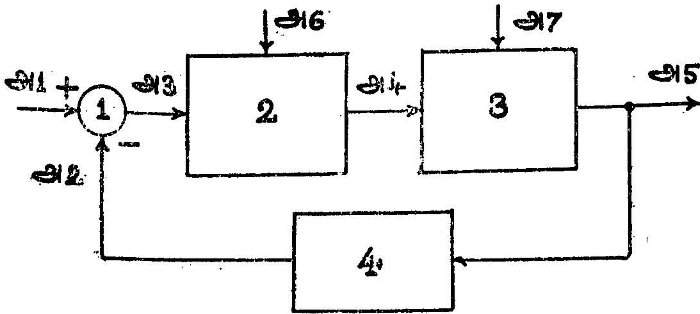
இயக்கு அறிகுறி (Actuating signal): மின் ஆக்கிக்குச் (generator) செலுத்தப்படும் மின் அழுத்த வேறுபாடு.

வழுக் கணிப்பி (Error detector): மின் பிரித்திகளின் இணை (pair of potentiometers)

- திறன் பெருக்கி (Power amplifier): மின் ஆக்கி (generator).
  அடிமை இயக்கி (Servo motor): மின் இயக்கி (motor).
  ஆளப்படும் பகுதி (Controlled plant or process): பீரங்கி மேடை, அதன் திருப்பம்.

பின் ஊட்டுக் கூறு (Feedback element): இணைப்புத் தண்டும் இரண்டாவது மின்பிரித்தியும்.

ஆள் குவையின் பொதுவான அமைப்பைக் காட்டும் ஒரு 'பெட்டிப் பட'த்தில் இவற்றைக் குறிக்கலாம் (படம் 1.2).



படம் 1.2 பின் ஊட்டு ஆள் குவையின் பெட்டிப் படம்

1. வழுக் கணிப்பி
2. கட்டுப்படுத்தி (ஆளும் பகுதி)
3. கட்டுப்படு பகுதி (ஆளப்படும் பகுதி)
4. பின் ஊட்டுக் கூறு

அ1. ஆதார ஊட்டம்
அ2. பின் ஊட்டு அறிகுறி
அ3. இயக்கு அறிகுறி
அ4. ஆளும் அறிகுறி
அ5. கட்டுப்படு ஈட்டம்
அ6. ஆற்றல் ஊட்டம்
அ7. இடர் ஊட்டம்

குறிப்பு : ஒரு தொழிலைக் கட்டுப்படுத்துவதைக் குறிக்கோளாகக் கொண்ட, இடைத் தொடர்பு உடைய பல உறுப்புகளின் ஒழுங்கான தொகுப்பே ஆள் குவை என்பது.

ஆற்றலைத் தோற்றுவிப்பது ஆள் குவை அல்ல. ஆற்றலின் ஒழுக்கைக் (flow of energy) கட்டுப்படுத்துவதே அதன் வேலை,

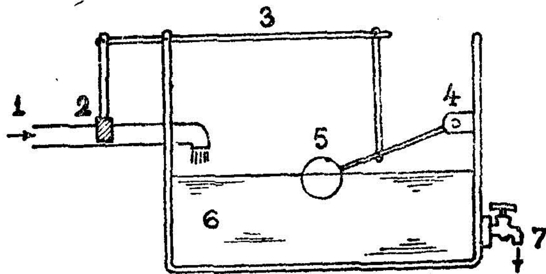
எனவே, தனியாக ஆற்றல் ஊட்டம் காட்டப்படுகிறது. இதற்கும் ஆதார ஊட்டத்திற்கும் தொடர்பு இல்லை.

மாதிரி வினா 1.1

கீழே காணும் எளிய ஆள் குவைகளில்

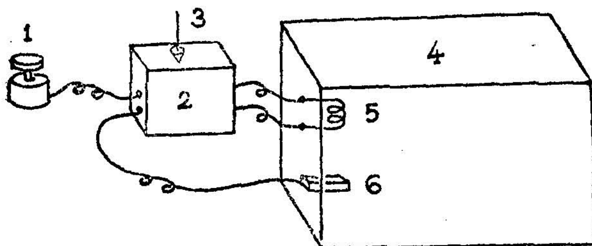
1. ஆதார ஊட்டம்
2. கட்டுப்படு ஈட்டம்
3. இயக்கு அறிகுறி
4. வழுக் கணிப்பி
5. கட்டுப்படுத்தி
6. கட்டுப்படு பகுதி

ஆகியவற்றைக் குறிக்கவும்.



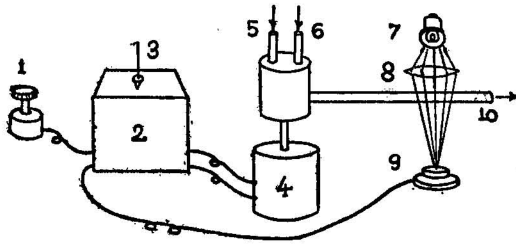
படம் 1.3 தொட்டி நீர்மட்ட ஆள் குவை

1. உள்வரும் நீர்
2. அடைப்பான்
3. பின் இணைப்புத் தண்டு
4. திருப்பு மையம்
5. மிதவை
6. நீர்த் தொட்டி
7. வெளிச்செல்லும் நீர்



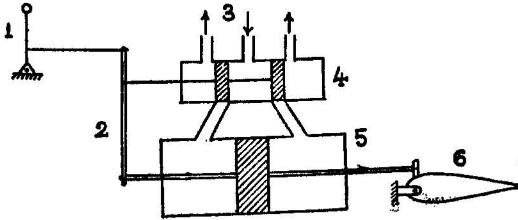
படம் 1.4. அறை வெப்பநிலை ஆள் குவை

1. வட்ட மின் பிரித்தி
2. மின் திறன் பெருக்கி
3. ஆற்றல் ஊட்டம்
4. அறை
5. வெப்பம் ஊட்டு சுருள்
6. வெப்ப மின் மாற்றி



படம் 1.5 இரசாயனக் கரைசலின் அடர்த்தி ஆள் குவை

1. மின் பிரித்தி
2. மின்திறன் பெருக்கி
3. ஆற்றல் ஊட்டம்
4. சுருள் இயக்கி
5. நீர்
6. இரசாயனக் கரைசல்
7. மின்விளக்கு
8. லென்சு
9. ஒளி மின்கலம்
10. வெளிப்படு இரசாயனக் கரைசல்



படம் 1.6 விமான உயர்த்தி ஆள் குவை

1. இயக்கு கோல்
2. பின் இணைப்பு
3. மிகை அழுத்தப் பாய்மம்
4. ஓரதர்
5. திறன் உருளை
6. உயர்த்தி

விடை:

(அ) தொட்டி நீர்மட்டக் கட்டுப்பாடு (water level control): *[படம் 1.3]*

1. தேவையான நீர்மட்டத்திற்கு ஏற்ற, அடைப்பானின் பெயர்ச்சி (displacement)

2. தொட்டியில் உள்ள நீர்மட்டம் (actual water level)

3. வழுவிற்கு ஏற்ற, அடைப்பானின் பெயர்ச்சி

4. ஓரதரும் மிதவையும்

5. அடைப்பான்

6. தொட்டி *(நீர்மட்டம்)*

(ஆ) அறை வெப்பநிலைக் கட்டுப்பாடு (room temperature control), [படம் 1.4]

1. தேவையான வெப்பநிலைக்கு ஏற்ற, மின் பிரித்தித் தண்டின் திருப்பம்
2. அறையின் உண்மையான வெப்பநிலை
3. திறன் பெருக்கியின் ஊட்டமான மின் அழுத்த வேறுபாடு
4. மின் பிரித்தியும் வெப்ப மின் மாற்றியும் (thermocouple)
5. திறன் பெருக்கியும், வெப்பம் ஊட்டுச் சுருளும்
6. அறை (வெப்பநிலை)

(இ) இரசாயனக் கரைசலின் அடர்த்திக் கட்டுப்பாடு (control of concentration of a chemical solution) படம் [1.5]

1. தேவையான கரைசல்-அடர்த்திக்கு ஏற்ற, மின்பிரித்தித் தண்டின் திருப்பம்
2. இரசாயனக் கரைசலின் உண்மையான அடர்த்தி
3. வழுவிற்கு ஏற்பத் திறன் பெருக்கியின் ஊட்டமாகும் மின் அழுத்த வேறுபாடு
4. மின் பிரித்தியும் ஒளி மின்கலமும்
5. திறன் பெருக்கியும், சுருள் இயக்கியும் (solenoid)
6. வெளிச் செல் கரைசல் (அடர்த்தி)

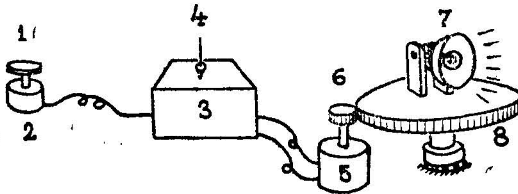
(ஈ) விமான உயர்த்திக் கட்டுப்பாடு (elevator control) படம் [1.6]

1. உயர்த்தியின் தேவையான திருப்பத்திற்கு ஏற்ற, இயக்கு கோலின் பெயர்ச்சி
2. உயர்த்தியின் திருப்பம்
3. வழுவிற்கு ஏற்ற, ஓரதர்த் தண்டின் (valve spindle) பெயர்ச்சி
4. ஓரதரும், பின் இணைப்புத் தண்டும்
5. பாய்மத் திறன் இயக்கி
6. உயர்த்தி

1·1.2. நிறை சுற்றுக் குலையும், குறை சுற்றுக் குலையும் (Closed loop system and open loop system)

தெளிவு கருதி, இத் தலைப்பை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.

துறைமுகங்களில் கப்பல்களுக்குக் கரையைக் காட்டும் விளக்க ஒளி, மாறு வேகத்தில் சுழன்று கொண்டு இருக்க வேண்டும். இதற்கான ஆள் குவை ஒன்றின் அமைப்பைக் கீழே காண்க [படம் 1.7].

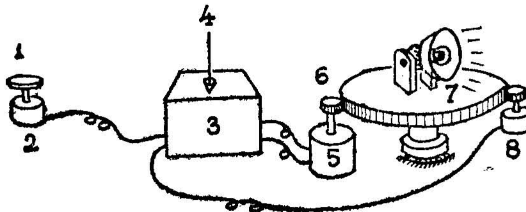


படம் 1.7 எளிய சுழல்வேக ஆள் குவை

1. வேக மாற்று ஆழி
2. மின் பிரித்தி
3. மின் திறன் பெருக்கி
4. ஆற்றல் ஊட்டம்
5. மின் இயக்கி
6. பல் இணை
7. வெள்ள ஒளி விளக்கு
8. சுழல் மேடை

விரும்பிய வேகத்திற்கு ஏற்ற அளவு வேகமாற்று ஆழியைத் திருப்புகிறோம். [இதை முதற் கணிப்பால் (initial calibration) அறியலாம்.] இதற்குப் பொருத்தமான ஒரு மின் அழுத்தத்தை மின் பிரித்தி தோற்றுவிக்கிறது. இதுவே திறன் பெருக்கப்பட்டு மின் இயக்கிக்குச் செலுத்தப்படுகிறது. அங்குத் தோன்றும் திருப்பு விசையால் மின் இயக்கியின் தண்டு சுழல, அதன் வேகம் ஒரு பல்லிணையால் (gear) குறைக்கப்பட்டு ஒளிவிளக்குத் தண்டும் குறைந்த, சீரான ஒரு வேகத்தில் சுழல்கிறது.

தேய்மானத்தால் முதற்கணிப்பு மாறிவிட்டாலும், வெளிக் காற்று விசை போன்ற இவ் ஊட்டங்கள் இருந்தாலும் இவ் ஆள் குவை சரிவர இயங்காது. இதன் செயற்பாட்டை முன்னேற்ற ஒரு பின்னூட்டுப் பாதையை அமைப்போம் (படம் 1.8).



படம் 1.8 நுட்பச் சுழல்வேக ஆள் குவை

1. வேகமாற்று ஆழி
2. மின் பிரித்தி
3. மின் திறன் பெருக்கி
4. ஆற்றல் ஊட்டம்
5. மின் இயக்கி
6. பல் இணை
7. ஒளி விளக்குச் சுழல் மேடை
8. வேக மின் ஆக்கி

மின் திறன் பெருக்கிக்குக் கொடுக்கப்படும் மின் அழுத்த வேறுபாடு, திறன் பெருக்கப்பட்டு, மின் இயக்கியில் திருப்பு விசையைத் தோற்றுவித்து, விளக்குத் தண்டு குறிப்பிட்ட வேகத்தில் சுழலுமாறு செய்கிறது.

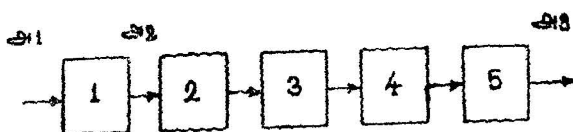
விளக்குத் தண்டுடன் பல்லிணையால் இணைக்கப்பட்ட வேக மின் ஆக்கி, விளக்குத் தண்டின் சுழல் வேகத்திற்கு ஏற்ப ஒரு மின் அழுத்தத்தை உண்டாக்குகிறது. இது பின்னூட்டப்பட்டுத் திறன் பெருக்கிக்குச் செல்கிறது.

விளக்குத் தண்டு மாரு வேகத்தில் சுழல, மின் திறன் பெருக்கியின் ஊட்ட மின் அழுத்தம், பின்னூட்ட மின் அழுத்தம் இவற்றின் கூடுதலைக் கொடுக்குமாறு வேகமாற்று ஆழி திருப்பப் படுகிறது.

வெளிக் காற்றின் எதிர்ப்பால் விளக்குத் தண்டின் வேகம் சிறிது குறைகிறது என்க. இதனல் பின்னூட்ட மின் அழுத்தம் குறைகிறது. மின் பிரித்தியின் அழுத்தத்தில் மாறுதல் இல்லை. எனவே, திறன் பெருக்கியின் ஊட்ட மின் அழுத்தம் அதிகம் ஆகிறது. இதனல் இயக்கியின் திருப்பு விசை உயர்ந்து, விளக்குத் தண்டின் வேகமும் உடன் உயர்ந்து பழைய சீரான நிலையை அடையும்.

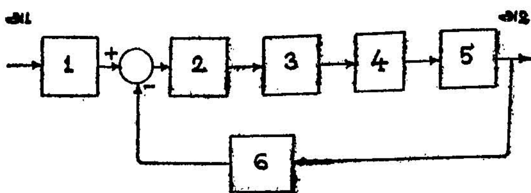
இவ்வாறே விளக்குத் தண்டின் வேகம் தேவைக்கு அதிகம் ஆனலும், பின்னூட்டு அதிகம் ஆகி, திறன் பெருக்கியின் ஊட்டத்தைக் குறைத்து, அதன் விளைவாய் விளக்குத் தண்டின் வேகத்தையும் குறைக்கும். வேகம் பழைய சீரான நிலையை அடையும் வரையில் இத் திருத்தல் (correction) நிகழ்ச்சியும் தொடரும்.

மேற்கண்ட சுழல் வேகக் கட்டுப்பாட்டுக் குலைகள் இரண்டின் பெட்டிப் படங்களும் [படம் 1.9, படம் 1.10] கீழே தரப் பட்டுள்ளன.



படம் 1.9 எளிய சுழல் வேக ஆள் குலை-பெட்டிப் படம்

1. மின் பிரித்தி
2. திறன் பெருக்கி
3. மின் இயக்கி
4. பல் இணை
5. விளக்குத் தண்டு
அ1. ஆழியின் திருப்பம்
அ2. இயக்கு அறிகுறி
அ3. சுழல் வேகம்



படம் 1.10 நுட்பச் சுழல் வேக ஆள் குவை-பெட்டிப் படம்

1. மின் பிரித்தி
2. திறன் பெருக்கி
3. மின் இயக்கி
4. பல் இணை
5. விளக்குத் தண்டு
6. வேக மின் ஆக்கி
அ1. ஆழியின் திருப்பம்
அ2. சுழல் வேகம்

இவற்றுள், நுட்பச் சுழல் வேக ஆள் குவையில், பின் ஊட்டு இருப்பதால், ஊட்டத்தில் இருந்து ஈட்டம், பிறகு ஈட்டத்தில் இருந்து ஊட்டம் என அறிகுறி பாய் பாதையில் ஒரு முழுச் சுற்று முடிகிறது [படம் 1.10]. இதில் இயக்க அறிகுறி சுழல் வேக மாகிய நேர் விளைவால் மாற்றப்படுகிறது.

எளிய சுழல் வேக ஆள் குவையில் பின் ஊட்டு இல்லை. அறிகுறி ஊட்டப் பகுதியில் இருந்து நேராக ஈட்டப் பகுதிக்குச் சென்று விடுகிறது. அதன் பாதையில் ஒரு சுற்று முடியாமல் குறைவாகவே நிற்கிறது [படம் 1.9]. இதில் இயக்க அறிகுறி சுழல் வேகமாகிய நேர் விளைவால் மாற்றப்படவில்லை.

இப்பொழுது இரு வரையறைகளை எழுதலாம் :

1. இயக்க அறிகுறியை நேர் ஈட்டத்தால் மாற்ற இயலும் ஆள் குவை 'நிறைசுற்று ஆள் குவை' (closed loop control system).

2. இயக்க அறிகுறியை நேர் ஈட்டத்தால் மாற்ற இயலா ஆள் குவை 'குறை சுற்று ஆள் குவை' (open loop control system)

சுருக்கமாக, பின் ஊட்டு ஆள் குவைகளை (feedback control systems) நிறை சுற்று ஆள் குவைகள் என்றும், பின் ஊட்டு இல்லா ஆள் குவைகளைக் குறை சுற்று ஆள் குவைகள் என்றும் கூறலாம்.

மாதிரி வினா 1.2

நிறை சுற்று, குறை சுற்று—ஆள் குவைகளின் ஒற்றுமை, வேற்றுமைகளை விளக்குக.

(1) நுட்பம் (Accuracy)

நிறை சுற்றுக் குவை, பின்னூட்டின் சிறப்பால் அதிநுட்ப மாகச் செயல்படுகிறது. சூழலின் வெப்பநிலை (environmental

temperature), ஈரப்பதன் (humidity), கூறுகளின் தேய்வு (wear and tear), நேரிலா வரவு (nonlinearity) இவை எதுவும் ஆள் குவையின் செயல் திறமையைக் குறைக்க இயலாது.

குறை சுற்றுக் குவையில் பின்னூட்டு இன்மையால் செயல் நுட்பம், முதற் கணிப்பையே (initial calibration) பொறுத்தது. எனவே, மேற்கண்ட காரணங்களால் செயல் திறமை பாதிக்கப் படுகிறது.

(2) விளைவு வேகம் (Speed of response)

ஆள் குவையின் ஈட்டம், தேவையான அளவை எவ்வளவு விரைவில் எட்டுகிறது என்பதைக் குறிப்பதே 'விளைவு வேகம்'. நிறை சுற்றுக் குவையின் விளைவு வேகம் குறை சுற்றுக் குவையினதை விட மிக அதிகம்.

(3) விலை மதிப்பு (Cost)

நிறை சுற்றுக் குவையில் பின்னூட்டின் சிறப்பால் அதி நுட்பம் இல்லா, மலிவான கூறுகளைப் பயன்படுத்தினாலும் முழுமைச் செயல் (overall performance) நன்றாக இருக்கும்.

இதற்கு இணையான திறமையுடன் செயல்படக் குறை சுற்றுக் குவையில், அதிக விலையுள்ள நுட்பக் கூறுகளையே பயன்படுத்த வேண்டும். ஏனெனில் இதில் பின்னூட்டு இல்லை.

(4) நிலையுறுதி (Stability)

பின்னூட்டால் விளையும் பிழைதிருத்தம் ஓர் அளவிற்கு அதிகம் ஆனால் ஆள் குவை 'நிலையுறுதி'யை இழக்க நேரிடலாம். பின்னூட்டால் நிறை சுற்றுக் குவையில் காணப்படும் இக் குறைபாடு குறை சுற்றுக் குவையில் இல்லை.

(5) எளிமை (Simplicity)

பின்னூட்டுப் பாதையும், உறுப்புகளும், அவற்றால் விளையும் சிக்கல்களும் நிறைசுற்றுக் குவையில் உண்டு: குறை சுற்றுக் குவையில் இல்லை. கட்டவோ, காக்கவோ, குறைசுற்றுக் குவையே எளிமையானது.

(6) அறிகுறிப் பெருக்கம் (Signal amplification)

எதிர் பின்னூட்டு (negative feedback), சுற்று (loop) அறிகுறிப் பெருக்கத்தைக் குறைக்கிறது. எனவே, குறை சுற்றுக் குவையின் அறிகுறிப் பெருக்கம் நிறை சுற்றுக் குவையினதை விட அதிகம்.

1·1.3. அடிமைக் குவையும் ஒழுங்கமை குவையும் (Servomechanism and Regulator)

சுழற் பீரங்கித் திருப்ப ஆள் குவையில் (பகுதி 1·1.1) தொலைநோக்கி திரும்பும் திசை எல்லாம் உடனுக்குடன் பீரங்கி மேடையும் திரும்புகிறது. இயந்திர இயக்கத்தை (mechanical motion) ஈட்டமாகவும், மாறிக்கொண்டே இருக்கும் தொலை நோக்கித் திருப்பத்தை (turning) ஊட்டமாகவும் உடையது இது. மேலும், தொலைநோக்கியைத் திருப்பத் தேவையான சிறிய திறனைக் கொண்டே பெரும் பளுவுடைய பீரங்கி மேடையைத் திருப்ப இயல்கிறது. (திறன் பெருக்கமே இதன் காரணம்.) இத்தகைய ஆள் குவை 'அடிமைக் குவை' (servomechanism) எனப் படுகிறது.

'அடிமைக் குவை'யின் வரையறை (servomechanism—definition):

"விரைவில் மாறும் தன்மையதான ஊட்டமும், இயந்திர இயக்கமாம் ஈட்டமும் உடைய, மின், இயந்திர இயற்கூறுகளால் ஆன, திறன் பெருக்கி—எதிர்ப் பின்னூட்டு—ஆள் குவையே 'அடிமைக்குவை' ஆகும்".

விளக்க ஒளிச் சுழல் வேக ஆள் குவையில் (பகுதி 1·1.2) ஒளி விளக்கின் தண்டு மாரு வேகத்தில் சுழன்றுகொண்டு இருக்கிறது. வெளிக்காற்று விசை போன்ற இடர் ஊட்டங்களால் (disturbance inputs) அல்லது சுமை நிலை மாற்றங்களால் (changes in load conditions) அதன் வேகம் மாறுவது இல்லை. இதன் ஆதார ஊட்டமும் (reference input) மாருத் தன்மையது. இத் தகைய ஆள் குவை 'ஒழுங்கமை குவை' (regulator) எனப் படுகிறது.

ஒழுங்கமை குவையின் வரையறை (Regulator—definition):

"மாருத் தன்மையதான ஊட்டமும், வெப்பநிலை, வேகம், அழுத்தம் போன்ற ஏதாவது ஓர் உருவியல் மாறியை (physical variable) ஈட்டமாகவும் கொண்டு, பல்வேறு சுமைநிலைகளிலும் ஈட்டத்தின் அளவு மாரு வண்ணம் இயங்கும் ஆள் குவையே 'ஒழுங்கமை குவை' ஆகும்".

மாதிரி வினு 1.3

அடிமைக் குவை, ஒழுங்கமை குவை இவற்றின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகளை வெளிக் கொணர்க.

(1) ஊட்டம் (Input)

இரு வகைக் குலைகளின் ஊட்டமுமே ஒரு வட்ட மின் பிரித்தியின் (circular potential divider) தண்டைத் திருப்புவதாக இருக்கலாம். ஆனால், செய்தொழில் நோக்கி, அவற்றின் அளவுகள் பெரிதும் மாறுபடுகின்றன. சான்றாக, ஒழுங்கமை குலையில் ஊட்டம் திருத்தி அமைக்கக் கூடியது ஆயினும் ஒரே நிலையில் (தேவையான ஈட்டத்திற்கு ஏற்ப) மாறாது வைக்கப்படுகிறது. அடிமைக் குலையில் விரைவாகவும், அதிக அளவிலும் ஊட்டம் மாறும் தன்மையது.

(2) ஈட்டம் (Output)

ஒழுங்கமை குலையின் ஈட்டம் வெப்பநிலை, வேகம், மின் அழுத்தம், நீர் மட்டம், இரசாயனக் கரைசலின் அடர்த்தி அளவு (density), அழுத்தம் (pressure) என ஏதாவது ஓர் உருவியல் மாறியாக இருக்கலாம். அடிமைக் குலையின் ஈட்டமோ ஓர் இயந்திர இயக்கமாகவே இருக்கும்.

(3) பின்னூட்டு (Feedback)

ஒழுங்கமை குலையில் பின்னூட்டு இருக்கலாம் (படம் 1.8); இல்லாதும் போகலாம் (படம் 1.7). ஏனெனில், இதன் ஈட்டம் மாறா நிலையில் இருந்தால் போதும். அடிமைக் குலையிலோ, ஈட்டம், ஊட்டத்தின் சிறு மாற்றங்களையும் உடனுக்குடன் தொடர வேண்டும். எனவே, இதற்குப் பின்னூட்டு இன்றியமையாதது ஆகும்.

(4) திறன் பெருக்கம் (Power amplification)

ஒழுங்கமை குலையில் திறன் பெருக்கம் இருக்கலாம்; ஆனால் அவசியம் இல்லை (படம் 1.3). மாறாக, ஓர் அடிமை போல், நம் உடற் பலத்திற்கு (physical might) அப்பாற்பட்ட பெரிய வேலைகளையும் எளிதில் செய்யும் சிறப்பியல்பு உடைய அடிமைக் குலை, திறன் பெருக்கம் இன்றி அமையாது.

மாதிரி வினா 1.4

அடிமைக் குலையின் சிறப்பியல்புகளைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

(1) தொலைக் கட்டுப்பாடு (Remote control)

இடை இணைப்புகளாக மின் கடத்திகளைப் பயன்படுத்தி தொலை தூரத்தில் அமைந்த ஈட்டப்பகுதிகளையும் எளிதில் கட்டுப்படுத்தலாம். இத் 'தொலைக் கட்டுப்பாடு' அடிமைக் குலையின் தனிச் சிறப்பாகும்.

(2) திறன் பெருக்கம் (Power amplification)

ஊட்டப் பகுதியில் சிறிது அளவே சக்தியைச் செலவிட்டு, ஈட்டப் பகுதியில் பெருமளவு சக்தியைக் கட்டுப்படுத்தலாம். திறன் பெருக்கியால் வரும் சிறப்பு இது.

(3) நுட்பமும், செயல் வேகமும் (Accuracy and speed)

பின்னூட்டின் சிறப்பால் சிக்கலான வினைகளையும் செவ்விய முறையில் மீ நுட்பமாகவும், மிக்க விரைவாகவும் செய்து முடிக்கலாம்.

குறிப்பு : விமானந் தாக்கிக் கப்பல்களில் உள்ள சுழல் பீரங்கித் திருப்ப அடிமைக் குவையின் அமைப்பையும், செயலையும் பகுதி 1·1.1-ல் விரிவாகக் கண்டோம்.

பல வகை ஆள் குவைகளின் அமைப்பு, செயல், ஆக்கம் இவற்றை அறிவதற்கு இவ் அடிமைக் குவை ஆரம்பப் புள்ளியாக இருக்கிறது. ஓர் ஆள் குவைக்குப் பொதுவாக இருக்க வேண்டிய சிறப்பியல்புகள் அநேகமாக அனைத்தையும் உடைய இது, பகுப்பாய்வு செய்யவும் எளிதாக இருக்கிறது.

எனவே, இந்நூல் முழுதும் இவ் அடிமைக் குவையே எடுத்துக் காட்டாக மீண்டும் மீண்டும் வருவதில் புதுமை இல்லை. இதன் பகுப்பாய்வைச் சிறிதே மாற்றங்களுடன் பலவகை ஆள் குவைகளுக்கும் பொருத்தல் இயலும். இதைத் தொடர்ந்து படிக்கையில் அறியலாம்.

1·1.4. ஒருமை-பன்மை-ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவைகள் (Single input single output systems and multiple input multiple output systems)

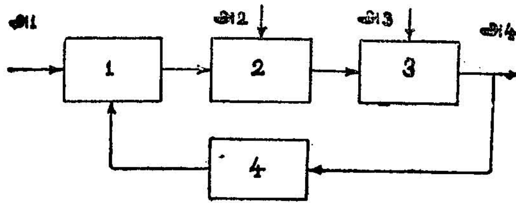
இதுவரை நாம் பார்த்த ஆள் குவைகளில் ஓர் ஊட்டமும், ஓர் ஈட்டமுமே இருந்தன. சிறப்பும் சிக்கலும் மிக்க இந்நாள் ஆள் குவைகளில் பல ஊட்டங்களும், பல ஈட்டங்களும் தேவைப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஊட்ட ஈட்ட எண்ணிக்கையைக் கொண்டு ஆள் குவைகளை இருவகைகளாகப் பிரிக்கலாம் :

(1) ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவைகள்

(2) பன்மை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவைகள்

வரையறைகள் :

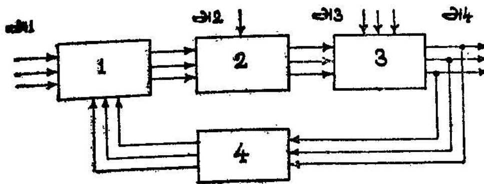
1. 'ஒரே ஓர் ஊட்டமும், ஒரே ஓர் ஈட்டமும் உடைய ஆள் குவை, ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவை (single input single output system) எனப்படும்' [படம் 1.11].



படம் 1.11 ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவை-பெட்டிப் படம்

1. ஒப்பிடு பகுதி	அ 1. விரும்பும் விளைவு
2. கட்டுப்படுத்தி	அ 2. ஆற்றல் ஊட்டம்
3. கட்டுப்படு பகுதி	அ 3. இடர் ஊட்டம்
4. பின்னூட்டுப் பகுதி	அ 4. நேர் விளைவு

2. *'பல ஊட்டங்களும், பல ஈட்டங்களும் உடைய ஆள்குவை, பன்மை ஊட்ட ஈட்ட ஆள்குவை* (multiple input multiple output system) *எனப்படும்' (படம் 1.12).*



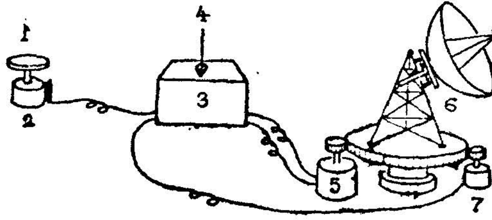
படம் 1.12 பன்மை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவை-பெட்டிப் படம்

1. ஒப்பிடு பகுதி	அ 1. விரும்பும் விளைவுகள்
2. கட்டுப்படுத்தி	அ 2. ஆற்றல் ஊட்டம்
3. கட்டுப்படு பகுதி	அ 3. இடர் ஊட்டங்கள்
4. பின்னூட்டுப் பகுதி	அ 4. நேர் விளைவுகள்

மாதிரி வினா 1.5

ஒருமை-, பன்மை-ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவைகளுக்கு ஒவ்வோர் உதாரணம் தருக.

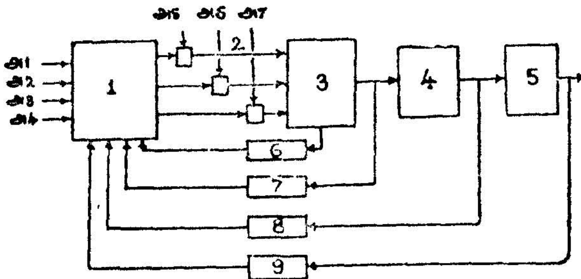
'ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட ஆள் குவை'க்கு எடுத்துக் காட்டாக இராடார் அலைவாங்கித் (radar antenna) *திருப்பக் கட்டுப்பாட்டுக் குவையைக் கூறலாம் (படம் 1.13). இதில் ஊட்டம், சுழற்று ஆழியின் திருப்பம், ஈட்டம், அலைவாங்கியின் திருப்பம்.*



படம் 1.13 அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள் குலை (Antenna position control system)

1. சுழற்று ஆழி
2. மின் பிரித்தி
3. திறன் பெருக்கி
4. ஆற்றல் ஊட்டம்
5. இயக்கி
6. அலை வாங்கி
7. வேக மின் ஆக்கி

'பன்மை ஊட்ட ஈட்ட ஆள்குலை'க்கு எடுத்துக் காட்டாக அனல் மின் நிலையங்களில் உள்ள கொதிகலன், சுழலி, மாறுமின் ஆக்கிக் கூட்டுக் கட்டுப்பாட்டுக் குலையைக் காணலாம் (Boiler, Turbine, Alternator-Coordinated Control System) *(படம் 1.14)*. இதில் நீராவி அழுத்தம், வெப்பநிலை, சுழலியின் வேகம், மாறுமின் ஆக்கியின் மின் அழுத்த அளவு போன்ற பல கட்டுப்படுத்த வேண்டிய மாறிகள் உள்ளன. இவற்றிற்கு ஆதார ஈட்டங்களாக, விரும்பும் நீராவி அழுத்தம், விரும்பும் வெப்பநிலை, விரும்பும் சுழல்வேகம், விரும்பும் மின் அழுத்தம் இவற்றைக் காட்டும் அறிகுறிகள் உள்ளன.



படம் 1.14 கொதிகலன்-சுழலி-மின் ஆக்கிக்கூட்டு ஆள்குலை-பெட்டிப்படம் (Boiler, Turbine, Alternator Coordinated Control system-Block Diagram)

1. தான் இயங்கு கணிப்பொறி
2. ஓரதர்கள்
3. நீராவிக் கொதிகலன்
4. நீராவிச் சுழலி
5. மாறுமின் ஆக்கி
6. அழுத்த அளவு கருவி
7. வெப்பநிலை அளவு கருவி
8. வேக அளவு கருவி
9. மின் அழுத்த அளவு கருவி

அ1. விரும்பும் நீராவி அழுத்தம்
அ2. விரும்பும் வெப்ப நிலை
அ3. விரும்பும் வேகம்
அ4. விரும்பும் மின் அழுத்தம்
அ5. ஊட்டு நீர்
அ6. எரி பொருள்
அ7. காற்று

1·1.5 ஆள்குவையில் பிற வகைகள்

ஆள்குவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப் படுத்தலாம் :

(அ) அறிகுறிப் பாதையை ஒட்டி—

1. நிறை சுற்று ஆள்குவை (Closed loop control system)

2. குறை சுற்று ஆள்குவை (Open loop control system)

(ஆ) செய் தொழிலையும், அமைப்பையும் ஒட்டி—

1. அடிமைக் குவை (Servomechanism)

2. ஒழுங்கமை குவை (Regulator)

(இ) ஊட்ட, ஈட்ட எண்ணிக்கையை ஒட்டி—

1. ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட ஆள்குவை (SISO control system)

2. பன்மை ஊட்ட ஈட்ட ஆள்குவை (MIMO control system)

இதுவரை முன்பகுதிகளிற் கண்டோம். மேலும் சில வகைகள் :

(ஈ) அறிகுறியின் இயல்பை ஒட்டி—

1. தொடர் செய்தி ஆள்குவை (Continuous data control system)

2. துண்டுச் செய்தி ஆள்குவை (Discrete data control system)

(உ) செயல் திறமையை ஒட்டி—

1. மீத்திறமை ஆள்குவை (Optimal control system)

2. மாற்று இயல் ஆள்குவை (Adaptive control system)

இயக்கு அறிகுறி துண்டுபடாமல் தொடர்ச்சியாகச் செயற்படும் ஆள்குவை 'தொடர் செய்தி ஆள்குவை' எனப்படும்.

இயக்கு அறிகுறி தொடர்ச்சி இல்லாமல் விட்டுவிட்டுச் செயற்படும் ஆள்குவை 'துண்டுச் செய்தி ஆள்குவை' எனப்படும்.

செயற்படு நேரம், ஆகும் செலவு, திறன் இழப்பு போன்ற செயல் அளவைகள் (performance index) மீச்சிறிய அளவுகளை அடையுமாறு சிறப்புற இயங்கும் ஆள்குவையே 'மீத்திறமை ஆள்குவை' ஆகும்.

சிறிதும் தொடர்பு இல்லாப் பலதரப்பட்ட சூழ்நிலைகளிலும் சிறப்புறச் செயல்படத் தன் உருவையே மாற்றிக்கொண்டு இயங்கும் திறமை உள்ள ஆள்குலையே 'மாற்றுஇயல் ஆள் குலை' ஆகும்.. இவற்றின் விளக்கங்கள் விரிவு அஞ்சி விடுக்கப் படுகின்றன.

1.2 ஆள்குலை உறுப்புகள் :

1·2.1 உறுப்புகளின் வரையறையும், வரிசையும்

ஓர் ஆள்குலையின் முக்கிய உறுப்புகள் யாவும் சுழற் பிரங்கித் திருப்ப அடிமைக் குலையில் இருக்கக் காணலாம். இவ் உறுப்புக்களின் பெயர்களையும், அவற்றின் வேலைகளையும் சுருக்க மாக இங்குக் காண்போம்.

1. வழுக்கணிப்பி (Error detector)

உண்மையான ஈட்டத்தை அளந்து அதைத் தேவையான ஈட்டத்துடன் ஒப்பிட்டு, அவ்வேறுபாட்டிற்கு ஏற்ப ஒரு இயக்கு அறிகுறியைத் தோற்றுவிப்பது 'வழுக்கணிப்பி' என்னும் உறுப்பு.

மின் பிரித்தி இணை (potentiometer pair), ஒத்தியங்கி இணை (synchro pair), கழிப்பல்லிணை (differential gear) இவை வழுக் கணிப்பிகளுக்கு எடுத்துக் காட்டுக்கள்.

2. திறன் பெருக்கி (Power amplifier)

வலிவு அற்ற இயக்கு அறிகுறிக்கு (weak actuating signal) ஏற்ப ஒரு வொத்த வலிமை மிகு ஆள் அறிகுறி ஒன்றை (strong control signal) வெளி ஆற்றலைக் கொண்டு தோற்றுவிக்கும் உறுப்பே 'திறன் பெருக்கி' ஆகும்.

நேர்மின் ஆக்கி, ஆம்பிளிடைன் (amplidyne), காந்தப் பெருக்கி (magnetic amplifier), நீர்மப் பெருக்கி (hydraulic amplifier) என்பவை சில எடுத்துக் காட்டுக்கள்.

3. அடிமை இயக்கி (Servomotor)

திறன் பெருக்கியில் இருந்து வரும் வலிமை மிகு ஆள் அறிகுறிக்கு ஏற்பக் கட்டுப்படு பகுதியை இயக்கும் உறுப்பு 'அடிமை இயக்கி' எனப்படும்.

நேர் மின் இயக்கி, மாறுமின் இயக்கி, நீர்ம இயக்கி, வளிம இயக்கி (pneumatic motor) இவை அடிமை இயக்கிகளாகப் பயன் படுகின்றன.

4. பின்னூட்டுக் கூறு (Feedback element)

உண்மையான ஈட்டத்தைக் கணித்து, அதற்கு ஏற்ப, (பொதுவாக மின் இயல்) அறிகுறி ஒன்றைத் தோற்றுவிப்பது பின்னூட்டுக் கூறு ஆகும்.

வேக மின் ஆக்கி (tachogenerator), மின் பிரித்தி (potentiometer), ஜைரோ (gyro), போன்ற அறிகுறி மாற்றிகள் (transducers) பின்னூட்டுக் கூறுகளாக இயங்குகின்றன.

மேற்கண்ட உறுப்புகளைத் தவிர, பல்லிணை (gear), ஈடு செய்வி (compensator) போன்ற பிற உறுப்புகளையும் ஆள்குலைகளிற் காணலாம்.

1·2.2 வழுக்கணிப்பிகள் (Error Detectors) :

1. மின் பிரித்தி (Potential divider)

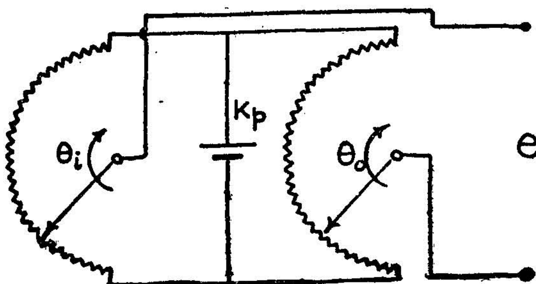
கடத்தா உருளை ஒன்றின் மேல் உள்ள மின்தடைச் சுருளைத் தொட்டுக்கொண்டு ஒரு நழுவு இணைப்பு (sliding contact) நகர்கிறது. இதனால் சுருளின் ஒரு முனைக்கும், நழுவு இணைப்புக்கும் இடையே உள்ள மின்தடை மாறுகிறது.

சுருளின் இரு முனைகளும் ஒரு மின் கலத்துடன் இணைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. எனவே, நழுவு இணைப்பின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு ஏற்ப, நழுவு இணைப்புக்கும் எதிர்மின் முனைக்கும் இடையில் உள்ள மின் அழுத்தம் மாறுகிறது. இதுவே 'மின் பிரித்தி' ஒன்றின் அமைப்பாகும்.

மின் பிரித்தி இயங்க ஒரு மின்கலம் அவசியம். கொடுக்கப் படும் மின் ஆற்றல் வகையைப் பொறுத்து மின் பிரித்தியில் நழுவு இணைப்பின் பெயர்ச்சிக்கு ஏற்ப ஒரு நேர்மின் அழுத்தமோ, மாறுமின் அழுத்தமோ கிடைக்கிறது.

ஒரே மாதிரியான இரு மின் பிரித்திகளுள் ஒன்று ஊட்டத் தண்டால் இயக்கப்படட்டும்; மற்றொன்று ஈட்டத்தண்டால் இயக்கப்படட்டும். பொதுவான எதிர்மின் முனையின் மின் அழுத்தம் சுழி என்க. அப்பொழுது முதல்நழுவு இணைப்பின் மின் அழுத்தம் ஊட்டத்திற்கும், இரண்டாவது நழுவு இணைப்பின் மின் அழுத்தம் ஈட்டத்திற்கும் நேர் விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

இரு நழுவு இணைப்புகளுக்கு இடையுள்ள மின் அழுத்த வேறுபாடு, ஊட்டத்திற்கும் ஈட்டத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு அல்லது வழுவிற்கு நேர் விகிதப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கும். இவ்வாறு மின் பிரித்தி இணை, 'வழுக்கணிப்பி'யாக இயங்குகிறது. [படம் 1.15]



படம் 1.15 மின் பிரித்தி வழுக்கணிப்பி

θi : ஊட்டத் திருப்பம்
θo : ஈட்டத் திருப்பம் e = Kp (θi − θo)
Kp : வழுக்கணிப்பி மாறிலி
e : வழுக்கணிப்பி ஈட்டம்

2. ஒத்தியங்கி (Synchro)

இது ஒரு மாறுமின் பொறி (AC machine). அமைப்பில் முப் பருவத் தூண்டுமின் இயக்கியை (three phase induction motor) ஒத்தது. வெளிமின் ஆற்றலின் உதவியால், தன் தண்டின் (shaft) திருப்பத்திற்கு ஏற்ப ஒரு மாறுமின் அழுத்தத்தைத் தோற்று விப்பது.

இதில் ஒரு நிலைப்பகுதியும், ஒரு சுழற்பகுதியும் உள்ளன. சுழற் பகுதியில் ஒரு–பருவச் சுற்றும் (single-phase winding) நிலைப் பகுதியில் மூன்று ஒரு–பருவச் சுற்றுகளும் (three single-phase windings) உள்ளன.

சுழற்பகுதியின் அமைப்பிற்கு ஏற்ப, ஒத்தியங்கியின் பெயரும் செயலும் மாறுபடுகின்றன :

'டம்பெல்' (dumb bell) அமைப்பினது 'ஒத்தியங்கு ஆக்கி' (synchro generator)

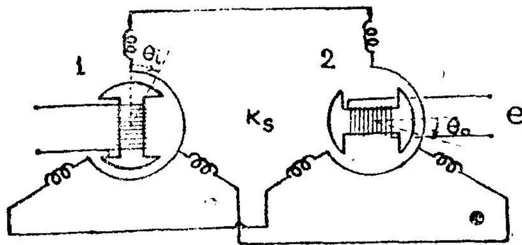
'குடை' (umbrella) வடிவினது 'ஒத்தியங்கு மாற்றி' (synchro transformer)

'உருளை' (cylinder) உருவினது 'ஒத்தியங்கு இயக்கி' (synchro motor)

ஓர் ஒத்தியங்கு ஆக்கியும், ஒத்தியங்கு மாற்றியும் இணைந்து வழுக்கணிப்பியாக இயங்குகின்றன. ஆக்கியின் நிலைச்சுருள்களும் மாற்றியின் நிலைச்சுருள்களும் வெளிமுனைகளில் மின் கடத்திகளால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. உள் முனைகள் இரு கூட்டுப் புள்ளிகளாக (star points) இணைக்கப் பட்டுள்ளன. [படம் 1.16]

ஆக்கியின் சுழற்சுருள் (rotor winding) செங்குத்தாகவும், மாற்றியின் சுழற் சுருள் கிடைமட்டமாகவும் இருக்கின்றன என்க. ஆக்கியின் சுழற்சுருள் ஒரு மாறுமின் வழங்கி (AC source) இணைக்கப்பட்டு இருக்கட்டும். இப்போது மாற்றியின் சுழற் சுருளில் மின் அழுத்தம் சுழியாக (zero) இருக்கும். இதுவே 'சுழி நிலை' (zero position) எனப்படும்.

ஆக்கி, மாற்றி இவற்றின் சுழற்பகுதிகளை அவற்றின் சுழி நிலைகளில் இருந்து ஒரே திசையில் திருப்பினால், திருப்பக்கோண வேறுபாட்டிற்கு ஏற்ப, மாற்றியின் சுழற்சுருளில் ஒரு மின் அழுத்தம் தோன்றுகிறது.



படம் 1.16 ஒத்தியங்கு வழுக்கணிப்பி

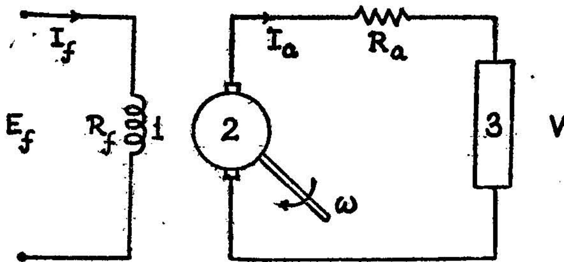
1. ஒத்தியங்கு ஆக்கி
2. ஒத்தியங்கு மாற்றி
θi ஊட்டத் திருப்பம்
θo ஈட்டத் திருப்பம்
e : வழுக்கணிப்பி ஈட்டம்
Ks : வழுக்கணிப்பி மாறிலி
$e = Ks(\theta i - \theta o)$

1·2.3 திறன் பெருக்கிகள் : (Power Amplifiers)

1. நேர் மின் ஆக்கி (DC generator)

காந்தப் புலத்தில் (magnetic field) மின் கடத்திகள் சுழலும் போது அவற்றில் மின் அழுத்தம் தோன்றுகிறது. காந்தப் புலத்தின் வலிமையும், கடத்திகளின் சுழல்வேகமும் உயர, மின் அழுத்தமும் அதிகமாகும். இது ஃபாரடேயின் விதி (Faraday's law).

நேர்மின் ஆக்கியில் மின் காந்தச் சுருளுக்குச் செலுத்தப் படும் மின்னோட்டம் காந்தப்புலத்தை உண்டாக்குகிறது. மின் கடத்திகள் பதிக்கப்பெற்ற மின்னகம் (armature) ஒரு முதல் இயக்கியால் (prime mover) சுழற்றப்படுகிறது. மின்னகக் கடத்திகளில் தோன்றும் மின் அழுத்தம், இரு தொடுவைகளின் (brushes) வழி வெளி வருகிறது. [படம் 1.17]



படம் 1.17 நேர்மின் ஆக்கி

1. காந்தச் சுருள்
2. மின் அகம்
3. மின் சுமை

Ef: காந்தச் சுருள் மின் அழுத்தம்
ω: முதல் இயக்கியின் சுழல் வேகம்
V: ஈட்ட மின் அழுத்தம்

$E_g = K_g I_f$

$E_g = V + I_a R_a$

வழக்கமான குறியீடுகளைக் கொண்டு பின்வரும் உறவுகளை (relations) எழுதலாம்.

$$E_g \propto \Phi\omega \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 1.1$$

மேலும் $\Phi \propto I_f$ (நேர் உறவு)
சுழல் வேகம் மாறாதது, என்க.

$$\text{எனவே, } \boxed{E_g = K_g I_f} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 1.2$$

மின் சுமையும் இருக்கையில்

$$\boxed{V = E_g - R_a I_a} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 1.3$$

காந்தச் சுருள் மின் அழுத்தம்

$$E_f = R\ I \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad 1.4$$

இவை யாவும் கடை நிலை உறவுகள் (steady state relations).

ஒரு நேர் மின் ஆக்கியில்

$E_f = 200$ V; $I_f = 0.5$ A; $V = 200$ V; $I_a = 40$ A என்க.

அப்பொழுது, திறன் ஊட்டம் $E_f I_f = 200 \times 0.5 = 100$ W

திறன் ஈட்டம் $VI_a = 200 \times 40 = 8000$ W

$$\text{திறன் பெருக்கம்} = \frac{\text{திறன் ஈட்டம்}}{\text{திறன் ஊட்டம்}} = \frac{8000}{100} = 80$$

2. ஆம்பிளிடைன் (Amplidyne)

'ஆம்பிளிடைன்' ஒரு சிறப்பு நேர்மின் ஆக்கி ஆகும். இதை இரண்டு அடுக்கு நேர்மின் ஆக்கி (two-stage DC generator) எனலாம். சுழலும் திறன் பெருக்கிகளில் (rotating amplifiers) தலையாயது இது. சிறப்புகள்: (1) பெருமளவு திறன் பெருக்கம் (2) மிக அதிக 'விளைவு வேகம்' (speed of response).

ஆம்பிளிடைனில் நேர்மின் ஆக்கியைப் போன்றே காந்தச் சுருளும், மின்னகமும் உள்ளன. காந்தச் சுருளில் ஆள் சுருள் (control winding) என்றும், பின்னூட்டுச் சுருள் (feedback winding) என்றும் இரு பகுதிகள் உள்ளன. மின்னகத்தில் கிடை அச்சுச் சுருள் (direct axis winding), நிலை அச்சுச்சுருள் (quadrature axis winding) என இரண்டு மின் சுருள்கள் இருக்கின்றன. இவற்றின் முனைகள் முறையே கிடையச்சுத் தொடுவைகள் (direct axis brushes), நிலையச்சுத் தொடுவைகள் (quadrature axis brushes) இவற்றின் வழி வெளி வருகின்றன.

நிலையச்சுத் தொடுவைகள் மின்கடத்தியால் குறுக்கே இணைக்கப் பட்டிருக்கின்றன (short circuited). ஈட்ட மின் அழுத்தம் கிடை அச்சுத் தொடுவைகளின் இடையே கிடைக்கிறது. ஈடுசெய் சுருள் ஒன்று (compensating winding) கிடை அச்சுச் சுருளுடன் தொடர் இணைப்புண்டு இருக்கிறது. [படம் 1.18]

ஆம்பிளிடைனின் மின்னகத் தண்டு (armature shaft) சீரான வேகத்தில் முதல் இயக்கி ஒன்றால் சுழற்றப்படுகிறது என்க. ஆள் சுருளுக்கு ஒரு சிறிய மின் அழுத்தம் தரப்படுகிறது. இதுவே ஊட்ட அறிகுறி ஆகும். இம்மின் அழுத்தத்தால் ஏற்படும் மின் ஓட்டம் வலிமை குறைந்த ஒரு மின்காந்தப் புலத்தைத் தோற்று விக்கிறது. இதனால் நிலையச்சுச் சுருளில் சிறிய மின் அழுத்தம் தூண்டப்படுகிறது. குறுக்கு இணைப்பால் இது அதிக மின்னோட் டத்தைச் சுருளில் உண்டாக்குகிறது. இதன் விளைவாகப் பலத்த காந்தப் புலம் ஒன்று தோன்றுகிறது. இது கிடையச்சுச் சுருளில் மிகப் பெரியதொரு மின் அழுத்தத்தை விளைவிக்கிறது. ஈடுசெய் சுருளால் தான்றும் காந்தப் புலம் மின்னக எதிர் வினையை (armature reaction) ஈடு செய்கிறது.

படம் 1.18 ஆம்பிளிடைன்

1. ஆள் சுருள்
2. பின்னூட்டுச் சுருள்
3. கிடை அச்சுத் தொடுவை
4. நிலை அச்சுத் தொடுவை
5. ஈடுசெய் சுருள்

ω: முதல் இயக்கியின் சுழல் வேகம்
V_e: ஆள் சுருள் மின் அழுத்தம்
V_f: பின்னூட்டு மின் அழுத்தம்
V: ஈட்ட மின் அழுத்தம்

3. நீர்மத் திறன் பெருக்கி (Hydraulic amplifier)

மிகை அழுத்த நீர்ம ஆற்றலால் இயங்கும் நீர்மத் திறன் பெருக்கி, சிறிய திறனைக் கொண்டு பெரும் சுமைகளையும் நகர்த்த உதவுகிறது.

இதில் ஓரதர் உருளை (valve cylinder), திறன் உருளை (power cylinder) என இரு பகுதிகள் இருக்கின்றன. அவை இரு இணைப்புக் குழாய்களால் தொடர்பு கொண்டு இருக்கின்றன. ஓரதர் உருளையில் மேலும் மூன்று துளைகள் உள்ளன. மையத் துளையின் வழி மிகை அழுத்த நீர்மம் உள் வருகிறது; ஓரத் துளைகளின் வழி வெளிச் செல்கிறது.

ஓரதர்த் தண்டில் உள்ள இரு வில்லைகள், திறன் உருளைக்குச் செல்லும் வழிகளை அடைத்துள்ளன. திறன் உருளையில் உள்ள இயக்கு வில்லைத்தண்டு (power piston rod) சுமையுடன் (load) இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. (படம் 1.19)

1. ஊட்டம்
2. மிகை அழுத்த நீர்மம்
3. ஓரதர் உருளை
4. திறன் உருளை
5. சுமை

படம் 1.19 நீர்மத் திறன் பெருக்கி

ஓரதர்த் தண்டை (valve spindle) முன் நோக்கி நகர்த்தினல், ஓரதர் உருளையின் நடுப்பகுதியில் அடைந்துள்ள மிகை அழுத்த நீர்மம் வலது துளையின் வழியாகத் திறன் உருளைக்குள் நுழைந்து, இயக்க வில்லையைப் பின் நோக்கித் தள்ளுகிறது. சுமையும் அதனுடன் பின் நகர்கிறது.

பெரும் சுமையை நகர்த்துவது மிகை அழுத்த நீர்ம ஆற்றலே. ஓரதரைக் கொண்டு இவ்ஆற்றலைக் கட்டுப்படுத்துகிறோம். ஓரதரை நகர்த்தும் சிறிய திறனைக் கொண்டு, வேற்றுச் சக்தியின் உதவியால், பெரும் சுமையை நகர்த்தத் தேவையான பெருமளவு திறனை ஈட்டமாகப் பெறுவதால், இது 'நீர்மத் திறன் பெருக்கி' என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: மேலே விளக்கப்பட்ட நீர்மத் திறன் பெருக்கியை, நீர்ம இயல் அடிமை இயக்கியாகவும் (hydraulic servomotor) கொள்ளலாம்.

1·2.4 அடிமை இயக்கிகள் (Servomotors)

1. நேர்மின் இயக்கி (DC motor)

அமைப்பில் நேர்மின் ஆக்கியை ஒத்தது நேர்மின் இயக்கி. மின்னகச் சுருளுக்கும், காந்தச் சுருளுக்கும் நேர்மின் அழுத்தத்தைக் கொடுத்தால், இரு காந்தப் புலங்கள் தோன்றுகின்றன. இவற்றின் எதிர் வினையால் (mutual reaction) விளையும் திருப்பு விசை (torque), மின்னகத் தண்டைச் சுழற்றுகிறது.

காந்தச் சுருள் மின்னோட்டம், மின்னகச் சுருள் மின்னோட்டம் இவற்றின் அளவிற்கு ஏற்பத் திருப்புவிசை மாறுகிறது. எனவே, இவ் இரு மின்னோட்டங்களுள் ஒன்றை மட்டும் மாற்றித் திருப்பு விசையையும் (torque), சுழல் வேகத்தையும் (rotational speed) கட்டுப்படுத்தலாம்.

திருப்புவிசை உறவுகள்: $\boxed{T \propto \Phi\, I_a}$ 1.5

பின் அழுத்தம் $E_b \propto \phi\omega$ 1.6

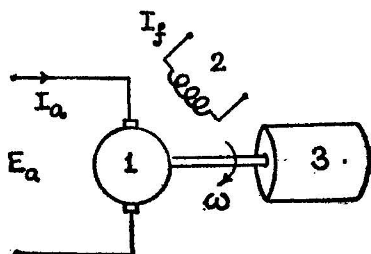
Φ மாறிலி எனில், $E_b = K_b\, \omega$ 1.7

ஊட்டமின் அழுத்தம் $\boxed{V = E_b + R_a\, I_a}$ 1.8

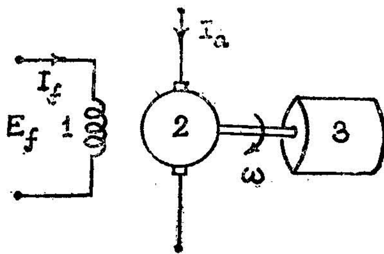
மின்னகக் கட்டுப்பாட்டு இயக்கி (Armature controlled motor): இதில் காந்தச்சுருள் மின்னோட்டம் மாருது வைக்கப்படும்.

எனவே, 'திருப்புவிசையும் வேகமும் மின்னகச்சுருள் மின்னோட்டத்தைப் பொறுத்து மாறும்.' [படம் 1.20]

காந்தப் புலக் கட்டுப்பாட்டு இயக்கி (field controlled motor): இதில் மின்னகச்சுருள் மின்னோட்டம் மாறுது வைக்கப்படும். எனவே, திருப்புவிசையும் வேகமும் காந்தச்சுருள் மின்னோட்டத்தைப் பொறுத்து மாறும் (படம் 1.21).



படம் 1.20 மின்னகக் கட்டுப்பாட்டு இயக்கி



படம் 1.21 காந்தப் புலக் கட்டுப்பாட்டு இயக்கி

1. மின்னகம்	E_a : ஊட்டம்	1. காந்தச் சுருள்	E_f: ஊட்டம்
2. காந்தச் சுருள்	ω : ஈட்டம்	2. மின்அகம்	ω : ஈட்டம்
3. சுமை	I_f : மாறு மின் ஓட்டம்	3. சுமை	I_a : மாறு மின் ஓட்டம்

2. மாறுமின் அடிமை இயக்கி (AC servo motor)

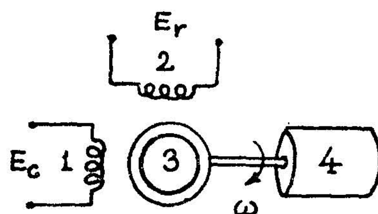
இருபருவத் தூண்டு மின் இயக்கியே (Two phase induction motor) 'மாறுமின் அடிமை இயக்கி'யாகப் (AC servomotor) பயன்படுத்தப் படுகிறது.

இதன் நிலைப் பகுதியில் (stator), ஆதாரச் சுருள் (reference winding), ஆள் சுருள் (control winding) என இரு மின்சுருள்கள் ஒன்றற்கொன்று 90 பாகையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. (படம் 1.22).

சுழற்பகுதி, உருளை (cylinder), அணிற் கூண்டு (squirrel cage), இழுவைக் குப்பி (drag cup) இவற்றுள் ஏதாவது ஒரு வடிவினது.

90 பாகைப் பருவ வேறுபாடு உடைய இரு மாறுமின் அழுத்தங்களை ஆள் சுருளுக்கும், ஆதாரச் சுருளுக்கும் செலுத்தினால், ஒரு சுழற் காந்தப் புலம் (rotating magnetic field) உண்டாகி அதனால் திருப்பு விசைத் திறன் (torque) ஏற்படுகிறது. சுழற் பகுதியின் தண்டும் சுழல்கிறது.

ஆதாரச் சுருளின் மாறுமின் அழுத்த வீச்சை (amplitude) மாறுது இருக்கச் செய்தால், இயக்கியின் திருப்புவிசையும் வேகமும் ஆள்சுருளின் மின் அழுத்த வீச்சைப் பொறுத்து மாறு கின்றன. ஏதாவது ஒரு சுருளின் மின் அழுத்தப் பருவக கோணத்தை 180° மாற்றினுல், சுழல் திசையும் மாறும்.



படம் 1.22 மாறுமின் அடிமை இயக்கி
1. ஆள் சுருள் 3. சுழற் பகுதி
2. ஆதாரச் சுருள் 4. சுமை
ω : சுழல்வேகம்

1·2.5 பின்னூட்டுக்கூறும், பிறவும்: (Feedback element & others)

1. வேகமின் ஆக்கி (Tachogenerator)

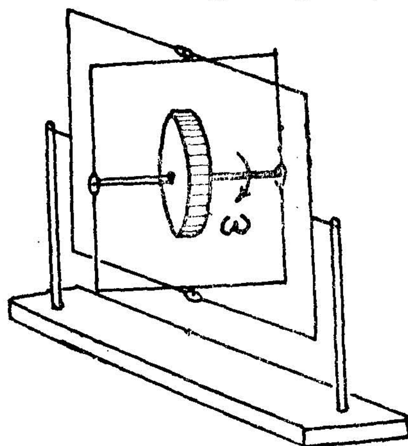
தண்டின் சுழல் வேகத்திற்கு ஏற்ப ஒரு மின் அழுத்தத்தைத் தோற்றுவிக்கும் சிறியதொரு மின் ஆக்கியே 'வேகமின் ஆக்கி' எனப்படும். இது நேர்வேக மின்ஆக்கி, மாறுவேக மின்னுக்கி என இருவகைப்படும்.

நேர்வேக மின்ஆக்கி (DC Tachogenerator): இது ஒரு சிறிய, நிலைக் காந்தப் புல (permanent magnetic field) நேர்மின் ஆக்கி ஆகும். காந்தத் தாரை (magnetic flux) மாறுது இருப்பதால், மின்னக மின் அழுத்தம், சுழல் வேகத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கிறது.

மாறுவேக மின்ஆக்கி (AC Tachogenerator): மாறுமின் அடிமை இயக்கியின் அமைப்பை உடைய இம் மின்ஆக்கியில் சுழற்பகுதி இழுவைக்குப்பி (drag cup) வகையினது. இதன் ஆதாரச் சுருளுக்கு ஒரு மாறுமின் அழுத்தத்தைக் கொடுத்து விட்டு, தண்டைச் சுழற்றினுல், சுழல்வேகத்திற்கு ஏற்ப, ஆள் சுருளில் ஒரு மாறுமின் அழுத்தம் தோன்றுகிறது.

2. ஜைரோ (Gyro): அதி வேகமாகச் சுழலும் கனமான ஆழி (wheel) ஒன்றை, எத்திசையிலும் தடைஇன்றித் திருப்புமாறு

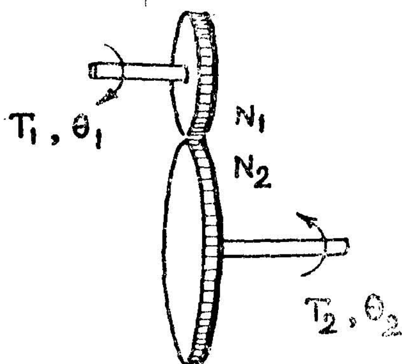
தாங்கிச் சட்டங்களின் கூட்டில் (frame work of girdels) அமைத்திருப்பது 'ஜைரோ' என்னும் கருவியாகும். (படம் 1.23)



படம் 1.23 "ஜைரோ" (Gyro)

பொதுவாக விண்கலங்களின் இயக்கங்கள், விரும்பும் அளவுகளில் இருந்து எவ்வளவு மாறுகின்றன என்று கணிக்க 'ஜைரோ' உதவுகிறது.

3. பல்லிணை (Gear): பல்லிணைகள் பொதுவாக வேகத்தைக் குறைக்கவும், திருப்பு விசையைப் பெருக்கவும், திசை மாற்றவும் பயன்படுகின்றன. பல்லிணைகளில் திருப்புவிசை T, சுழல் வேகம் ω, திருப்பம் θ, பற்களின் எண்ணிக்கை N என்க. படத்திற் [படம் 1.24] காணும் ஆழி 1, ஆழி 2 இவற்றின் செயல் உறவு வருமாறு :



படம் 1.24 பல் இணை

T_1, T_2 : திருப்பு விசை

N_1, N_2 : பற்களின் எண்ணிக்கை

θ_1, θ_2 : திருப்பம்

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2}} \quad \dots \quad 1.9$$

$$T_1\,\omega_1 = T_2\,\omega_2$$

எனவே, வேகம் குறையக் குறைய திருப்புவிசை அதிகமாகிறது.

4. ஈடு செய்வி (Compensator): ஊட்டத்திற்கும்,

ஈட்டத்திற்கும் உள்ள பெருக்கல் உறவு எண்ணேயோ, காலத் தாழ்வையோ, பருவப் பெயர்ச்சியையோ தக்கவாறு ஏற்றவும் குறைக்கவும் வழிசெய்வது ஈடுசெய்வி. இது மின்இயல், பாய்மஇயல் போன்ற பல்வகை இயல்களிலும் உண்டு. மின் வலேகள், ஈடு செய்விகளாகப் பெரும் அளவில் பயன்படுகின்றன.

1.3 ஆள்குலைவ ஆய்வு (Control System analysis)

1.3.1 ஆய்வுக்கு அறிமுகம்:

மீண்டும் சுழற்பீரங்கித் திருப்ப ஆள்குலைவையே எடுத்துக் காட்டாகக் கொள்வோம். (பகுதி 1.1.1). இத்தகைய ஆள் குலைவ ஒன்றை ஆக்குவது (design) நமது குறிக்கோள்.

பீரங்கி மேடை, பல்லிணே, மின்இயக்கி, மின்ஆக்கி, மின் பிரித்திகள் இவை உள்ளன எனில், திறன்தேவைக்கு ஏற்ப இவ் உறுப்புகளேத் தேர்ந்தெடுத்து, அவற்றைச் சீராக இணைத்து, ஆள்குலைவயாக்கி, அது திறம்பட இயங்குகின்றதா என்று சோதனைசெய்து, தேவையான மாற்றங்களேப் புகுத்தலாம். இதற்குப் பணமும், காலமும் அதிகம் செலவாகும். இது பிழைத் திருந்தல் (trial & error) முறை ஆகும்.

இரண்டாவது முறையில், ஒவ்வொரு உறுப்பின் செயலேயும் கணிதச் சமன்பாடு ஒன்ருல் குறித்து, ஏற்றவாறு அவற்றை இணைத்து ஆள்குலைவயின் முழுச் செயற் சமன்பாட்டை (overall performance equation) எழுதி, அதைத் தீர்ப்பதன் வழி, ஆள்குலைவ எவ்வாறு இயங்கும் என அறியலாம். பிறகு தேவையான மாற்றங்களேக் கணிதச் சமன்பாட்டிலேயே செய்து, அவற்றின் விளேவைச் சரி பார்த்தபின் தக்க உறுப்புகளே இணைத்து ஆள் குலைவயை உருவாக்கலாம். இதுவே பகுப்பாய்வு (analysis) முறையாகும்.

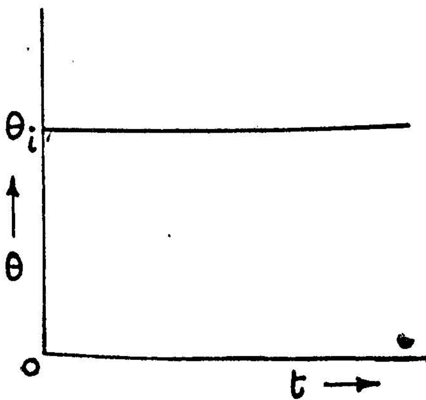
இதில் இருந்து பகுப்பாய்வின் சிறப்பையும், அவசியத்தையும் உணரலாம். கொடுக்கப்படும் குலைவயைப் பகுதி பகுதியாகப் பிரித்து அதன் செயல் முறையை அறிவதே 'பகுப்பாய்வு'.

பகுப்பாய்வு முறையின் பல படிகளே இந்நூல் முழுதும் பரக்கக் காணலாம். அறிகுறிகளே அறிதல், உருவியல் மாதிரிகளே வரைதல், பொறி இயற் புனேவுகளேக் கொள்ளல், அவற்றின் வழி செயற் சமன்பாடுகளே எழுதல், அச்சமன்பாடுகளேத் தீர்த்தல், தீர்வுகளின் வாயிலாக ஆய்குலைவகளின் செயற்பாட்டை அறிதல் ஆகிய இப்படிகளே ஒன்றன் பின் ஒன்ருகக் காண்போம்.

1·3.2 அறிகுறிகள் (Signals)

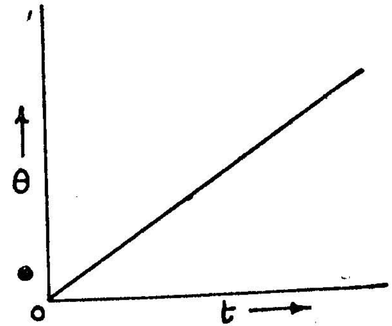
சுழற் பீரங்கித் திருப்ப ஆள்குவை எவ்வகை ஊட்ட அறிகுறிகளைத் தொடர்ந்து, செயற்படவேண்டும்?

மாற்றார் விமானம் ஒன்றைப் பார்வையில் பற்ற, திடீரென்று தொலை நோக்கியைத் திருப்பவேண்டி வரும். இதை ஆள்குவை ஒரு படி ஊட்டமாகக் (step input) காண்கிறது. ஏனெனில் தொலை நோக்கியின் திருப்பக் கோணத்தை (θ_i), காலத்தின் (t) சார்பாக வரைந்தால் படிக்கட்டுப் படி போன்ற உருவைப் பெறுகிறது. (படம் 1.25).



படம் 1.25 படி ஊட்டம்

θ : திருப்பம்
t : நேரம்
θ^i : மாறு ஊட்டத் திருப்பம்

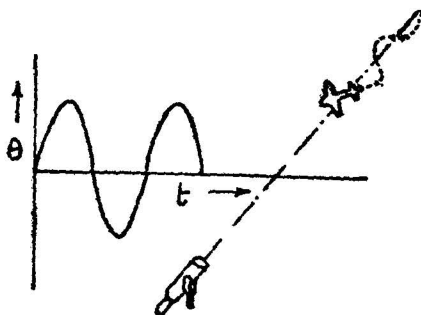


படம் 1.26 நேர் வளர் ஊட்டம்

θ : திருப்பம்
t : நேரம்

விமானத்தைப் பார்வையில் பற்றிய பின்னும், அதன் இயக்கத்தைத் தொடர்ந்து தொலை நோக்கியையும் திருப்பிக் கொண்டே இருந்தால்தான், பீரங்கியால் தக்க சமயத்தில் சுட இயலும். இதை ஒரு வேக ஊட்டம் அல்லது நேர்வளர் ஊட்டமாக (ramp input) ஆள்குவை காண்கிறது. [படம் 1.26]

பீரங்கியின் குறியில் இருந்து தப்ப, விமானம் அங்கும் இங்குமாக வளைபாதையில் செல்கையில், அதற்கு ஏற்பத் தொலை நோக்கியும் இடமும் வலமுமாகத் திரும்பிக்கொண்டே இருந்தால் குறிபார்க்க இயலும். இது ஓர் அலைவு ஊட்டமாகப் (oscillatory input) பார்க்கப் படுகிறது (படம் 1.27).



படம் 1.27 அலைவு ஊட்டம்

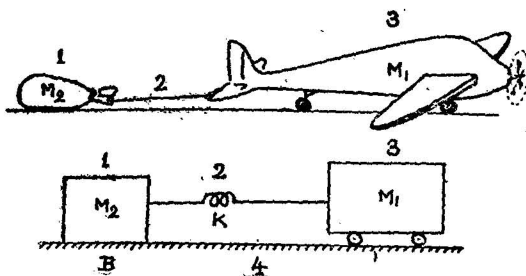
θ : திருப்பம் t : நேரம்

இவ்வாறு பலவகை ஊட்டங்களுக்கும், ஆள்குவை நல்லமுறையில் செயற்பட வேண்டும். இதுபோல் இன்னும் சில அறிகுறிகளையும் அடுத்த அத்தியாயத்தில் காணலாம்.

1.3.3 உருவியல் மாதிரிகள் : (Physical models)

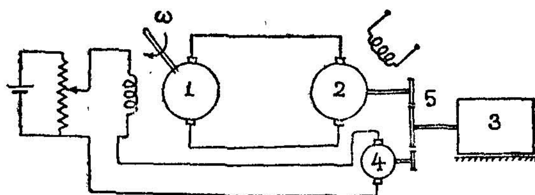
விரும்பும் ஆள்குவையின் அமைப்பை அறிந்து, கூடியவரையில் அது போலவே இயங்கும் ஒரு எளிய உருவியல் மாதிரியை நிறுவுதல் பகுப்பாய்விற்குப் பெரிதும் துணை புரியும்.

இரு எடுத்துக் காட்டுகளைக் கீழே காண்க. (படம் 1.28, படம் 1.29). இரண்டாவது, முன்கண்ட அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள்குவையின் (படம் 1.13) மாதிரி.



படம் 1.28 கப்பல் தளத்தில் விமானத்தை இறக்கி நிறுத்தல்

1. மணல்மூட்டை	M2 : மணல்மூட்டை (பொருண்மை)
2. கயிறு	K : கயிறு (மீள்விசை)
3. விமானம்	M1 : விமானம் (பொருண்மை)
4. கப்பல் தளம்	B : கப்பல் தள உராய்தடை



படம் 1.29 அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள்குவை - மாதிரி

1. மின் ஆக்கி
2. மின் இயக்கி
3. சுமை
4. வேக மின் ஆக்கி
5. பல்இணைத் தொடர்

முதற் படத்தில் (படம் 1.28) விமானம் தாங்கிக் கப்பல் களில், இறங்கிவரும் விமானங்களை விரைவில் நிறுத்த உதவும் பழைய முறை ஒன்று காட்டப்பட்டுள்ளது. விமானத்தில் உள்ள ஒரு கொக்கி, மணல் மூட்டையைக் கட்டியுள்ள கயிற்றில் மாட்டிக் கொண்டு அதையும் இழுத்துச் செல்லும். இதனால் வேகம் விரை வில் குறைந்து விமானம் தளத்தில் நிற்கும்.

இதன் உருவியல் மாதிரியில், தடையிலா உருளைகளின்மேல் நகரும் ஒரு பொருண்மைக் கூறாக (M_1) விமானமும், தளத்தில் உராய்ந்து செல்லும் மற்றொரு பொருண்மைக் கூறாக (M_2) மணல் மூட்டையும் காட்டப் பட்டுள்ளன. இணைப்புக்கயிறு மீள்சக்தி உடைய ஒரு சுருள் வில்லாகக் காணப்படுகிறது. முன் தள்ளியின் (propeller) உந்து விசை ஒன்றே இவ் இயந்திரக் குவையில் உள்ள ஒரே மாறியாகக் கொள்ளப்படுகிறது. எதிர்க் காற்று விசை போன்ற இடர் ஊட்டங்கள் விடப்பட்டுள்ளன. இதனால் ஆய்வு எளிதாகிறது.

இரண்டாம் படத்தில் [படம் 1.29] அலைவாங்கியும் அதன் மேடையும் ஒரு உராய் தடையுடன் சுழலும் நிலைமத் திருப்பு விசைக் கூறாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன. மற்றும் பிரித்தி, நேர்மின் ஆக்கி, இயக்கி, வேகமின் ஆக்கி இவைகளும் எளிமையாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

1.3.4 பொறி இயல் எளி புனைவுகள் : (Engineering approximations)

ஆழ்ந்த பொறி இயல் அநுபவ வாயிலாக ஏற்கப்படும் சில தற் புனைவுகளும், தோராய மதிப்புக்களும் ஆள்குவைப் பகுப் பாய்வைப் பெரிதும் எளிமைப் படுத்துகின்றன.

இவற்றுள் ஒன்றிரண்டை முன்பகுதியில் உருவியல் மாதிரியை வரையும்பொழுது கண்டோம். இங்கு பயனுடை எளி புனைவுகள் (useful approximations) அனைத்தையும் வரிசைப் படுத்தி அவற்றின் இயல்புகளை விளக்குவோம்.

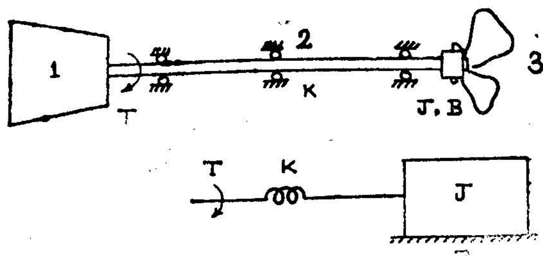
1. சிறிய விளைவுகளை விடுத்தல். **(Neglecting small effects)**

எந்த தடைக் கூறிலும், சிறிது தூண்டற் பண்பும் (inductance effect) இருக்கும். மின் தேக்கியில் சிறிது தடையும் இருக்கும். எந்த மின் காந்த உறுப்பிலும் பூமியின் காந்தப் புலம் சிறிய எதிர் வினை புரியும். இது போன்று இன்னும் பல சிறிய விளைவுகள் பொறி இயல் துறையெங்கும் பரந்துள்ளன. இவைகளை விட்டு விடுவதன் வழி சிக்கலான செயற்சமன்பாடுகள் எளிமை ஆகின்றன.

2. படர் இயல்பைக் குவி இயல்பாய்க் கொள்ளல் **(Replacing distributed characteristics by lumped characteristics)**

மின் செலுத்திக் கம்பிகளில் (transmission lines) மின்தடை, தூண்டம், தேக்கம் இவை பரவலாக இருக்கின்றன. இவை நடுவிலோ, ஓரங்களிலோ குவிந்து இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகின்றன.

கப்பல்களில், நீராவிச் சுழலியில் இருந்து திருப்பு விசை ஒரு நீண்ட தண்டின் வழியாக முன் தள்ளிக்குச் செலுத்தப்படுகிறது. இவ் அமைப்பில் பரவியுள்ள உராய்தடை, முறுக்கம், நிலைமத் திருப்பு விசை இவை குவி கூறுகளாக (lumped elements) எடுத்துக் கொள்ளப் படுகின்றன. இதைப் படம் 1.30 -இல் காணலாம்.



படம் 1.30 கப்பலின் முன் தள்ளி இயக்கம் — உண்மை உருவும், குவி உருவும்

1. நீராவிச் சுழலி	T: திருப்புவிசை
2. தண்டு	K: முறுக்கம்
3. முன் தள்ளி	J: நிலைமத் திருப்பு விசை
	B: உராய் தடை

இவ்வாறு படர் இயல்பைக் குவி இயல்பாய்க் கொள்வதால் செயற் சமன்பாடுகள் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக (partial differential equations) இராமல் எளிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளாக (ordinary differential equations) இருக்கும் எனவே தீர்வு எளிதாகும்.

3. நேர் உறவு (Linearity)

உருவியல் உலகில் (physical world) எச்செயலிலும் நேர் உறவைக் காணல் அரிது. இருப்பினும் பல இடங்களில், (தடைக் கூறில் மின் அழுத்தத்தால் தோன்றும் மின்னோட்டம், இயந்திர இயக்கத்தில் விசைக்கு ஏற்ப மாறும் முடுக்கம், அனைய பிற) நேர் உறவைத் தற்புனைவாகக் கொள்வதால், விளைவுகள் அதிகம் மாறுவது இல்லை; தவிர ஆய்வும் எளிதாகிறது. இவ் எளிமைப் படி (simplification step), நேர் உறவு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் (linear differential equations) தருகிறது.

4. மாறிலா அளவைகள் (Constant parameters)

மின் தடை, உராய்வு, பொருண்மை இவை போன்ற அளவைகள் காலத்தால் மாறுவன என்றால் செயற்சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் எளிதல்ல. மின் குவைகளின் செயல்புரி நேரம் அதிகமானால் சூடேறும்; அதனால் மின்தடை கூடும். படம் 1.28 -ல் காட்டப்பட்டுள்ள இயந்திரக் குவையில் எரிபொருளின் அளவு குறையக் குறைய விமானத்தின் எடையும் (M_1) குறையும்.

இம் மாற்றங்களை விடுத்து, தடை, பொருண்மை போன்ற அளவைகளை மாறிலிகளாகக் (constants) கொண்டால், செயற் சமன்பாட்டின் உறுப்புக் கெழுக்களும் மாறிலிகளாக இருக்கும். இதனால் தீர்வு காணல் எளிதாகும்.

5. நிச்சயமின்மை, இடரொலி இவற்றை விடுத்தல் (Neglecting uncertainty and noise)

ஆள்குவையின் எவ் உறுப்பும் எப்பொழுதும் எந்நிலையிலும் ஒரே விதமாகச் செயற்படும் என்று கூற இயலாது. இதுவே 'நிச்சயமின்மை' எனப்படும். பீரங்கித் திருப்ப ஆள்குவையில் எதிர்க்காற்றின் விசையும், வெப்பநிலை ஒழுங்கமை குவையில் சூழலின் வெப்ப நிலை மாற்றமும் இடர் ஊட்டங்கள். இதுபோல் ஆய்குவையின் உறுப்புகளுள் தோன்றுவன இடரொலிகள் (noise).

ஆய்குவையின் செயலைக் கணிக்கையில் நிச்சயமின்மையும் இடரொலியும் எண்மானமுறைப் (statistical method) பகுப்பாய்

வைக் கையாள வைக்கின்றன. இவற்றின் விளைவை ஒதுக்கி விட்டால் எளிய கணிப்பு முறைப் (deterministic method) பகுப்பாய்வு போதும்.

1·3.5 ஆள் குலை ஆக்கப் படிகள் : **(Control system design steps)**

இந்நாள் ஆள்குலைகளின் ஆக்கப் பணியில் வரும் பல்வேறு படிகளைப் பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்.

(1) ஆக்க விரும்பும் ஆள்குலையின் செயற் தேவைகள், அமைப்பு இவற்றிற்கு ஏற்ப, ஓர் உருவியல் மாதிரியைப் (physical model) புனைதல். இதற்கு ஆழ்ந்த அநுபவமும், தேர்ந்த பொறி இயல் தற்புனைவுகளும் உதவுகின்றன.

(2) இவ்வாறு கிடைக்கும் உருவியல் மாதிரியின் செயலை விளக்க ஒரு செயற் சமன்பாடு எழுதல். இதுவே ஆள்குலையின் கணித மாதிரி (mathematical model) ஆகும். இதற்கு மாறிகளும், அவற்றின் இடை உறவுகளும் பற்றிய அறிவு அவசியம். உறுப்பு களின் செயற்பாடுகளைத் தக்கவாறு இணைக்க ஆள்குலையின் முழுச் செயற் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

(3) எளிய, கால மாறிலி, நேர் உறவு, வகைக்கெழுச் சமன் பாடாக (ordinary, time invariant, linear differential equation) வரும் செயற்சமன்பாட்டை இலாப்லாசு மாற்ற முறையில் (Laplace transform method) தீர்த்தல்.

தீர்வுப் படங்களின் வாயிலாக ஆள்குலையின் செயலை அறிய இயலும்.

(4) ஆள்குலை மாதிரியின் செயலை அறிந்து, அதன் குறை களை ஈடு செய்யத் தேவையான மாற்றங்கள் புரிந்து, அதை விரும்பிய வண்ணம் இயங்கச் செய்தல்.

இறுதியில், இவ் எழுத்துமுறை ஆக்கத்திற்கு உருவம் கொடுத்து, ஆள்குலையைப் புனைதல்.

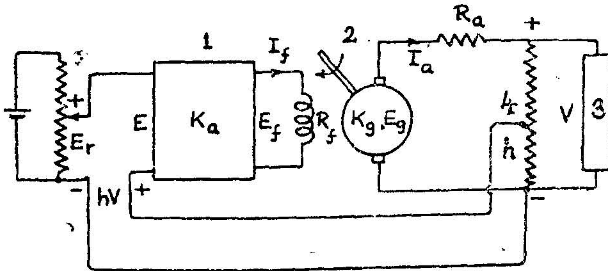
மேற்கண்ட பல்வேறு படிகளின் விளக்கங்களையும் தரு வனவே அடுத்து வரும் அத்தியாயங்கள்.

மாதிரி வினா 1.6

ஒரு குளிர்ப் பெட்டி (refrigerator) சரிவர இயங்கச் சீரான மின் அழுத்தம் தேவை. இதற்கான மின்னழுத்த ஒழுங்கமை

குவை (voltage regulator) ஒன்றின் உருவியல் மாதிரி கீழே தரப்பட்டுள்ளது (படம் 1.31).

இது தொடர்ந்து சீராக இயங்கும்போது, மின் ஆக்கி 10A மின் ஓட்டத்தை, 200 V மின் அழுத்தத்தில் குளிர்ப் பெட்டிக்குச் செலுத்துகிறது. அப்பொழுது காந்தச் சுருள் மின் ஓட்டம் 1.05A. மின் அழுத்தப் பெருக்கியின் பெருக்க எண் $K_a = 10$ V/V. பின்னூட்ட விகிதம் $h = 0.1$. மின்னகத் தடை $R_a = 1$ ஓம் காந்தச் சுருள் தடை $R_f = 100$ ஓம்.



படம் 1.31 மின் அழுத்த ஒழுங்கமை குவை — உருவியல் மாதிரி

1. பெருக்கி
2. மின் ஆக்கி
3. சுமை (குளிர்ப்பெட்டி)
4. பின்னூட்டு மின் பிரித்தி

E_r : ஆதார மின் அழுத்தம்
E : வழு மின் அழுத்தம்
E_f : காந்தச் சுருள் மின் அழுத்தம்
E_g : தூண்டிய மின் அழுத்தம்
V : ஈட்ட மின் அழுத்தம்

இச்செய்திகளைக் கொண்டு, ஆதார மின் அழுத்தம் (reference voltage), மின் அழுத்த ஒழுங்கெண் (voltage regulation) இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

பெருக்க எண் K_a, மின்னூட்ட விகிதம் h இவை மின்அழுத்த ஒழுங்கெண்ணை எவ்வாறு மாற்றுகின்றன என்பதை விளக்குக.

தீர்வு :

இவ் ஒழுங்கமை குவை தொடர்ந்து சீராக இயங்கும்போது பின்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம் :

$$V = E_g - R_a I_a$$
$$E_g = K_g I_f$$
$$E_f = R_f I_f$$
$$E_f = K_a E$$
$$E = E_r - hV$$

[குவை தொடர்ந்து சீராக இயங்கும்பொழுது $L_f \frac{di_f}{dt} = 0$]

இவைகளை ஒன்றுய் இணைக்க, குலையின் செயற் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$V = \frac{K_a K_g}{R_f} E - R_a I_a$$

$$= \frac{K_a K_g}{R^f} (E_r - hV) - R_a I_a$$

$$V \left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f} \right) = \frac{K_a K_g}{R_f} E_r - R_a I_a$$

எனவே,
$$\boxed{V = \frac{\frac{K_a K_g}{R_f} E_r - R_a I_a}{\left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f} \right)}} \quad \ldots (1)$$

1. ஆதார மின் அழுத்தம் **(Reference voltage)**

$$K_g = \frac{E_g}{I_f} = \frac{V + R_a I_a}{I_f}$$

$$= \frac{200 + 1 \times 10}{1.05} = 200 \text{ V/A}$$

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து,

$$200 = \frac{\frac{10 \times 200}{100} E_r - 1 \times 10}{1 + \frac{0.1 \times 10 \times 200}{100}}$$

$$3 \times 200 = 20 E_r - 10$$

எனவே, $E_r = \frac{610}{20} = 30.5 \text{ V}$

2. மின் அழுத்த ஒழுங்கெண் **(Voltage regulation)**

சுமை மாற்றத்தால் ஏற்படும் மின் அழுத்த வேறுபாட்டைக் குறிப்பதே மின் அழுத்த ஒழுங்கெண் ஆகும்.

$$\text{மின் அழுத்த ஒழுங்கெண்} = \frac{\text{சுமை இலா மின் அழுத்தம்} - \text{சுமை மின் அழுத்தம்}}{\text{சுமை மின் அழுத்தம்}}$$

அதாவது, $R = \frac{V_o - V}{V}$

சுமை மின் அழுத்தத்தால் ஆதார மின் அழுத்தம் மாறுவது இல்லை. ($\triangle E_r = 0$). சுமை மின்னேட்ட மாற்றம் $\triangle I_a$, சுமை மின் அழுத்த மாற்றம் $\triangle V$ என்க.

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து,

$$-\triangle V^* = \frac{\frac{K_a K_g}{R_f} \triangle E_r - R \quad \triangle_a}{\left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f}\right)}$$

$$\triangle V = \frac{R_a}{\left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f}\right)} \triangle I_a$$

$$\boxed{R = \frac{\triangle V}{V} = \frac{R_a}{\left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f}\right)} \frac{\triangle I}{V}}$$

$$R = \frac{1}{\left(1 + \frac{0.1 \times 10 \times 200}{100}\right)} \cdot \frac{10}{200}$$

$$= 1.67 \times 10^{-2} \text{ அல்லது } R = 1.67\%$$

3. K_a, h இவற்றின் விளைவுகள்

$$R = \frac{R_a}{\left(1 + \frac{h K_a K_g}{R_f}\right)} \cdot \frac{\triangle I_a}{V}$$

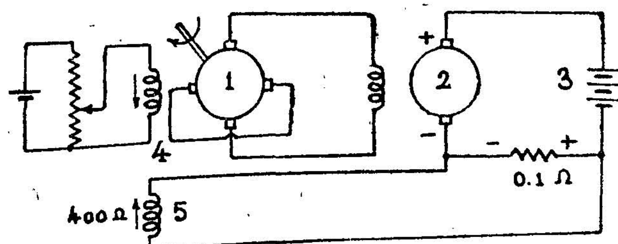
h, K_a இரண்டிற்கும் R எதிர் விகித சமத்தில் இருக்கிறது. எனவே, K_a, h இவற்றை அதிகப்படுத்துவதன் வழி, மின் அழுத்த ஒழுங்கு எண்ணைக் குறைக்கலாம். அதாவது, சுமை மின்னழுத்த வேறுபாட்டைக் குறைக்கலாம்.

* குறிப்பு : சுமை மின்னேட்டம் அதிகமானல் ($I_a + \triangle I_a$), சுமை மின் அழுத்தம் குறைகிறது ($V - \triangle V$). எனவே எதிர்க் குறியீடு.

மாதிரி வினு 1.7

ஒரு தேக்கு மின் கலத்திற்கு (storage battery) மின்னேற்ற (charge) உதவும் குலை ஒன்றின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. (படம் 1.32)

ஆள் சுருள் (control winding). பின்னூட்டுச் சுருள் இவற்றில் பாயும் மின்னோட்ட வேறுபாட்டிற்கு ஏற்ப ஆம்பிளிடைன் (amplidyne) ஈட்ட மின்னோட்டத்தைத் தருகிறது. ஆம்பிளிடைனின் மின்னோட்டப் பெருக்க வெண் (current gain) 200. உடன் இணைக்கப் பட்ட மின் ஆக்கி 1 ஆம்பியர் காந்தச் சுருள் மின்னோட்டத்திற்கு 120 V மின் அழுத்தத்தைத் தருகிறது. அதன் மின்னக மின் தடை (armature resistance) 0.1ஓம். மின் கலத்தின் உள் மின்தடை 0.2 ஓம்.



படம் 1.32 மின்கல மின் ஏற்ற ஆள்குவை

1. ஆம்பிளிடைன்
2. மின் ஆக்கி
3. மின் கலம்
4. ஆம்பிளிடைன் - ஆள் சுருள்
5. ஆம்பிளிடைன் - பின் னூட்டுச்சுருள்

(அ) மின்னேற்ற வீதம் (rate) 20 ஆம்பியர் என்றும், தொடக்கத்தில் மின்கலஅழுத்தம் 100 ஒல்ட்டு என்றும் கொண்டால், ஆம்பிளிடைன் ஆள்சுருளில் மின்னோட்டம் எவ்வளவு என்று கணிக்க.

(ஆ) முழுதும் மின் ஏற்றிய மின்கலத்தின் அழுத்தம் 115 ஒல்ட்டு எனில், மின்னேற்றிய நேரத்தில் மொத்த மின்னோட்ட மாறுதல் எவ்வளவு?

தீர்வு : (அ)

ஆள் சுருளின் மின்னோட்டம் : x மில்லிஆம்பியர் என்க.

$$\text{பின்னூட்டுச் சுருளின் மின்னோட்டம்} = \frac{\text{பின்னூட்டு மின் அழுத்தம்}}{\text{சுருளின் மின்தடை}}$$

$$= \frac{20 \text{ ஆம்பியர்} \times 0.1 \text{ ஓம்}}{400 \text{ ஓம்}}$$

$$= 5 \times 10^{-3} \text{ ஆம்பியர்}$$

$$\text{ஆம்பிளிடைன் ஊட்ட மின்னோட்டம்} = (x - 5)10^{-3} \text{ ஆம்பியர்}$$

மின் ஆக்கியின் காந்தச் சுருள் மின்னோட்டம் $= 200 \times (x - 5)10^{-3}$ ஆம்பியர்

மின் ஆக்கியின் ஈட்ட மின் அழுத்தம் $= 120 \times 200 (x - 5)10^{-3}$ ஒல்ட்டு

$= 24 (x - 5)$ ஒல்ட்டு

மின் கலத்திற்குச் செலுத்தப்படும் மின்னோட்டம் $= \dfrac{24 (x - 5) - 100}{(0.1 + 0.2 + 0.1)}$

$= \dfrac{24x - 220}{0.4}$ ஆம்பியர்

இம்மின்னோட்டம் 20 ஆம்பியர் என்று கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. எனவே,

$$\frac{24x - 220}{0.4} = 20$$

அதாவது, $24x = 228$

$\therefore$ $x = 9.5$

ஆள் சுருளின் மின்னோட்டம் 9.5 மில்லி ஆம்பியர்.

(ஆ)

மொத்த மின்னோட்ட மாறுதல் y ஆம்பியர் என்க.

பின்னூட்டுச் சுருளின் மின்னோட்டம் $= \dfrac{(20+y) \times 0.1}{00}$ ஆம்பியர்

$= (5 + 0.25y)10^{-3}$,,

ஆள் சுருளின் மின்னோட்டம் $= 9.5 \times 10^{-}$,,

ஆம்பிளிடைன் ஊட்ட மின்னோட்டம் $= (9.5 - 5 - 0.25y)10^{-}$,,

$= (4.5 - 0.25y)10^{-3}$,,

மின் ஆக்கியின் ஈட்ட மின் அழுத்தம் $= 120 \times 200 \times (4.5 - 0.25y)10^{-3}$,,

$= (108 - 6y)$ ஒல்ட்டு

மின் கல மின்னோட்டம் $= \dfrac{(108 - 6y) - 115}{(0.1 + 0.2 + 0.1)}$

$= \dfrac{-(7 + 6y)}{0.4}$ ஆம்பியர்

எனவே, $\frac{-(7+6y)}{0.4} = 20+y$

அதாவது $6.4y = -15$ அல்லது $y = -2.34$.

எனவே, மொத்த மின்னோட்ட மாறுதல் — **2.34** ஆம்பியர்.

மாதிரி வினா 1.8

மாறாத காந்தச் சுருள் மின்னோட்டத்தை உடைய நேர் மின் இயக்கியில், திருப்புவிசை மாறிலி (torque constant) K_t, பின் மின் அழுத்த மாறிலி (back emf constant) K_b ஆகிய இரண்டும் ஒரே எண்மான மதிப்பை உடையன என நிறுவுக.

தீர்வு :

நேர் மின் இயக்கியில், காந்தச்சுருள் மின்னோட்டம் மாறாது இருந்தால், (i) தோற்றுவிக்கப்படும் திருப்புவிசை மின்னக மின்னோட்டத்திற்கு நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கும்.

$T \propto I_a$ அதாவது $T = K_t I_a$

இங்கு K_t : திருப்புவிசை மாறிலி(நியூட்டன்-மீட்டர்/ஆம்பியர்)

(ii) பின் மின் அழுத்தம், தண்டின் சுழல் வேகத்திற்கு நேர் விகிதப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கும்.

$E_b \propto \omega$ அதாவது $E_b = K_b \omega$

இங்கு K_b : பின் மின் அழுத்த மாறிலி (ஓல்ட்டு/ரேடியன்/நொடி)

தோற்றுவிக்கப்படும் இயந்திரத் திறன் = மாற்றப்படும் மின் திறன்

$$T\omega = E_b I_a$$

அதாவது, $K_t I_a \omega = K_b \omega I_a$

எனவே $K_t = K_b$

அதாவது, $K_t = 1.5 \frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ஆம்பியர்}}$ என்றால்,

$$K_b = 1.5 \frac{\text{ஓல்ட்டு}}{\text{ரேடியன்/நொடி}}$$

மாதிரி வினா 1.9

இரு பருவ மாறுமின் அடிமை இயக்கியில் (two-phase A.C. servomotor) ஆதாரச்சுருளின் மின்அழுத்தம் மாறுது இருக்கிறது. ஆள் சுருளின் மின் அழுத்தம் $e_2 = 75$ ஒல்ட்டு என்கையில், கட்டியநிலை – சுழற்பகுதித் திருப்பு விசை (blocked rotor torque) 3.54×10^{-2} நியூட்டன் - மீட்டர். $e_2 = 75$ ஒல்ட்டுக்கு உரிய திருப்பு விசை – வேகப்படம் (torque - speed curve) நேர்கோடாகக் கிடை அச்சை 4500 சுழல்/நிமிடம் என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. நிலை அச்சை வெட்டும் புள்ளி, e_2 விற்கு நேர் விகிதப் பொருத்தம் உடையது.

இயக்கியின் திருப்பு விசைச் சமன்பாட்டை, வேகம் ω, ஆள் சுருள் மின் அழுத்தம் e_2 ஆகியவற்றின் சார்பாக வருவிக்க.

தீர்வு :

திருப்புவிசை சமன்பாடு $T = A\omega + Be_2$ என்க.

வேகம் $\omega = 0$ எனில்

திருப்பு விசை $T = 3.54 \times 10^{-2}$ நியூட்டன் மீட்டர் ... (1)

திருப்பு விசை $T = 0$ எனில்

வேகம் $\omega = 4500 \times \frac{2\pi}{60}$

$= 471$ ரேடியன்/ நொடி ... (2)

$e_2 = 75$ ஒல்ட்டு (மாறுதது)

எனவே, எல்லை நியதி (1) இல் இருந்து,

$$3.54 \times 10^{-2} = A \times 0 + B \times 75$$

$$\text{அதாவது } B = \frac{3.54 \times 10^{-2}}{75} = 47.2 \times 10^{-5} \frac{\text{நியூட்டன் - மீட்டர்}}{\text{ஒல்ட்டு}}$$

எல்லை நியதி (2) இல் இருந்து,

$$0 = A \times 471 + 3.54 \times 10^{-2}$$

$$\text{அதாவது } A = -\frac{3.54 \times 10^{-2}}{471} = -7.5 \times 10^{-5} \frac{\text{நியூட்டன் - மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்/நொடி}}$$

எனவே, திருப்புவிசைச் சமன்பாடு

$$T = -7.5 \times 10^{-5}\,\omega \times 47.2 \times 10^{-5}\,e_2$$

இங்கு T; நியூட்டன் - மீட்டர்; ω: ரேடியன்/நொடி e_2: ஒல்ட்டு

பயிற்சி 1

1.1 நிறை சுற்றுக் குவை, குறை சுற்றுக் குவை இவற்றில் வகைக்கு மூன்று எடுத்துக் காட்டுகள் கொடுத்து விளக்குக.

1.2 படங்கள் 1.4, 1.5 இவற்றில் காணப்படும் ஆள்குவை களின் செயல் முறையைப் பெட்டிப் படங்கள் வரைந்து விளக்குக.

1. ஓர் அறையில் மின் விளக்கை இருளில் ஏற்றவும், பகலில் அணைக்கவும் கூடிய தானியங்கு குவை ஒன்றைப் படத்துடன் விவரிக்க.

1.4 ஒரு தூக்கு பாலத்தைத் தானாக ஏற்றியும் இறக்கியும் கப்பல்களுக்கு வழிவிடும் ஆள்குவை ஒன்றை ஆக்குக.

1.5 எதிரி விமானங்களைச் சுட்டு வீழ்த்தும் இராடார் கட்டுப் பாட்டு சுழற் பீரங்கி ஆள்குவை ஒன்றின் எளிபடம் வரைந்து பகுதிகளைக் குறிக்க.

1.6 தாமே அணைந்தும் ஒளியூட்டியும் போக்குவரத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் மின் அடையாள விளக்குகள் எவ்வகை ஆள் குவைக்கு எடுத்துக் காட்டு?

சாலைகளில் நாற் சந்திகளின் அருகில் போக்குவரத்து அடர்த்தியை அளக்கும் உலோகத் தகடுகள் புதைக்கப் பட்டிருந் தால் ஆள்குவையை எங்ஙனம் சிறப்புற இயங்கச் செய்யலாம்?

1.7 நிறை சுற்றுக் குவை, குறை சுற்றுக் குவை இவற்றின் நிறை குறைகளை வரிசைப் படுத்துக.

1.8 அடிமைக் குவை, ஒழுங்கமை குவை இவற்றின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகள் யாவை? எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

1.9 அடிமைக் குவையின் முக்கியக் கூறுகளை விளக்குக. இத்தகைய ஆள்குவையின் சிறப்பியல்புகள் யாவை?

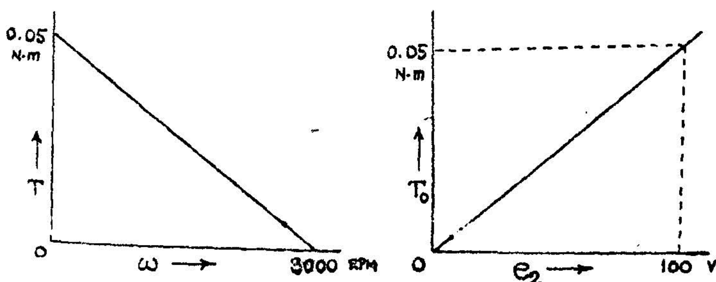
1.10 ஆள்குவை வகைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சிறு குறிப்புகள் வரைக

1.11 ஏதேனும் இரு வழுக்கணிப்பிகளின் அமைப்பையும் செயலையும் விவரிக்க.

1.12 நேர்மின் ஆக்கி எவ்வாறு திறன் பெருக்கியாகச் செயற்படுகிறது என்பதை விளக்குக.

1.13 அடிமை இயக்கிகளை வகைப்படுத்தி, அவற்றின் சிறப்பியல்புகளை வரிசைப் படுத்துக.

1.14 இரு பருவ அடிமை இயக்கி ஒன்றின் இலட்சியச்சிறப்பு இயற்கோடுகள் (idealized characteristic curves) வருமாறு:



படம் 1.33 இரு பருவ அடிமை இயக்கியின் சிறப்பு இயற்கோடுகள்

T : திருப்பு விசை (நியூட்டன்-மீட்டர்)
ω : சுழல் வேகம் (சுழற்சி/நிமிடம்)
T_0 : சுழலாத் திருப்பு விசை (stall-torque) (நியூட்டன்-மீட்டர்)
e_2 : ஆள் சுருள் மின் அழுத்தம் (ஓல்ட்டு)

$T = A\omega + Be_2$ என்ற திருப்பு விசைச் சமன்பாட்டில் T: நியூட்டன் மீட்டர், ω: ரேடியன்/நொடி, e_2 : ஓல்ட்டு எனில் A, இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

1.15 படம் *1.31*-ல் காட்டப்பட்டுள்ள மின் அழுத்த ஒழுங்கமை குவையில் $K_2 = 10$ V/V, Rf = 100 ஓம், $K_g = 200$ V/A, $R_a = 1$ ஓம், 20 ஆம்பியர் சுமை மாற்றத்தால் ஏற்படும் சுமை மின் அழுத்த வேறுபாடு, பின்னூட்டம் இல்லாத நிலையில் கிடைப்பதில் $\frac{1}{10}$ பங்கு எனில், பின்னூட்ட விகிதம் என்ன ?

1.16 ஓர் ஆதார மின் கலத்தில் இருந்து 0.5 A மின்னோட்டத்தைக் காந்தச் சுருளுக்குச் செலுத்துகையில், ஒரு நேர் மின் ஆக்கி, 50 A முழுச் சுமை மின்னோட்டத்தை 100 V மின் அழுத்தத்தில்

தருகிறது. அதன் மின்னகத் தடை 0 1 ஓம் காந்தச் சுருளின் தடை 100 ஓம்.

மின்கல மின் அழுத்தத்திற்கும் சுமை மின் அழுத்தத்தின் 0.5 பங்கு பின்னூட்டத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடே ஒரு பெருக்கியின் (a mplifier) வழி, காந்தச் சுருளுக்குச் செலுத்தப்படுகிறது என்க.

இம் மாற்றத்தால் சுமை மின்அழுத்த மாறுபாடு முன் மதிப்பில் $\frac{1}{106}$ பங்காகக் குறைகிறது எனில், பெருக்கியினுல் பெருக்க எண்ணை (amplifier gain) A/V என்ற அலகில் காண்க. சுழல் வேகம் மாறவில்லை என்று கொள்க.

1.17 ஒத்தியங்கி (synchro), ஆம்பிளிடைன் இவைகளைப் பயன்படுத்தும் ஆள்குலைகளின் எளிபடங்கள் (sketches) வரைந்து விளக்குக.

1.18 அலை வாங்கித் திருப்ப ஆள்குலை ஒன்றும் அதன் உருவியல் மாதிரியும் முறையே படம் 1.13, படம் 1.29 இவற்றில் தரப்பட்டுள்ளன.

இத்தகைய உருவியல் மாதிரியை வரையவும், செயற் சமன்பாடுகளை எழுதவும் முனைகையில் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் தற்புனைவுகள். தோராய மதிப்புகள் இவற்றை வரிசைப் படுத்துக.

1.19 படம் 1.1-ல் காட்டப்பட்டுள்ள அடிமைக் குலையின் ஆய்வில் மேற்கொள்ளலாகும் பொறியியல் எளி புனைவுகளை எழுதி, அக் குலையின் உருவியல் மாதிரி ஒன்றை வரைக.

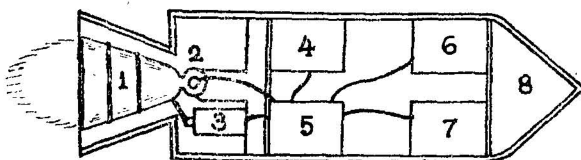
1.20 தக்க எளி புனைவுகளின் துணையால், படம் 1.7-ல் உள்ள சுழல்வேகம் ஒழுங்கமை குலையின் உருவியல் மாதிரியை வரைக. இதன் இடர் ஊட்டங்கள் யாவை?

2. செயற் சமன்பாடுகள்
(Performance Equations)

2.1 அடிப்படைக் கூறுகளும் மாறிகளும் (Basic elements and Variables)

2.1.1 அடிப்படைக் கூறுகள்

ஒரு விண்கல இயக்க ஆள்குவையில், வானொலிப் பெட்டி, கணிப்பொறி, நீர்மஇயக்கி, முடுக்கமானி, ஜைரோ போன்ற பல உறுப்புகள் உள்ளன (படம் 2.1).



படம் 2.1 விண்கல இயக்க ஆள்குவை

1. உந்து பொறி
2. திருப்ப அளவி
3. நீர்ம இயக்கி
4. ஜைரோ
5. கணிப்பொறி
6. முடுக்கமானி
7. வானொலிப் பெட்டி
8. விண் கலம்

இவ் உறுப்புகளில் ஒவ்வொன்றும் பல அடிப்படைக் கூறுகளை உடையது. சான்றாக,

வானொலிப் பெட்டியில்—மின்தடை, மின் தூண்டம், மின் தேக்கம், மின் அழுத்தம், மின் ஓட்டம் ஆகியவற்றை உண்டாக்கும் கூறுகளும்

முடுக்கமானியில்—பொருண்மை, உராய்தடை, மீள்சக்தி, விசை, வேகம் இவற்றைத் தரும் கூறுகளும்

ஜைரோவில்—நிலைமத் திருப்புவிசை (moment of inertia), உராய்தடை, முறுக்கம் இவற்றைத் தரும் கூறுகளும்

நீர்ம இயக்கியில்—பாய்மத் தடை, பாய்மத் தேக்கம், பாய்ம அழுத்தம், பாய்ம ஓட்டம் இவற்றின் கூறுகளும்

உந்து பொறியில்—வெப்பத்தடை, வெப்பத்தேக்கம், வெப்ப நிலை, வெப்ப ஒழுக்கு (heat flow) ஆகியவற்றின் கூறுகளும் பரவி உள்ளன. மின் இயல், இயந்திர இயல், பாய்ம இயல், வெப்ப இயல் ஆகிய பல்துறை அடிப்படைக் கூறுகளும் இங்கே உள்ளன.

இனி, அடிப்படைக் கூறுகளைப் பொதுவாக இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) இயக்கமில் கூறுகள் (Passive elements)

(2) இயக்கக் கூறுகள் (Active elements)

இயக்கமில் கூறுகளை மேலும்

(அ) ஆற்றல் தேக்குக் கூறுகள் (Energy storing elements)

(ஆ) ஆற்றல் செலவுக் கூறுகள் (Energy dissipating elements)

என இரண்டாகப் பிரிக்கலாம்.

ஒரு மின் தடையோ, மின் தேக்கியோ, மின் தூண்டியோ தாமாக மின்னோட்டத்தை ஏற்படுத்த இயலாது. இவை 'இயக்கமில் கூறுகள்'. மாறாக, ஒரு மின்கலம் மின்னோட்டத்தைத் தோற்றுவிக்கிறது. இது ஓர் 'இயக்கக் கூறு'. பொதுவாகத் திறன் பெருக்கத்தைத் தரும் கூறுகள் 'இயக்கக் கூறுகள்' எனப் படுகின்றன.

அடுத்து, ஒரு மின்தடை வழியே மின்னோட்டம் பாயும் பொழுது, மின் ஆற்றல் வெப்ப ஆற்றலாகச் செலவாகி வெளிப் படுகிறது. இது 'ஆற்றல் செலவுக் கூறு'.

ஒரு மின்தேக்கிக்கு மின்னோட்டத்தைச் செலுத்தினால், மின் ஆற்றல் நிலைமின் புலத்தில் தேக்கிவைக்கப்படுகிறது. ஒரு மின் தூண்டியில் மின்னோட்டம் பாய்கையில், மின் ஆற்றல் காந்தப் புலத்தில் தேக்கி வைக்கப்படுகிறது. இவை 'ஆற்றல் தேக்குக் கூறுகள்.'

இதுபோல் இயந்திரக் குவைகளில், பொருண்மையும், சுருள் வில்லும் (அல்லது நிலைமச் சுழல் திறனும், முறுக்கமும்) 'ஆற்றல் தேக்குக் கூறுகள்.' உராய்தடை 'ஆற்றல் செலவுக் கூறு'.

பலதுறைக் குவைகளின் அடிப்படைக் கூறுகளையும் அவற்றின் குறியுருக்களையும் (symbols) அட்டவணை 2.1 –ல் காணலாம்.

குறிப்பு : மின்னழுத்த வழங்கி (voltage source) எந்த மின்னோட்டத்திற்கும் ஒரேயளவு மின் அழுத்தத்தைத் தருவது. மின்னோட்ட வழங்கி (current source) எந்த மின்னழுத்தத்திலும் ஒரேயளவு மின்னோட்டத்தைத் தருவது. இவை போன்றவையே விசை வழங்கியும் (force source), வேக வழங்கியும் (velocity source).

அட்டவணை 2.1 அடிப்படைக் கூறுகள்

குவை	கூறு	குறி உரு
மின் இயல்	தடை தேக்கம் தூண்டம்	R C L
இயந்திரக் கோட்டு இயல்	உராய் தடை பொருண்மை மீள் விசை	B M K
இயந்திரச் சுழல் இயல்	சுழல் தடை நிலைமம் முறுக்கம்	B J K
பாய்ம இயல்	தடை தேக்கம் தூண்டம்	R C L
வெப்ப இயல்	தடை தேக்கம்	R C
இயக்கக் கூறு	வழங்கி	

* வெப்ப இயலில் ஒரே வகை ஆற்றல் தேக்கக் கூறுதான் உண்டு.

2.1.2 மாறிகள் (Variables)

மின் வழங்கியின் ஆற்றலையும், சுமையின் அளவையும் பொருத்து மின்அழுத்தமும், மின்னோட்டமும் மாறுகின்றன. இவற்றை 'மாறிகள்' என்கிறோம். இதுபோல் இயந்திரக் கோட்டு இயலில் வேகம் (velocity), விசை (force) இரண்டும் மாறிகள்.

பொதுவாக மாறிகளை இரு பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தலாம்.

1. ஊடுருவு மாறிகள் (through variables)
2. குறுக்கு மாறிகள் (across variables)

மின்னோட்டம், விசை ஆகியவை கூறுகளை ஊடுருவிச் செல்கின்றன. இவை ஊடுருவு மாறிகள்.

மின் அழுத்தம், வேகம் ஆகியவை கூறுகளின் முனைகளுக்கு இடையே கணிக்கப்படுகின்றன. இவை குறுக்கு மாறிகள்.

பலவகைக் குவைகளின் மாறிகளை அட்டவணை 2.2 வரிசைப் படுத்திக் காட்டுகிறது.

அட்டவணை 2,2 மாறிகள்

குவை வகை	மாறி வகை	மாறியின் பெயர்	மாறியின் அலகு
மின் இயல்	ஊடுருவு குறுக்கு	மின் ஓட்டம் i மின் அழுத்தம் e	ஆம்பியர் A ஓல்ட்டு V
இயந்திரக் கோட்டு இயல்	ஊடுருவு குறுக்கு	விசை f நேர் வேகம் v	நியூட்டன் N $\frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}}$ $\frac{m}{s}$
இயந்திரச் சுழல் இயல்	ஊடுருவு குறுக்கு	திருப்பு விசை T சுழல் வேகம் ω	நியூட்டன் மீட்டர் N-m $\frac{\text{ரேடியன்}}{\text{நொடி}}$ $\frac{rad}{s}$
பாய்ம இயல்	ஊடுருவு குறுக்கு	பாய் வேகம் q பாய்ம அழுத்தம் p	$\frac{(\text{மீட்டர்})^3}{\text{நொடி}}$ $\frac{m^3}{s}$ $\frac{\text{நியூட்டன்}}{(\text{மீட்டர்})^2}$ $\frac{N}{m^2}$
வெப்ப இயல்	ஊடுருவு குறுக்கு	பாய் வேகம் q வெப்ப நிலை θ	$\frac{\text{ஜூல்}}{\text{நொடி}}$ $\frac{J}{s}$ °கெல்வின் °K

குறிப்பு :

(i) மின்னோட்டமும் அதன் அலகும் :

மின்னேற்றம் கொண்ட துகள்கள் (charged particles) நகர்வதால் ஏற்படுவதே மின்னோட்டம் (current).

ஒரு மின் கடத்தியில் ஓர் இடத்தை ஒரு நொடியில் கடக்கும் மின்னேற்றத் துகள்களின் எண்ணிக்கையால் மின்னோட்டத்தை அளக்கிறோம்.

மின்னேற்ற அலகு 'கூலும்' (coulomb). 6×10^{18} எதிர்மின் துகள்களின் மொத்த மின் ஏற்றம் 1 கூலும். ($\because$ 1 மின் துகளின் மின் ஏற்றம் 1.6×10^{-19} கூலும்). இவ்வளவு துகள்கள் ஓரிடத்தை ஒரு நொடியில் கடந்தால் மின்னோட்டத்தின் அளவு ஒரு ஆம்பியர்.

அதாவது, $1 \text{ ஆம்பியர்} = 1 \dfrac{\text{கூலும்}}{\text{நொடி}}$

(ii) மின் அழுத்தமும் அதன் அலகும்

ஒரு கூலும் (coulomb) மின் ஏற்றம் (charge) கொண்ட துகளின் ஆற்றலே, மின் அழுத்தம் (voltage) எனப்படுகிறது.

மின் கடத்திகளின் மின்னேற்றத் துகள்களை நகர்த்தத் தேவையான ஆற்றல் இது என்றும் கூறலாம்.

இதன் அலகு ஒல்ட்டு (volt). இதன் வரையறை

$1 \text{ ஒல்ட்டு} = 1 \dfrac{\text{ஜூல்}}{\text{கூலும்}}$

மின் அழுத்தம், மின்இயக்கு விசை என்னும் சொற்களைக் கொண்டு ஒல்ட்டு அலகு ஒரு விசையைக் குறிக்கிறது என்று எண்ணிவிடலாகாது. இது ஓர் ஆற்றல் அலகு.

தவறு நேராமல் இருக்க, 'மின் இயக்கு ஆற்றல்' என்று **voltage** என்ற சொல்லுக்குப் பொருள் கொள்வதே சரி ஆகும். இருப்பினும் 'மின் அழுத்தமும்', 'மின் இயக்கு விசையும்' பழக்கத்தில் வந்துவிட்டன. எனவே, இவற்றின் பொருள் உணரும்போது விழிப்பாக இருக்கவேண்டும்.

2·1.3 இடை உறவுகள் (Inter-relations)

கூறுகள், மாறிகள் இவற்றிடையே உள்ள உறவுகளை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) சம நிலை உறவு (Equilibrium relation)

இது ஊடுருவு மாறிகளிடையே உள்ள உறவாகும். சான்று: கிர்காஃபு மின் ஓட்ட விதி $\Sigma i = 0$.

(2) பொருந்தும் உறவு (Compatibility relation)

இது குறுக்கு மாறிகளிடையே உள்ள உறவாகும். சான்று: கிர்காஃபு மின் அழுத்த விதி. $\Sigma e = 0$.

(3) உருவியல் உறவு (Physical relation)

சான்று: ஓம் விதி. $e = Ri$.

பலவகைக் குவைகளில் மாறிகளின் இடை உறவுகளை அட்டவணை 2.3 இல் காண்க.

அட்டவணை 2.3 மாறிகளின் இடை உறவுகள்

குவை வகை	சமநிலை உறவு	பொருந்தும் உறவு	உருவியல் உறவு
மின் இயல்	கிர்காஃபு மின்னோட்டவிதி (Kirchhoff's Current Law KCL) ஒரு சந்தியில் உள்ள மின் ஓட்டங்களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma i = 0$	கிர்காஃபு அழுத்த விதி (Kirchhoff's Voltage Law KVL) ஒரு சுற்றில் உள்ள மின் அழுத்த வேறுபாடுகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma e = 0$	$i = \frac{1}{R} e$ $i = \frac{1}{L} \int$ $= C \frac{de}{dt}$
இயந்திரக் கோட்டு இயல்	டாலம்பர்ட்டு விதி (Dalembert's principle) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விசைகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma f = 0$	ஒரு சுற்றுப் பாதையில் உள்ள நேர் வேக வேறுபாடுகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும. $\Sigma v = 0$	$f = Bv$ $f = K \int vdt$ $f = M \frac{dv}{dt}$
இயந்திரச் சுழல் இயல்	ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் திருப்பு விசைகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma T = 0$	ஒரு சுற்றுப் பாதையில் உள்ள சுழல்வேக வேறுபாடுகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma \omega = 0$	$T = B\omega$ $T = K \int \omega \, dt$ $T = J \frac{d\omega}{dt}$

(இதன் தொடர்ச்சி அடுத்த பக்கம் காண்க).

அட்டவணை 2.3 தொடர்ச்சி

பாய்ம இயல்	ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேரத்தில் சந்திக்கும் பாய்மப் பாய் வேகங்களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma q = 0$	ஒரு சுற்றுப் பாதையில் உள்ள அழுத்த வேறுபாடு களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma p = 0$	$q = \frac{1}{R} p$ $q = \frac{1}{L}\int p\,dt$ $q = C\frac{dp}{dt}$
வெப்ப இயல்	ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேரத்தில் சந்திக்கும் வெப்பப் பாய் வேகங்களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma q = 0$	ஒரு சுற்றுப் பாதையில் உள்ள வெப்ப நிலை வேறுபாடு களின் கூடுதல் சுழி ஆகும். $\Sigma \theta = 0$	$q = \frac{1}{R}\theta$ $q = C\frac{d\theta}{dt}$

2·1.4 அலகுகளும் உறவுகளும் (Units, Relations)

மின் இயலில் வரும் மாறிகள், கூறுகள் இவற்றின் அலகுகள் வருமாறு :

1. மின் ஓட்டம் i (current): ஆம்பியர் (A) $= 1 \frac{\text{கூலும்}}{\text{நொடி}}$

2. மின் அழுத்தம் e (voltage): ஓல்ட்டு (V) $= 1 \frac{\text{ஜூல்}}{\text{நொடி}}$

3. மின் தடை R (resistance) : ஓம் (r) $= 1 \frac{\text{ஓல்ட்டு}}{\text{ஆம்பியர்}}$

4. மின் தேக்கம் C (capacitance) :

$$\therefore \text{பாரடு (F)} = 1 \frac{\text{ஆம்பியர்}}{\text{ஓல்ட்டு/நொடி}}$$

5. மின் தூண்டம் L (inductance):

$$\text{ஹென்றி (H)} = 1 \frac{\text{ஓல்ட்டு}}{\text{ஆம்பியர்/நொடி}}$$

இயந்திரக் கோட்டு இயலில் மாறிகள், கூறுகள் இவற்றின் அலகுகள் :

1. விசை f (force): நியூட்டன் (N) $= 1$ கிலோகிராம் $\times \frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}^2}$

2. வேகம் v (linear velocity) : $\frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}} \left(\frac{m}{s}\right)$

3. உராய் தடை B (damping) : $\frac{\text{நியூட்டன்}}{\text{மீட்டர்/நொடி}} \left(\frac{N}{m/s}\right)$

4. பொருண்மை M (mass): கிலோகிராம் (kg) அல்லது $\frac{\text{நியூட்டன்}}{\text{மீட்டர்/நொடி}^2} \left(\frac{N}{m/s^2}\right)$

5. மீள் சக்தி K (elastance) : $\frac{\text{நியூட்டன்}}{\text{மீட்டர்}} \left(\frac{N}{m}\right)$

இயந்திரச் சுழல் இயலில் மாறிகள், கூறுகள் இவற்றின் இடை உறவுகள் :

1. திருப்பு விசை T (torque): நியூட்டன்-மீட்டர் (N—m)

2. சுழல் வேகம் ω (angular velocity): $\frac{\text{ரேடியன்}}{\text{நொடி}} \left(\frac{rad}{s}\right)$

3. சுழல் தடை B (damping) : $\frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்/நொடி}} \left(\frac{N-m}{rad/s}\right)$

4. நிலைமத் திருப்புவிசை J (M.I): கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2} ($kg\text{-}m^2$)

அல்லது $\frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்/நொடி}^2} \left(\frac{N-m}{rad/s^2}\right)$

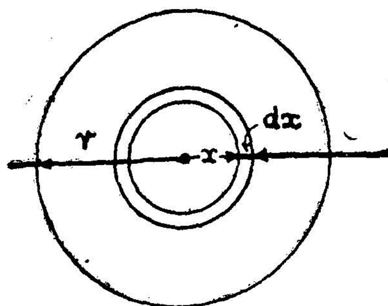
5. முறுக்கம் K (torsion): $\frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்}} \left(\frac{N-m}{rad}\right)$

இனி, அலகுகளிற் சில உறவுகளை நிறுவுவோம்.

நிலைமத் திருப்புவிசை (Moment of Inertia)

ஓர் ஆதார அச்சில் இருந்து r அலகு தூரத்தில் m என்ற பொருண்மை உடைய புள்ளி ஒன்றின் நிலைமத் திருப்பு விசை (J)Mr^2 என்று வரையறுக்கப் படுகிறது.

படம் 2.2-ல் சுழல் ஆழி ஒன்று காட்டப் பட்டுள்ளது. இதன் நிலைமத் திருப்பு விசையைப் பின்வருமாறு காணலாம்.



படம் 2.2 சுழல் ஆழி

ஆதார அச்சில் இருந்து x தூரத்தில் dx என்ற அகலமுள்ள ஒரு வளையத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் பொருண்மை

$m = 2\pi x.\ dx.\ \rho$ (ρ : அடர்த்தி)

வளையத்தின் நிலைமத் திருப்பு விசை = 'mx^2'
$= 2\pi x. dx. \rho.x^2$
$= 2\pi\rho. x^3dx$

முழு ஆழியின் நிலைமத் திருப்புவிசை $J = \int_0^r 2\pi\rho. x^3dx$

$= 2\pi\rho.\frac{r^4}{4}$

$= \pi r^2\rho. \frac{r^2}{2}$

$= \frac{1}{2} Mr^2$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}

குறிப்பு : இயந்திரக் கோட்டு இயக்கத்தில் பொருண்மை M வருவதுபோல், சுழல் இயக்கத்தில் நிலைமத் திருப்பு விசை J வருகிறது. சில சமன்பாடுகள் :

$F = Ma$ $\qquad T = J\alpha$

$K.E. = \frac{1}{2}Mv^2$ $\qquad K.E. = \frac{1}{2}J\omega^2$

நிலைமத் திருப்பு விசையின் அலகு : கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}

அடிப்படை அலகுகளும் (fundamental units) ஈர்ப்பு அலகுகளும் (gravitational units) :

SI அலகுகள் : (International System of Units or SI units)

விசை = பொருண்மை × முடுக்கம் (f = ma)

விசையின் அலகு 'நியூட்டன்'

1 நியூட்டன் = 1 கிலோ கிராம் × 1 $\frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}^2}$

விசையின் ஈர்ப்பு அலகு 'கிலோவிசை' (Kilogram force).

1 கிலோ விசை = 1 கிலோ கிராம் (பொருண்மை) × g $\frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}^2}$

[g = 9.81 $\frac{\text{மீட்டர்}}{\text{நொடி}^2}$: ஈர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity]

1 கிலோ விசை = 9.81 நியூட்டன்கள்

Kg → கிலோ கிராம் (பொருண்மை)
Kg → கிலோ விசை, எனில்

$1 N = 1 Kg \times 1 \frac{m}{s^2}$

$1 \text{ Kg} = 1 \text{ Kg} \times g \frac{m}{s^2}$

எனவே 1 Kg எடையுள்ள பொருளின் பொருண்மை 1 Kg ஆகிறது.

FPS அலகுகள் :

விசையின் அடிப்படை அலகு பௌண்டல் (poundal)

$1 \text{ பௌண்டல்} = 1 \text{ பௌண்டு (பொருண்மை)} \times 1 \frac{\text{அடி}}{\text{நொடி}^2}$

விசையின் ஈர்ப்பு அலகு பௌண்டு விசை (pound force)

$1 \text{ பௌண்டு விசை} = 1 \text{ பௌண்டு (பொருண்மை)} \times n \frac{\text{அடி}}{\text{நொடி}^2}$

[$g = 32.2 \frac{\text{அடி}}{\text{நொடி}^2}$ ஈர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to **gravity**)]

எனவே, | 1 பௌண்டு விசை = 32.2 பௌண்டல்கள் |

lb → பௌண்டு (பொருண்மை)

Lb → பௌண்டு விசை, எனில்

$1 \text{ lb} = 1 \text{ lb} \times 1 \frac{\text{ft}}{{}^2}$

$1 \text{ Lb} = 1 \text{ lb} \times g \frac{\text{ft}}{s^2}$

எனவே, 1 lb எடையுள்ள பொருளின் பொருண்மை 1 lb ஆகும்.

சிலக்கு (slug) :

$1 \text{ பௌண்டு விசை} = g \text{ பௌண்டு (பொருண்மை)} \times 1 \frac{\text{அலகு}}{\text{நொடி}^2}$

என்றும் எழுதலாம். அல்லது,

$1 \text{ பௌண்டு விசை} = 1 \text{ சிலக்கு} \times 1 \frac{\text{அடி}}{\text{நொடி}_2}$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு 'சிலக்கு' (slug) என்பது ஒரு பொருண்மை அலகு.

| 1 சிலக்கு = 32.2 பௌண்டு (பொருண்மை) |

வசதிக்காக, இயந்திர இயற் கூறுகளின் அலகுகள் SI, FPS இரு வழிகளிலும், அட்டவணை 2.4–ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 2.4 இயந்திர இயல் கூறுகள், மாறிகள் இவற்றின் அலகுகள்

கூறுகளும் மாறிகளும்		SI அலகுகள்		FPS அலகுகள்	
விசை	f	நியூட்டன்	N	பௌண்டு விசை	lb
வேகம்	v	மீட்டர்/நொடி	m/s	அடி/நொடி	ft/s
பொருண்மை	M	கிலோ கிராம்	kg	சிலக்கு	slug
உராய்த் தடை	B	நியூட்டன் / மீட்டர்/நொடி	$\frac{N}{m/s}$	பௌண்டு விசை / அடி/நொடி	$\frac{lb}{ft/s}$
மீள்விசை	K	நியூட்டன் / மீட்டர்	$\frac{N}{m}$	பௌண்டு விசை / அடி	$\frac{lb}{ft}$
திருப்பு விசை	T	நியூட்டன்–மீட்டர்	N-m	பௌண்டு விசை–அடி	lb–ft
சுழல் வேகம்	ω	ரேடியன்/நொடி	rad/s	ரேடியன்/நொடி	rad/s
நிலைமத் திருப்பு விசை	J	கிலோ கிராம்–மீட்டர்²	kg-m²	லக்கு-அடி²	slug-ft²
சுழல்தடை	B	நியூட்டன்–மீட்டர் / ரேடியன்/நொடி	$\frac{N\text{-}m}{rad/s}$	பௌண்டுவிசை-அடி / ரேடியன்/நொடி	$\frac{lb\text{-}ft}{rad/s}$
முறுக்கம்	K	நியூட்டன்–மீட்டர் / ரேடியன்	$\frac{N\text{-}m}{rad}$	பௌண்டு விசை-அடி / ரேடியன்	$\frac{Lb\text{-}ft}{rad}$

பத்தின் பெருக்கங்கள் :

10^3	கிலோ	kilo	k	10^{-3}	மில்லி	milli	m
10^6	மெகா	mega	M	10^{-6}	மைக்ரோ	micro	μ
10^9	கிகா	giga	G	10^{-9}	நனோ	nano	n
10^{12}	டெரா	tera	T	10^{-12}	பிகோ	pico	p

அட்டவணை 2.5 எஸ்.ஐ. அலகுகள் (SI Units)

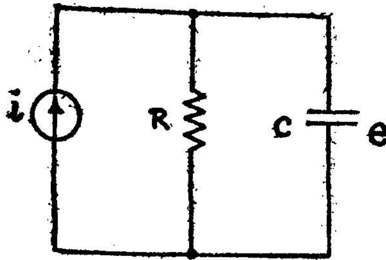
	அளவை	எஸ்.ஐ. அலகு		வேறு அலகுகள்		வேறு அலகு ஒன்றிற்குச் சமமான எஸ்.ஐ. அலகுகள்
1.	பொருண்மை	கிலோ. கிராம்	kg	பவுண்டு அவுன்சு சிலக்கு டன் (பிரிட்) டன் (மெட்ரிக்)	lb oz	0.4536 2.835×10^{-2} 14.59 1.016×10^{3} 10^{3}
2.	நீளம்	மீட்டர்	m	அடி அங்குலம் மைல்	ft in	0.3048 2.54×10^{-2} 1.609×10^{3}
3.	காலம்	நொடி	s	மணி நிமிடம்	hr mts	3.6×10 60
4.	விசை	நியூட்டன்	N	கிலோகிராம் பவுண்டு பவுண்டல் டன் டைன்	kg Lb Lbl T dyne	9.807 4.448 0.1883 9.964×10^{3} 10^{-5}
5.	நிலைமத் திருப்பு விசை	கிலோ கிராம் மீட்டர்²/ ரேடியன்²	kgm^2/rad^2	பவுண்டு–அடி² சிலக்கு–அடி² அவுன்சு–அங்²	lb ft^2 slug-ft^2 oz-in^2	4.214×10^{-2} 1.356 1.828×10^{-5}
6.	அழுத்தம்	நியூட்டன்/ மீட்டர்₂	N/m^2	பவுண்டு/அங்² பவுண்டு/அடி² டைன்/செ.மீ.² டார் பார்	psi lb/ft^2 d/cm^2 torr bar	6.895×10^{3} 47.88 10^{-1} 1.333×10^{2} 10^{5}
7.	ஆற்றல்	ஜூல்	J	கிலோ வாட் மணி எர்கு (டைன்–செ.மீ.) அடி–பவுண்டு பி.டி.யு. கலோரி	KWh erg ft-lb Btu	3.6×10^{6} 10^{-7} 1.356 1.055×10^{3} 4.1868
8.	திறன் ஆற்றல் பாய் வேகம்	வாட்	W	பரித்திறன் (பிரி) பரித்திறன் (மெட்) அடி–பவுண்டு/ நொடி கிலோ கலோரி/ மணி பி.டி.யு./மணி எர்கு/நொடி	HP HP fet lb/ sec. kcal/hr Btu/hr er/sec	7.457×10^{2} 7.355×10^{2} 1.356 1.163 0.2931 10^{-7}

2.1.5 தேக்கக் கூறுகளும் குலைப்படியும் :
(Number of energy storage elements and system order)

ஒரே வகைத் தேக்கக்கூறு, செலவுக்கூறு ஆகியவற்றைக் கொண்ட குலை, ஒரு படிக் குலை (first order system) எனப்படும். சில மாதிரி ஒருபடிக் குலைகளைக் கீழே காண்க.

செயற் சமன்பாடு

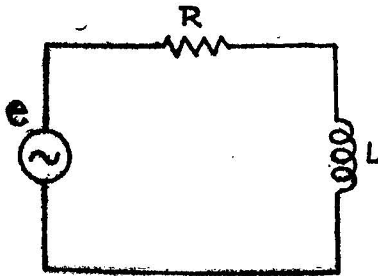
1. மின் இயல் RC இணைச்சுற்று (electrical RC parallel circuit)



$$i = C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R}e$$

படம் 2.3 மின் இணைச் சுற்று

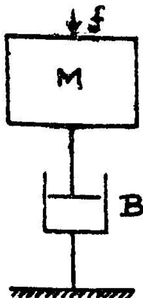
(2) மின் இயல் RL தொடர் சுற்று (electrical RL series circuit)



$$e = L\frac{di}{dt} + Ri$$

படம் 2.4 மின் தொடர் சுற்று

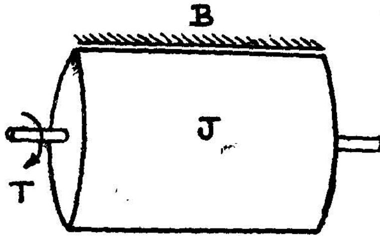
(3) இயந்திரக் கோட்டு இயற்குலை (mechanical translational system)



$$f = M\frac{dv}{dt} + Bv$$

படம் 2.5 இயந்திரக் கோட்டு இயற்குலை

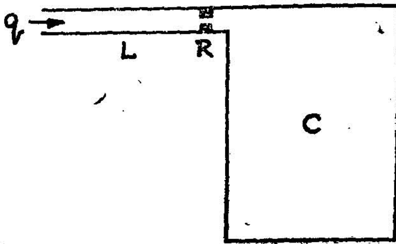
(4) இயந்திரச் சுழல் இயற் குவை (mechanical rotational system)



$$T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

படம் 2.6 இயந்திரச் சுழல் இயற்குவை

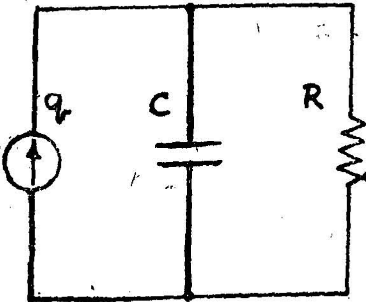
(5) பாய்ம இயல் :



$$q = C\frac{dp}{dt} + \frac{1}{R}p$$

[படம் 2.7 பாய்ம இயற் குவை

(6) வெப்ப இயல் :



$$q = C\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{R}\theta$$

படம் 2.8 வெப்ப இயற்குவை

இவற்றின் பொது உருவம்

$$r = \frac{dc}{dt} + \sigma c$$

t : சாரா மாறி (independent variable)

C : சார்ந்த மாறி (dependent variable)

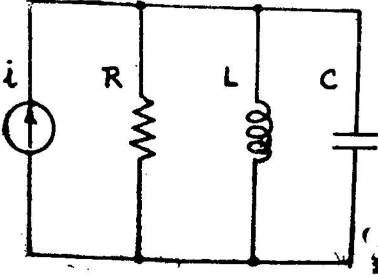
r : கட்டளைச் சார்பு (forcing function)

இருவகைத் தேக்கக் கூறுகளை உடைய குவைகள் இருபடிக் குவைகள் (second order systems) எனப்படும்.

சில எடுத்துக் காட்டுக்கள் :

செயற் சமன்பாடு

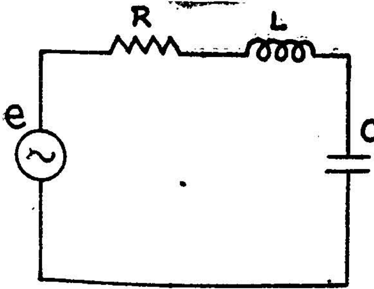
(1) மின்னியல் RLC இணைச்சுற்று (RLC parallel circuit) :



$$i = C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L}\int e\,dt$$

படம் 2.9 RLC இணைச் சுற்று

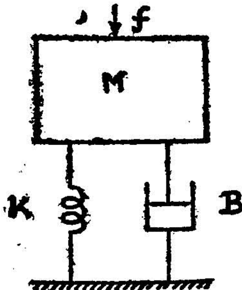
(2) மின்னியல் RLC தொடர் சுற்று (RLC series circuit):



$$e = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int i dt$$

படம் 2.10 RLC தொடர் சுற்று

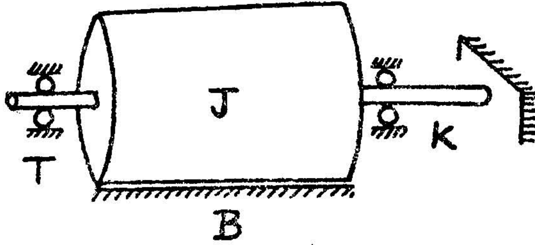
(3) இயந்திரக் கோட்டு இயற்குவை (mechanical translational system) :



$$f = M\frac{dv}{dt} + Bv + k\int v\,dt$$

படம் 2.11 MKB குவை

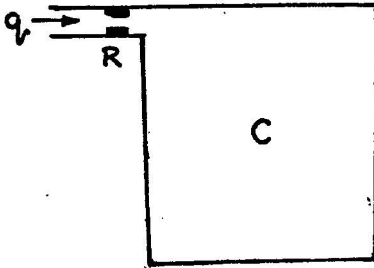
(4) இயந்திரச் சுழல் இயற்குவை (mechanical rotational system) :



படம் 2.12 JKB குவை

$$T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega + K\int \omega dt$$

(5) பாய்ம இயற்குவை (fluid system) :



$$q = C\frac{dp}{dt} + \frac{1}{R}p + \frac{1}{L}\int pdt$$

படம் 2.13 பாய்ம இயற்குவை

வெப்ப இயலில் ஒரே வகைத் தேக்கக் கூறுதான் உண்டு. எனவே அதில் இருபடிக் குவை அமைய வழி இல்லை.

இருபடிக்குவை ஒன்றின் செயற் சமன்பாட்டின் பொது உருவம் வருமாறு :

$$\boxed{\frac{d^2c}{dt^2} + 2\sigma\frac{dc}{dt} + \omega^2{}_n c = r}$$

r : கட்டளைச் சார்பு (forcing function)
C : சார்ந்தமாறி (dependent variable)
t : சாரா மாறி (independent variable)

2.2 எளிய குவைகளின் சமன்பாடுகள் (Equation of Simple Systems)

2.2.1 மின் வலைகள் (electrical networks)

மின் சுற்றுகளின் செயற்சமன்பாடு எழுத இருவழிகள் உண்டு. அவையாவன :

1) சுற்று மின்னோட்ட முறை (loop current method)
2) சந்தி மின் அழுத்த முறை (node voltage method)

1) சுற்று மின்னோட்ட முறை:

சுற்று மின்னோட்ட முறையில் செயற் சமன்பாடு எழுத உதவும் படிகள் (steps) வருமாறு:

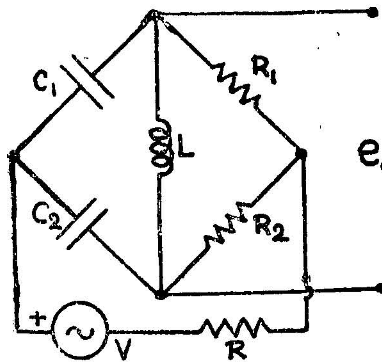
1. குலையில் எவ்வளவு தனிச் சுற்றுகளோ (independent loops) அவ்வளவு சுற்று மின்னோட்டங்களை வலஞ் சுழியாகப் புனைந்து கொள்க. ஒவ்வொரு கூறின்வழியும் மின்னோட்டம் பாயவேண்டும். அதேசமயம் எந்த மின்னோட்டச்சுற்றின் குறுக்காகவும் ஒரு கூறு இருக்கக்கூடாது.

2. ஒவ்வொரு சுற்றிலும் கிர்கா∴பு மின் அழுத்த விதியைக் கொண்டு ஒரு பொருந்தும் உறவை (compatibility relation) எழுதுக. எவ்வளவு தற்புனைவு மின்னோட்டங்கள் (assumed currents) உள்ளனவோ, அவ்வளவு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

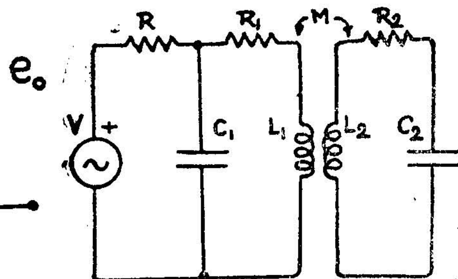
3. புனைவு மின்னோட்டம், ஒவ்வொரு இயக்கமில் கூறில் நுழையும் முனையும் நேர்முனை ஆகும். மின் ஆக்கிகளில், எதிர் முனையில் நுழைந்தால் எதிர்க் குறியீடு; நேர் முனையில் நுழைந்தால் நேர்க் குறியீடு. இவ்வாறு மின் அழுத்தக் குறைவிற்குக் (voltage drop) குறியீடு செய்கிறோம்.

மாதிரி வினா 2.1

கீழ்க்காணும் மின் வலைகளின் செயற் சமன்பாடுகளைச் சுற்று முறையில் (loop method) எழுதுக. (படம் 2.14, படம் 2.15)



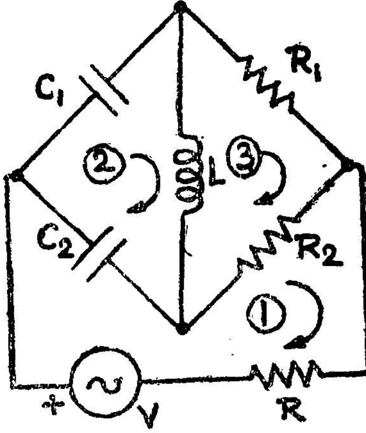
படம் 2.14 மின் பால வலை



படம் 2.15 மின் தூண்டு இணைப்புவலை

தீர்வுகள் :

1) படம் 2.16 இல் மூன்று தனிச் சுற்றுகள் உள்ளன. எனவே மூன்று மின்னோட்டங்கள் i_1, i_2, i_3 வலஞ் சுழியாகப் புனையப்படுகின்றன.



படம் 2.16
சுற்றுகளும் மின் ஓட்டமும்

சுற்றுகள் (1), (2), (3) இல் கிர்கா∴பு மின் அழுத்த விதியைக் கொண்டு கீழ்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம் :

$$Ri_1 + \frac{1}{C^2}\int i_1\,dt + R_2 i_1 - V - \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt - R_2 i_3 = 0$$

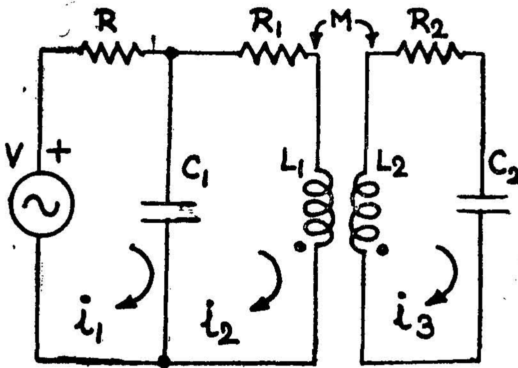
$$-\frac{1}{C_2}\int i_1\,dt + \frac{1}{C_1}\int i_2\,dt + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt - L\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$-R_2 i_1 - L\frac{di_2}{dt} + L\frac{dj_3}{dt} + R_1 i_3 + R_2 i_3 = 0$$

i_1, i_2, i_3 என்ற மூன்று மின்னோட்டங்களுக்குத் தீர்வு காண மூன்று சமன்பாடுகள் உள்ளன.

$$E_0 = L\frac{di_2}{dt} - L\frac{di_3}{dt}$$

என்ற சமன்பாட்டில் இருந்து ஈட்ட மின் அழுத்தத்தைக் காணலாம்.



படம் 2.17
சுற்றுகளும்
மின் ஓட்டமும்

இவ்வலையில் (படம் 2.17) மூன்று தனிச் சுற்றுகள் உள்ளன. எனவே i_1 i_2 i_3 என்ற மூன்று மின்னோட்டங்கள் புனையப்படுகின்றன.

இம்மூன்று சுற்றுகளிலும் கிர்சாஃப் மின் அழுத்த விதியைக் கையாளவும், மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன :

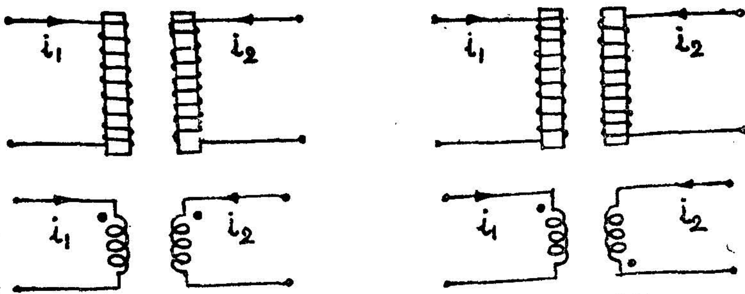
$$Ri_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt - \frac{1}{C_1}\int i_2\, dt - V = 0$$

$$-\frac{1}{C_1}\int i_1\, dt + \frac{1}{C_1}\int i_2\, dt + R\;\; i_2 + L_1\frac{di_2}{dt} - M\frac{di}{dt} = 0$$

$$-M\frac{di_2}{d} + L_2\frac{di_3}{dt} + R_2\, i_3 + \frac{1}{C_2}\int i_3\, dt = 0$$

குறிப்பு : 'புள்ளி' வழக்கு (dot convention)

ஒன்றற்கொன்று தூண்டும் இரு சுருள்களில் (coils with mutual inductance) ஒரு தன்மைய முனைகளில் (terminals having the same sense) புள்ளிகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. புள்ளிகள் சுருள்களின் தொடக்கத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம் (படம் 2.18).



படம் 2.18 புள்ளி வழக்கு (அ) ஒத்துழைப்பு (ஆ) எதிர்ப்பு

இரு சுருள்களிலும் மின்னோட்டம் ஒத்த முனைகளை (புள்ளி முனைகளை) நோக்கியோ அல்லது அவற்றில் இருந்து விலகியோ சென்றால், சுருள்களின் காந்தத் தாரைகள் (magnetic fluxes) ஒன்றற்கொன்று துணைபுரிகின்றன என்று பொருள் (அ).

மின்னோட்டம் ஒரு சுருளில் புள்ளிமுனையை நோக்கியும், மற்றொன்றில் புள்ளிமுனையில் இருந்து விலகியும் சென்றால், காந்தத் தாரைகள் ஒன்றையொன்று எதிர்க்கின்றன என்று பொருள் (ஆ).

(2) சந்தி மின் அழுத்த முறை

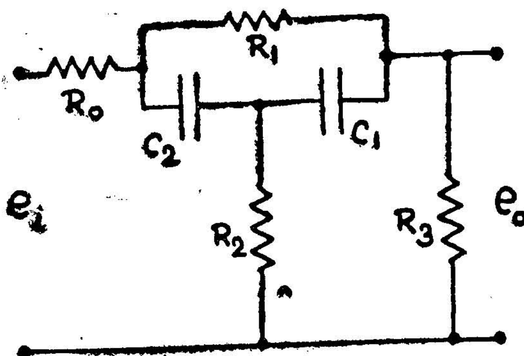
1. சந்திகளைக் குறித்துக் கொள்க. இவற்றுள் ஏதாவது ஒன்று மேற்கோள் சந்தியாக இருக்கட்டும். மேற்கோள் சந்தியின் மின்அழுத்தம் சுழிஎனக் கொண்டு, பிறசந்திகளில் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு மின் அழுத்தத்தைப் புனைந்து கொள்க.

2. ஒவ்வொரு சந்தியிலும் கிர்காஃபு மின்னோட்ட விதியைக் கையாண்டு ஒரு சமநிலை உறவை எழுதுக. எவ்வளவு சுழியிலாப் புனைவு மின் அழுத்தங்கள் உண்டோ, அவ்வளவு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

3. சமன்பாடுகளை எழுத, எந்தச் சந்தியிலும், மின்னோட்டங்கள் யாவும் வெளி நோக்கிப் பாய்வதாகக் கொண்டால் வசதியாக இருக்கும்.

மாதிரி வினா 2.2

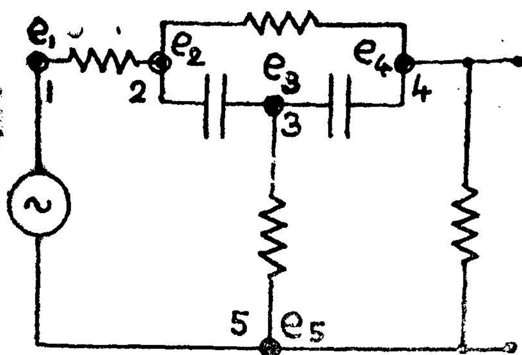
கீழ்க்காணும் மின் வலையின் செயற் சமன்பாட்டைச் சந்தி முறையில் எழுதுக: (படம் 2.19)



படம் 2.19
மின் வலை

தீர்வு :

சந்திகளின் மொத்த எண்ணிக்கை 5. இவை படம் 2.20-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 2.20
சந்திகள்

இவற்றுள், $e_1 = e_i$, கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$e_5 = 0$, தற்புனைவு.

எனவே, மீதி மூன்று சந்திகளின் ஜார்ஃபு மின் ஓட்ட விதியைப் பொருத்த,

$$\frac{e_2 - e_i}{R_0} + \frac{e_2 - e_0}{R_1} + \frac{1}{C_2}\int (e_2 - e_3)dt = 0$$

$$\frac{1}{C_2}\int (e_3 - e_2)\, dt + \frac{1}{C_1}\int (e_3 - e_0)\, dt + \frac{e_3 - 0}{R_1} = 0$$

$$\frac{e_0 - e_2}{R_1} + \frac{1}{C_1}\int (e_0 - e_3)\, dt + \frac{e_0 - 0}{R_2} = 0$$

2.2.2 இயந்திர இயற் குலைகள்

இயந்திர இயற்குலைகளின் செயற்சமன்பாடுகளை எழுத இருவழிகள் உண்டு.

1) தனித்த கூட்டு ஆய்வு முறை (free body diagram method)

2) இயந்திர வலை முறை (mechanical network method)

பெரிதும், சிக்கலும் ஆன இயந்திரக் குலை ஒன்றின் செயற் சமன்பாட்டை முதல் முறையில் காண்பது கடினம், அதற்கு ஆகும் நேரமும் அதிகம்.

இயந்திர வலை முறையிலோ, எவ்வகை இயந்திரக் குலைக்கும் செயற் சமன்பாட்டை எளிதிற் காணலாம். குலைகளின்

ஒருமைப்பாட்டை விளக்கவும் இது பெரிதும் உதவும். எனவே இம் முறையே இந்நூல் முழுதும் கையாளப்படுகிறது.

எந்த இயந்திரக் குவைக்கும் மின் வலையைப் போன்ற ஓர் எளி வடிவம் வரையலாம். இதுவே இயந்திரவலை (mechanical network) ஆகும்.

இதை வரைதற்குப் பின்வரும் குறிப்புகள் உதவும். சுருள் வில்லும் (spring), உராய்தடை உருளையும் (dashpot) உறுதியானவை அல்ல. ஏனெனில் அவற்றின் இரு முனைகளும் இரு வேறு வேகங்களில் நகர இயலும். பொருண்மை அப்படி அல்ல; அது உறுதியானது. அதன் இரு முனைகளும் சம வேகத்திலேயே நகரும். அவ் வேகம் பூமியை ஆதாரமாகக் கொண்டு அளக்கப் படுகிறது.

எனவே, இயந்திர வலைப் படத்தில் சுருள் வில், உராய்தடை உருளை இவற்றின் முனைகள் இரு வேறு வேகங்களைக் காட்டும் சந்திகளோடு இணைக்கப்படுகின்றன. பொருண்மையிலோ ஒரு முனை எப்பொழுதும் (சுழி வேக) ஆதாரச்சந்தியோடு இணைக்கப் பட்டு இருக்கும்; (மறு முனை பொருண்மையின் வேகத்தைக் குறிக் கும் சந்தியுடன் இணைக்கப்படுகிறது).

இயந்திர வலைப் பட முறை (mechanical network diagram method) :

1. இயந்திரக்குவை ஒரு விசையால் தாக்குறும்பொழுது விளையும் வேகங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு சந்தியால் குறிக்க இவற்றிற்குக் கீழே ஆதாரச் சந்தியையும் தனியாகக் குறிக்க.

பொருண்மைகளைச் சிறு சதுரங்களாக வரைக. அவற்றின் மேல்முனைகள் பொருண்மைகளின் வேகங்களைக் காட்டும் சந்தி களிலும், கீழ்முனைகள் ஆதாரச்சந்தியுடனும் இணைக்கப்படட்டும்.

2. சுருள்வில், உராய்தடைஉருளை ஆகிய பிறகூறுகளை அவற்றின் முனைகளின் வேகங்களைக் குறிக்கும் சந்திகளுடன் இணைக்க.

இயக்கி அறிகுறி வழங்கிகளை (signal sources) அவை தூக்கும் முனைகளைக் குறிக்கும் சந்திகளுக்கும் ஆதாரச்சந்திக்கும் இடையே இணைக்க.

3. டாலம்பர்ட்டு விதியை (Dalembert's Principle) முச் சந்திகளில் பொருத்திச் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

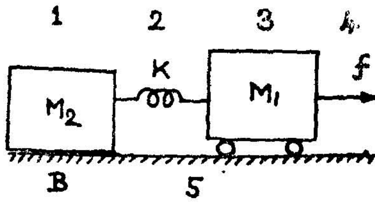
மாதிரி வினா 2.2

படம் 1.27, படம் 1.29 இவைகளிற் காணும் இயந்திரக் குவைகளின் செயற் சமன்பாடுகளை வருவிக்க.

தீர்வு :

(1) விமானத்தைக் கப்பல் தளத்தில் நிறுத்தல் :

படம் 1.27-ல் கண்ட இயந்திரக் குவையின் குவி உருவைக் (lumped form) கீழே காண்க படம் *(2.21)*.



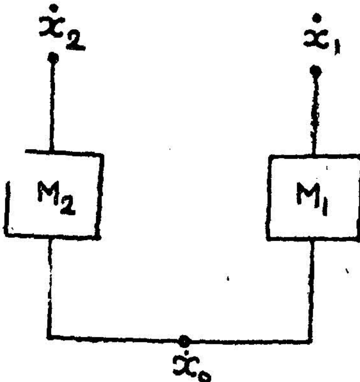
படம் 2.21 இயந்திரக் கோட்டு இயற்குவை

1. மணல்மூட்டை
2. கயிறு
3. விமானம்
4. முன்தள்ளி
5. கப்பல் தளம்

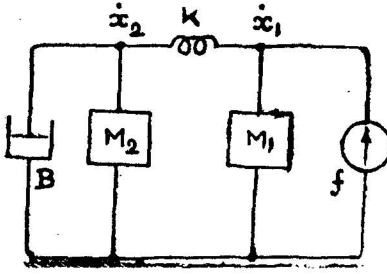
முன் தள்ளியின் இயக்கத்தால் விமானம் முன் நகரும் (அல்லது உந்தத்தால் நகரும்). விமானத்தின் இரு முனைகளின் வேகம் ஒன்றே, அது $\dot{x}_1$ என்க.

கயிறு நீட்டமும், சிறிது மீட்சியும் உடையது. அதன் இரு முனைகளின் வேகங்கள் $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ என இருக்கட்டும். மணல் மூட்டையின் வேகம் $\dot{x}_2$ என்பது படத்தில் இருந்து தெளிவு.

உராய் தடையை, M_2வின் வேகத்தைக் குறிக்கும் $\dot{x}_2$ என்ற சந்திக்கும், ஆதாரச் சந்திக்கும் இடையே ஓர் உராய்தடை உருவையில் குறிக்கலாம்.



படி 1:
படம் 2.22
இயந்திர வலை



படம் 2.23
படி 2:
இயந்திர வலை

படி 3: சந்திகள் $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ இவைகளில் டாலம்பர்ட்டு விதியைப் பொறுத்த.

$$M_1 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0) + k (x_1 - x_2) - f^* = 0$$

$$M_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_0) + B (\dot{x}_2 - \dot{x}_0) + k (x_2 - x_1) = 0$$

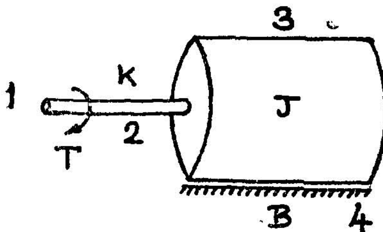
* *குறிப்பு:* **விசையின் குறியீடு (Sign):**

விசையின் திசையிலேயே இடப் பெயர்ச்சியும் இருப்பதாகக் கொண்டால், விசை வழங்கியில் (source) அது தாக்கும் சந்தியை நோக்குமாறு விசையைக் குறிக்கலாம்.

சமன்பாடுகளை எழுதும்பொழுது, ஒவ்வொரு சந்தியில் இருந்தும் விசைகள் வெளியே செல்வதாகக் கொள்வதால், விசை வழங்கியில் இருந்து சந்தியை நோக்கிவரும் விசை எதிர்க் குறியீடு (negative sign) உடையதாயிற்று

(2) கப்பல் இயக்கக் குவை:

படம் 1.29-ல் உள்ள இயந்திரக் குவையின் குவி உருவைக் கீழே க்காண்க (படம் 2.24).



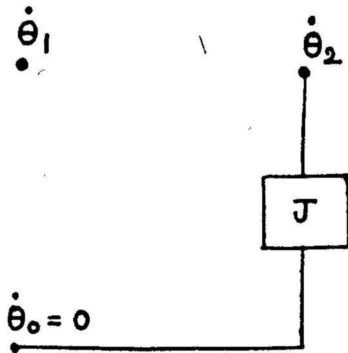
படம் 2.24 இயந்திரச் சுழல் இயற் குவை

1. சுழலியின் திருப்பு விசை
2. நீளத் தண்டு
3. முன் தள்ளியின் நிலைமம்
4. உராய்வு

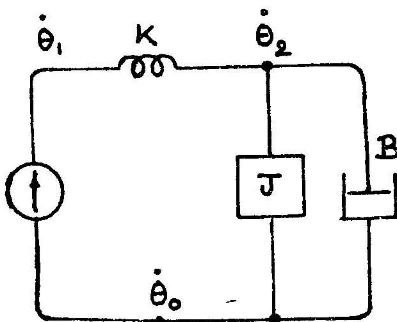
சுழலும் நீளமான தண்டில் முறுக்கம் இயற்கையானதால், அதன் சுழலியின் முனையில் சுழல்வேகம் $\dot{\theta}_1$ எனில், முன்தள்ளியின் முனையில் $\dot{\theta}$ என்க. நிலைமச் சுழல் திறனின் இரு முனைகளிலும்

ஒன்றே, $\dot{\theta}_2$. உராய்தடை உருளையின் ஒரு முனை $\dot{\theta}_2$, மற்றொன்று சுழியாகும்.

இயந்திர வலையைப் பின்வருமாறு வரையலாம்.



படி 1:
படம் 2.25



படி 2:
படம் 2.26

படி 3: $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ என்ற சந்திகளின் டாலம்பர்ட்டு விதியைப் பொருத்தவும்.

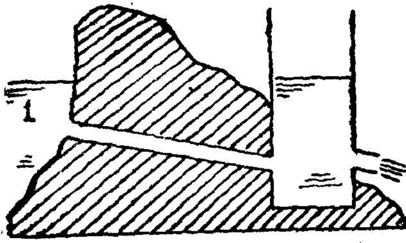
$$K(\theta_1 - \theta_2) - T = O$$

$$J(\ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_0) + B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_0) + K(\theta_2 - \theta_1) = O$$

இவையே குவையின் செயற் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

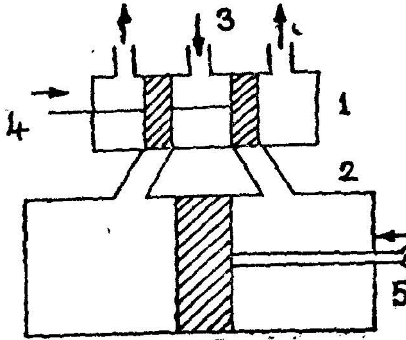
2.3 பாய்ம இயற் குவைகள்

சில எளிய பாய்ம இயற்குவைகளின் பகுதிகள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன (படங்கள் 2.27, 2.28, 2.29).



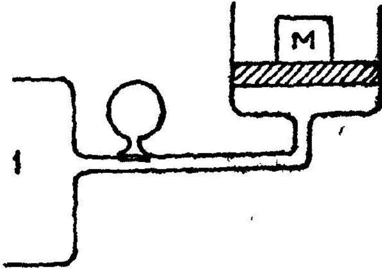
படம் 2.27 நீர் வழங்கு குவைப் பகுதி

1. நீர்த் தேக்கம்



படம் 2.28 ஒரு நீர்ம (இயக்கி

1. ஓரதர் உருளை
2. திறன் உருளை
3. மிகை அழுத்த நீர்மம்
4. விசை
5. விளைவு



படம் 2.29 ஒரு வளிமக் குவைப் பகுதி

1. மிகை அழுத்த வளிமம்

பாய்ம இயற் குவைகளின் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதத் தேவையான படிகள் (steps) வருமாறு :

1. குவையின் செயலை விளக்கும் மாறிகளைத் தேர்தல்
சான்றுகள்: பாய் வேகம் (q), அழுத்தம் (p); மேலும், அடர்த்தி (ρ), உயரம் (h), வேகம் (v).

2. சமநிலை உறவுகளை (equilibrium relations) எழுதல்.

இவை i) தொடர்ச்சி உறவு (Continuity relation),
பொருண்மை மாற்ற வேகம் = உள்பாய் வேகம் — வெளிப்பாய் வேகம்

ii) விசைச் சமநிலை (force equilibrium):
ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேரத்தில் காணும் விசைகளின் கூடுதல் சுழி ஆகும்.

3. உருவியல் உறவுகளை எழுதல்.

பாய்மத் தேக்கம் (fluid capacitance): (C)

தேக்கு கலன்களில் $q = C\dot{p}$

பாய்மத் தடை (fluid resistance): (R)

நுண் துளைகளில் $q = \frac{1}{R} p$

பாய்ம இயலாமை (fluid inertance): (L)

நீளக் குழாய்களில் $p = L\dot{q}$

4. மேற்கண்ட உறவுகளை இணைத்து செயற்சமன்பாட்டை எழுதல்.

ஓர் எடுத்துக் காட்டின் வழி இப்படிகளை மனத்தில் பதிய வைப்போம்.

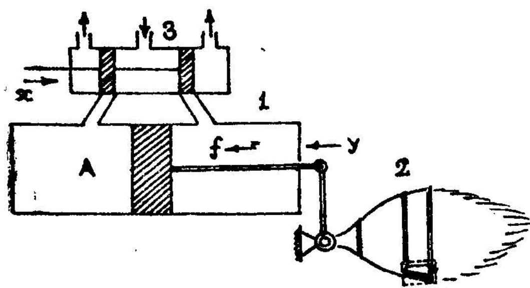
மாதிரி வினா 2.3

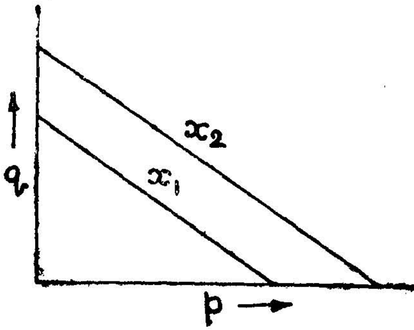
ஏவுகணை உந்துபொறியைத் (rocket engine) திருப்பும் ஒரு நீர்ம இயக்கி (hydraulic activator) கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது (படம் 2.30).

மிகை அழுத்த நீர்மத்தின் பாய்வேகம் q (flow rate of the high pressure liquid), ஓரதர்த் தண்டின் (valve spindle) இடப் பெயர்ச்சி x, திறன் உருளையின் வேறுபாட்டு அழுத்தம் p (differential pressure) இவற்றைப் பொறுத்தது. இவ் உறவைப் படம் 2.31 காட்டுகிறது.

இக்குலையின் செயற் சமன்பாட்டை வருவிக்க (derive).

படம் 2.30 நீர்ம இயக்கியால் உந்து பொறியைத் திருப்புதல்





படம் 2.31 பாய் வேக-அழுத்த இடை உறவு
q : பாய் வேகம்
p : அழுத்தம்
x : ஓரதர் தண்டின் பெயர்ச்சி

தீர்வு: படி 1: இக் குவையில் மாறிகள் :

q : *பாய் வேகம்*

p : *வேறுபாட்டு அழுத்தம், திறன் உருளையில்*

A : *உந்து வில்லையின் பரப்பு*

மேலும், M : இயங்கு பகுதிகளின் மொத்தப் பொருண்மை

B : *உராய் தடை*

f : *திறன் உருளையிற் தோன்றும் விசை*

y : *திறன் உருளை உந்து தண்டின் இயக்கம்*

x : *ஓரதர்த் தண்டின் இயக்கம்*

p : *நீர்ம அடர்த்தி*

என்க.

படி 2 : சமநிலை உறவுகள் :

i) *தொடர்ச்சி :* $q = PA\dot{y}$

ii) *விசைச் சமநிலை :* $pA - f = O$

படி 3 : உருவியல் உறவுகள் :

$f = M\ddot{y} + B\dot{y}$

$q = k_1x - k_2p$ *(படம் 2.19-ல் இருந்து)* k_1, k_2 *மாறிலிகள்*

படி 4 : மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை இணைக்க,

$M\ddot{y} + B\dot{y} = f$

$= pA$

$$= \frac{1}{k_2}\left(k_1 x - q\right) A$$

$$= \frac{A}{k_2}\left(k_1 x - \rho A\dot{y}\right)$$

எனவே, $M\ddot{y} + \left(B + \frac{\rho A^2}{k_2}\right)\dot{y} = \frac{Ak_1}{k_2} x$

அல்லது $\boxed{\ddot{y} + \quad = cx}$ இதுவே, தேவையான செயற் சமன் பாடு ஆகும்.

இங்கு $\sigma = \frac{1}{M}\left(B + \frac{\rho A^2}{K_2}\right), C = \frac{Ak_1}{Mk_2}$

2·2.4 எளிய வெப்ப இயற்குலைகள்

சூடேற்று கலன், வெப்பமானி, ஏவுகணை உந்து பொறி இவை எல்லாம் வெப்ப இயற்குலைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுக்கள். வெப்ப இயற்குலைகளின் செயற்சமன்பாடுகளை எழுத, மாறிகள், அவற்றின் இடை உறவுகள் ஆகியவை அவசியம் ஆகும்.

வெப்பம் ஒரு பொருளில் இருந்து மற்றொரு பொருளுக்குச் செல்லும்பொழுது, பாய்வேகம் (q), வெப்ப நிலை மாறுபாட்டிற்கு (θ) நேர் விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

$$q = \frac{1}{R}\,\theta$$

இங்கு R வெப்பத் தடை (thermal resistance)

பாய் வேகம் q : ஓர் ஊடுருவு மாறி (through variable)

வெப்ப நிலை θ : ஒரு குறுக்கு மாறி (across variable)

ஒரு பொருளின் உள் நுழையும் வெப்பம், அங்கு உள் ஆற்றலாகத் தேக்கி வைக்கப்படலாம். அதனால் பொருளின் வெப்ப நிலை உயரும்.

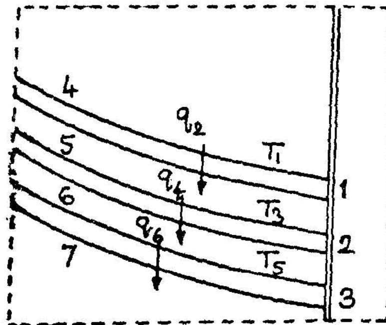
ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை மாறும்வேகம் (rate of change of temperature) வெப்பப் பாய் வேகத்திற்கு (heat flow rate) நேர் விகிதப் பொருத்தம் உடையது.

$$q = C\dot{\theta}$$

இங்கு C : வெப்பத் தேக்கம் (thermal capacitance)

மாதிரி வினா 2.4

ஒரு விண்கல உந்துபொறியின் சுவர்களின்வழி வெளியேறும் வெப்பத்தைக் கணிக்கத் தேவையான குறிப்புகளைப் படம் 2.32 இல் இருந்து பெற்று, அவ்வெப்ப இயற்குவையின் செயற் சமன்பாடுகளை வருவிக்க.

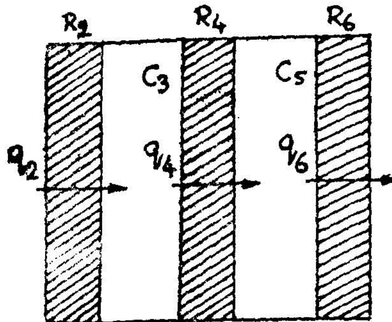


படம் 2.32 விண்கல உந்து பொறிச்சுவர்

1. உள் பூச்சு
2. இடைப் பூச்சு
3. வெளிப் பூச்சு
4. சூடான உள் பகுதி
5. கடத்தி
6. அரிதில் கடத்தி
7. குளிர்ந்த சூழல்

தீர்வு :

உந்து பொறிச் சுவற்றின் உருவியல் மாதிரி ஒன்று படம் 2.33 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 2.33 உந்து பொறிச் சுவர்

R : வெப்பத் தடை
C : வெப்பத் தேக்கம்
q : வெப்பம் பாய் வேகம்

இதன் சமநிலை உறவுகள் :

$$(q_2 - q_4) = C_3 \dot{\theta}_3$$

$$(q_4 - q_6) = C_5 \dot{\theta}_5$$

இதன் உருவியல் உறவுகள் :

$$q_2 = \frac{1}{R_2}(\theta_1 - \theta_3)$$

$$q_4 = \frac{1}{R_4}(\theta_3 - \theta_5)$$

$$q_6 = \frac{1}{R_6}(\theta_5 - \theta_7)$$

இவைகளை ஒன்று சேர்க்கவும், பின்வரும் செயற் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\frac{1}{R_2}(\theta_1 - \theta_3) - \frac{1}{R_4}(\theta_3 - \theta_5) = C_3 \dot{\theta}_3$$

$$\frac{1}{R_4}(\theta_4 - \theta_5) - \frac{1}{R_6}(\theta_5 - \theta_7) = C_5 \dot{\theta}_5$$

2.2.5 ஓர் ஆள்குவையின் முழுச் செயற்சமன்பாடு (Overa ll performance equation of a control system)

மின் இயல், இயந்திர இயல், பாய்ம இயல் எனப் பிரித்துச் சொல்ல இயலாவண்ணம் ஆள்குவைகளில் பலவகை உறுப்புகளும் இயைந்து காணப்படுகின்றன. அவற்றின் செயற்சமன்பாடுகளைத் தனித்தனியே எழுதித் தக்கமுறையில் இணைக்கையில் ஆள்குவையின் முழுச்செயற் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இது 'குவை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு' (system differential equation) எனப்படும். இதை எழுதும் முறையை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

மாதிரி வினா 2.5

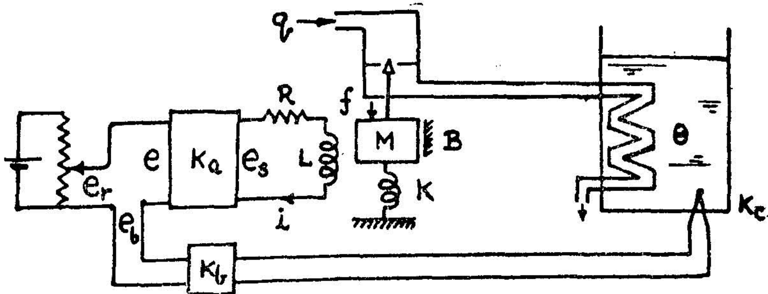
ஒரு நாழிற் கூடத்தில், தொட்டி ஒன்றில் கலக்கப்படும் நீர்மங்களின் வெப்ப நிலையைச் சீராக வைக்கும் ஆள்குவையின் அமைப்பு, படம் 2.34-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ் ஆள்குவையின் முழுச் செயற் சமன்பாட்டை வருவிக்க.

படம் 2.34 வெப்பநிலை ஒழுங்கமை குவை

1. மின் பிரித்தி
2. மின் திறன் பெருக்கி
3. மின் பெருக்கி
4. காந்தச் சுருள் இயக்கி
5. ஓரதர்
6. வெப்பம் ஊட்டுச் சுருள்
7. வெப்ப மின் மாற்றி
8. நீராவி புகு வழி

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெப்பநிலை ஒழுங்கமை குவையின் உருவியல் மாதிரியைப் படம் 2.35 இல் காண்க.



படம் 2.35 வெப்பநிலை ஒழுங்கமை குவையின் உருவியல்மாதிரி

இவ் ஒழுங்கமைகுவை வேலைசெய்யும் விதம் வருமாறு: தொட்டியில் தேவையான வெப்பநிலைக்கு ஏற்ப ஒரு மின் அழுத்தம் (e) மின் பிரித்தியில் உண்டாக்கப்படுகிறது. இதுவே ஆதார அறிகுறி (reference input). உண்மையான வெப்பநிலை அளக்கப்பட்டு, அதற்குப் பொருத்தமான மின் அழுத்தம் (e_c) ஒன்று வெப்பமின் மாற்றியில் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. இதன் அளவு பெருக்கப்பட்டு (θ_b), ஆதார அறிகுறிக்கும் இதற்கும் உள்ள வேறுபாடு ($e = e_r - \theta_b$), திறன் பெருக்கப்பட்டு (e_3) ஒரு சுருள் இயக்கியைச் செயற்பட வைக்கிறது. இதனால் ஓரதர் இடம் பெயர்ந்து நீராவியை வெப்பம் ஊட்டுக் குழாய்வழிச் செலுத்துகிறது. தொட்டியின் வெப்பநிலை உயருகிறது. தேவையான வெப்பநிலை அடையப்பட்டதும், e சுழியாகி, ஓரதரை மூடி, நீராவி ஒழுக்கை நிறுத்திவிடுகிறது.

செயற் சமன்பாடுகள் :

வழுக் கணிப்பி : $e = e_r - e_b$

திறன் பெருக்கி : $e = K_a e$

மின் காந்தச் சுருள் : $e_s = Ri + L \dfrac{di}{dt}$

சுருள் இயக்கி: $f = K_s i = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$

ஓரதர் : $q = K_d x$

வெப்பம் ஊட்டு கலன் : தொட்டியின் வெப்பத் தேக்குமை C_t வெப்பத்தடை R_t, சூழலின் வெப்பநிலை சுழிஎன்று கொண்டால்,

உள்பாய் வெப்பவேகம் = தொட்டியில் வெப்பம் தேங்கும் வேகம் + சுவர்களின் ஊடு வெப்பம்வெளியேறும் வேகம்

அதாவது, $q = C_t \dot{\theta} + \frac{1}{R_t}\theta$

வெப்பமின் மாற்றி $e_c = K_c\,\theta$

பின்னூட்டுப் பெருக்கி: $e_b = K_b\,e_c$

இச் சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றையும் ஒன்ருய் இணைப்போம்.

$\frac{d}{dt} = D$, என்க.

எனவே

$$e_r = e + \quad _b$$

$$e_s = K_a\,e = (R + LD)\,i$$

$$f = \qquad i = (MD^2 + BD + K)\,x$$

$$q = K_d\,x = \left(C_tD + \frac{1}{R_t}\right)\theta$$

$$e_c = K_c\,\theta$$

$$e_b = K_b e_c$$

$$\left(C_t + \frac{1}{R_t}\right)\theta = K_d\,x$$

$$= K_d\left(\frac{K_s}{MD^2 + BD + K}\right) i$$

$$= \frac{K_d\,K_s}{MD^2 + BD + K}\,\frac{K_a}{R + LD}\,e$$

$$\therefore e = \frac{(R + LD)(MD^2 + BD + K)}{K_a\,K_d\,K_s}\left(C_t\,D + \frac{1}{R_t}\right)\theta$$

$$e_b = K_b\,K_c\,\theta$$

$$e_r = e + e_b$$

$$= \left[\frac{(R + LD)(MD^2 + BD + K)(R_tC_t\,D + 1)}{R_t\,K_a\,K_d\,K_s} + K\ \ K_c\right]\theta$$

அல்லது,

$$[(R_t + LD)(MD^2 + BD + K)(R_t C_t D + 1) + K_b K_c R_t K_a K_d K_s]\theta = R K_a K_d K_s e$$

2.3 குலைகளின் உரு ஒற்றுமை (System Analogies)

2·3.1 உரு ஒற்றுமை—விளக்கம்

பலவகைப்பட்ட உருவியல் குலைகளின் (physical systems) செயற் சமன்பாடுகளை எழுதும்பொழுதும், அவற்றின் செயல்களை ஆயும்பொழுதும் அவற்றிடையே ஓர் ஒற்றுமை புலப்படுகிறது.

பகுதி 2.1—ல் கண்ட அட்டவணைகளில் இருந்தும், பகுதி 2·1.5-ல் உள்ள சமன்பாடுகளில் இருந்தும் இவ் உரு ஒற்றுமை தெளிவாகும். சான்று :

மின் இயல் : $i = C \frac{de}{dt} + \frac{1}{R} e + \frac{1}{L} \int e\,dt$

இயந்திரக் கோட்டு இயல் : $f = M \frac{dv}{dt} + Bv + K \int v\,dt$

இயந்திரச் சுழல் இயல் : $T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + K \int \omega\,dt$

C, R, L, M, B, K போன்ற உருவியல் கெழுக்களுக்கு எண் மதிப்புக் கொடுத்துவிட்டால், இக்குலைகளின் செயற் சமன்பாடுகள் ஒரே உருவை அடைகின்றன. இதையே 'உரு ஒற்றுமை' (analogy) என்கிறோம்.

இவ்வாறு ஒரே உருவினதான (same form) செயற் சமன்பாட்டை உடைய குலைகள் 'உரு ஒற்றுமைக் குலைகள்' analogous system) எனப்படும்.

இத்தகைய குலைகளின் உரு ஒற்றுமை பற்றிய அறிவு பலவகைகளிலும் உதவுகிறது :

(1) செயற் சமன்பாட்டின் பொதுஉருவிற்குத் தீர்வு கண்டால் அதையே பலவகைக் குலைகளுக்கும் தக்க சிறு மாற்றங்களுடன் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

(2) உரு ஒற்றுமையின் வழியாக ஒரு குலையைப் பற்றி அதிக ஆழமாக அறிய வாய்ப்புக்கள் உண்டு.

(3) உரு ஒற்றுமைக் கணிப் பொறியின் (analog computer) வாயிலாக, எவ்வகைக் குவையின் செயலையும் ஆராய இயலும். இதற்கு வேண்டுவது எல்லாம் குவைகளின் மின்னியல் ஒற்றுமை உருவே.

(4) உரு ஒற்றுமை ஆய்வுக்கும் வரம்பு உண்டு. ஒரோ இடங்களில் ஒற்றுமை உரு காணல் இயலாது போகும், அல்லது, புனையும் ஒற்றுமை உரு சரியான முடிவுகளைத் தராது போகும். ஆழ்ந்த பொறியியல் அறிவும், அனுபவமுமே வரம்புகளைக் காட்டும்.

மின் சுற்றுக் கோட்பாட்டு ஆய்வு (circuit analysis) பெரு வளர்ச்சி அடைந்துள்ளதாலும், ஒற்றுமை உரு கணிப் பொறி ஆய்வுக்கு வசதியாக இருப்பதாலும், பல வகைக் குவைகளுக் கான மின் இயல் ஒற்றுமை உரு காணும் முறைக்கே சிறப்பிடம் தரப்படுகிறது.

2·3.2 விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு (Force-current analog)

ஓர் இயந்திரக் கோட்டு இயற் குவைக்கு, மின் இயல் ஒற்றுமை உரு காண்கையில், விசைக்குப் பதில் சமன்பாட்டில் மின்னோட்டம் இருப்பின் அதனை 'விசை ஓட்ட ஒற்றுமை உரு' என்பர். இதுபோல் சுழல் இயற் குவைக்குத் திருப்பு விசை ஓட்ட ஒற்றுமை உரு (Torque-current analog) ஒன்று காணலாம்.

$$f = M\frac{dv}{dt} + Bv + K\int vdt$$

$$T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega + K\int \omega dt$$

$$i = C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L}\int edt$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடுக.

$f \rightarrow i$	$T \rightarrow i$
$M \rightarrow C$	$J \rightarrow C$
$B \rightarrow \frac{1}{R}$	$B \rightarrow \frac{1}{R}$
$K \rightarrow \frac{1}{L}$	$K \rightarrow \frac{1}{L}$
$v \rightarrow e$	$\omega \rightarrow e$

இம் மாற்றங்களை அட்டவணை 2.6-ல் காணலாம்.

அட்டவணை 2.6—விசை திருப்பு விசை - ஓட்ட உரு ஒற்றுமை

இயந்திரக் கோட்டு இயல்		மின் இயல்		இயந்திரச் சுழல் இயல்	
விசை	f	மின் ஓட்டம்	i	திருப்பு விசை	T
நேர் வேகம்	v	மின் அழுத்தம்	e	கோண வேகம்	ω
பொருண்மை	M	மின் தேக்கம்	C	நிலைமத் திருப்பு விசை	J
உராய்தடை	B	கடத்துமை	$\frac{1}{R}$	உராய் தடை	B
மீள் தடை	K	$\frac{1}{\text{மின் தூண்டம்}}$	$\frac{1}{L}$	முறுக்குத் தடை	K

விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு காணல்

1. இயந்திரக் குவையின் இயந்திர வலைப்படத்தை (mechanical network diagram) வரைக.

2. (i) பொருண்மைக்குப் பதில் மின் தேக்கியை வரைக. (அதாவது, சதுரத்தின் இருபக்கக் கோடுகளையும் நீக்கி விடுக.)

$$M = C.$$

(ii) மீள் தடைக்குப்பதில் தூண்டுத்தடைச்சுருளை வரைக. (அதாவது, விற் சுருளின் உருவை மாற்றுது விடுக.)

$$K = \frac{1}{L}$$

(iii) உராய் தடைக்குப் பதில் மின்தடையை வரைக. (அதாவது, உராய்தடை உருளையை நீக்கி, மின் தடைக் கூறு ஒன்றை வரைக)

$$B = \frac{1}{R}$$

(iv) விசை வழங்கிக்குப் (force source) பதில் மின் ஓட்ட வழங்கியையும் (current source), வேக வழங்கிக்குப்

(velocity source) பதில் மின் அழுத்த வழங்கியையும் வரைக (voltage source).

$f = i, v = e.$

இவ்வழியில் கிடைக்கும் மின் வலையே (electrical network) விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு ஆகும்.

குறிப்பு : திருப்பு விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு வில்,

(i) நிலைமத் திருப்பு விசைக்குப் பதில் மின் தேக்கியும் $J = C$

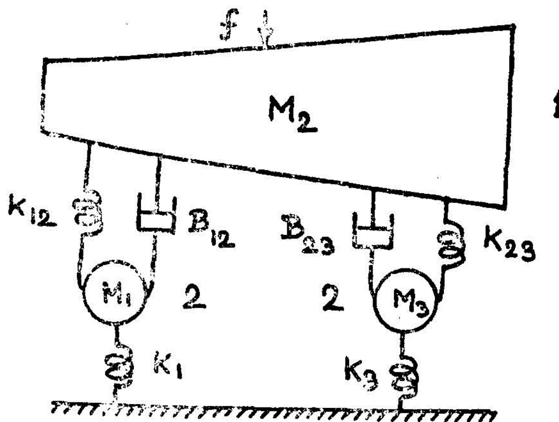
(ii) சுழல் தடைக்குப் பதில் கடத்துமையும் $B = \frac{1}{R}$

(iii) முறுக்கத் தடைக்குப் பதில் தூண்டல் தடையும் $K = \frac{1}{L}$

வரையப்படுகின்றன.

மாதிரி வினா 2.6.

ஒரு சிற்றுந்து (car), ஒரு திருப்பு விசை இயக்கி (torque motor) இவற்றின் உருவியல் மாதிரிகள் படம் 2.36, 2.37-ல் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் விசை திருப்புவிசை ஓட்ட ஒற்றுமை உருவை வருவிக்க.

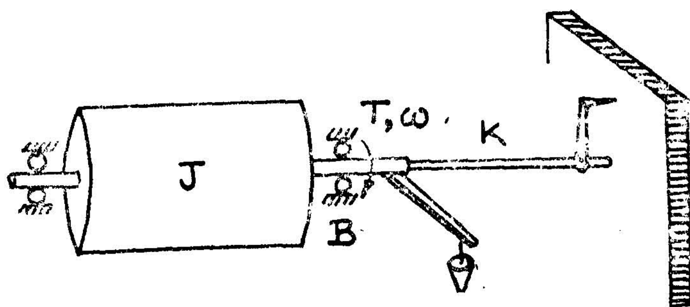


படம் 2.36—சிற்றுந்து - உருவியல் மாதிரி

1. சிற்றுந்தின் உடல் (body of the car)
2. சாலை ஆழிகள் (road wheels)

தீர்வு :

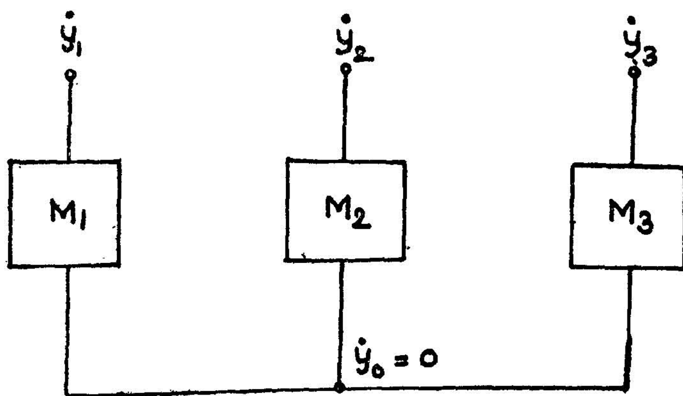
(அ) இயந்திரக் கோட்டு இயற்குவை: சிற்றுந்து **(Mechanical translational system —car)**



படம் 2.37—திருப்பு விசை இயக்கி

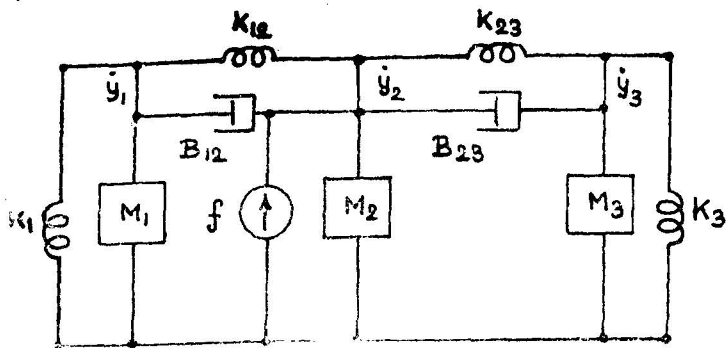
1. கொடுக்கப்பட்ட சிற்றுந்தின் உருவியல் மாதிரிக்கு (படம் *2 3́6)* ஓர் இயந்திர வலைப்படம் வரையலாம்.

படி *1 :*



படம் 2.38

படி 2 :



படம் 2.39—சிற்றுந்தின் இயந்திர வலைப்படம்

2. விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு காணத் தேவையான மாற்றங்கள் :

$$M \rightarrow C$$

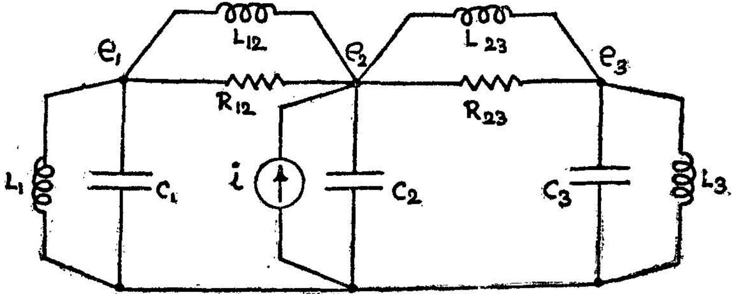
$$B \rightarrow \frac{1}{R}$$

$$K \rightarrow \frac{1}{L}$$

$$f \rightarrow i$$

$$y \rightarrow e$$

இவ்வழியில் கிடைக்கும் ஒற்றுமை உருவைக் கீழே (படம் 2.40) காணலாம்.

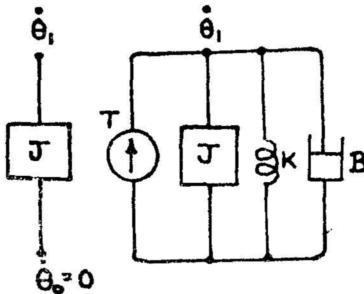


படம் 2.40—சிற்றுந்தின் F-I ஒற்றுமை உரு

F : இயந்திர விசை
I : மின் ஓட்டம்

(ஆ) இயந்திரச் சுழல் இயற்குவை : திருப்பு விசை இயக்கி (Mechanical rotational system : Torque motor)

1. கொடுக்கப்பட்ட திருப்பு விசை இயக்கியின் உருவியல் மாதிரிக்கு (படம் 2.37) ஓர் இயந்திர வலைப் படம் வரையலாம்.



படம் 2.41—திருப்பு விசை

2. ஒட்ட ஒற்றுமை உரு காணத் தேவையான மாற்றங்கள் :

$J \rightarrow C$

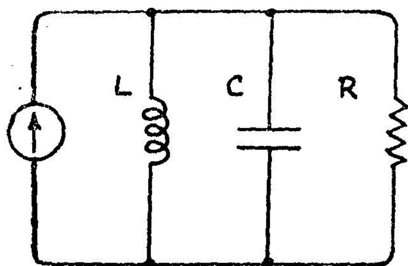
$B \rightarrow \frac{1}{R}$

$K \rightarrow \frac{1}{L}$

$T \rightarrow i$

$\omega \rightarrow e$

திருப்பு விசை – ஒட்ட ஒற்றுமை உருவைப் படம் 2.42-ல் காணலாம்.



படம் 2.42

2·3.3 விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உரு
(Force - voltage analog)

ஓர் இயந்திரக் கோட்டு இயற்குவையின் மின்னியல் ஒற்றுமை உரு காண்கையில், செயற் சமன்பாட்டில் விசைக்குப் பதில் மின் அழுத்தம் வருவது 'விசை–அழுத்த ஒற்றுமை உரு' ஆகும். இதுபோல் சுழல் இயற் குவையில் ஒற்றுமை உருவில் சுழல் திறனுக்குப் பதில் மின் அழுத்தம் வரும். இதை 'திருப்பு விசை–அழுத்த ஒற்றுமை உரு' என்பர்.

$$f = M \frac{dv}{dt} + Bv + K \int vdt$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + K \int \omega dt$$

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{e} \int idt$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளைக் காண்க. ஒத்த உருவை உடைய இவை உரு ஒற்றுமை உடைய குவைகளைக் குறிக்கின்றன. விசை (f)

அல்லது திருப்புவிசை T உள்ள இடத்தில் மின் அழுத்தம் e வருகிறது.

இத்தகைய விசை அல்லது திருப்புவிசை – அழுத்த ஒற்றுமை உரு காண்கையில் செய்யலாகும் மாற்றங்களை அட்டவணை 2.7–ல் காணலாம்.

அட்டவணை 2.7—விசை திருப்பு விசை - அழுத்த உரு ஒற்றுமை

இயந்திரக் கோட்டு இயல்		மின் இயல்		இயந்திரச் சுழல் இயல்	
விசை	f	மின் அழுத்தம்	e	திருப்பு விசை	T
நேர் வேகம்	v	மின் ஓட்டம்	i	சுழல், வேகம்	ω
பொருண்மை	M	மின் தூண்டம்	L	நிலைமத் திருப்பு விசை	J
உராய் தடை	B	நேர்மின் தடை	R	உராய் தடை	B
மீள் தடை	K	$\frac{1}{\text{மின்தேக்கம்}}$	$\frac{1}{C}$	முறுக்கத் தடை	K

விசை – அழுத்த ஒற்றுமை உரு காணல்

விசை திருப்பு விசை – அழுத்த ஒற்றுமை உரு காண்டற்கு உரிய படிகள் வருமாறு :

1. இயந்திரக் குவையின் இயந்திர வலைப் படத்தை வரைக.

2. அதில் இருந்து விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உருவை வருவிக்க.

3. விசை – ஓட்ட ஒற்றுமை உருவின் 'மறு உருவை' (dual) வரைக. அதுவே விசை – அழுத்த ஒற்றுமை உரு ஆகும்.

மறு உரு காணல் : புள்ளி முறை (Finding out the Dual network - Dot method)

'புள்ளி முறை' (dot method) என்னும் எளிய வரைபட முறையால் ஒரு மின் வலையின் மறுஉருவை விரைவிற் காணலாம். இதன் படிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

1. மின் வலையின் ஒவ்வொரு தனிச்சுற்றின் (independent loop) நடுவிலும் ஒரு புள்ளியும், வலைக்கு வெளியே ஓர் ஆதாரப் புள்ளியும் (reference point) வரைக. இப் புள்ளிகளே மின் வலையின் மறு உருவில் சந்திகளாக இருக்கும்.

2. அடுத்தடுத்த சுற்றுகளில் உள்ள புள்ளிகளைப் பொதுக் கிளையின் ஊடு செல்லும் கோடுகளால் இணைக்க. இக்கோடு களில் பொதுக் கிளைக் கூறின் மறு உருவை (dual of the element in the common branch) இணைக்க.

அட்டவணை 2.8—மறு உரு அட்டவணை

மின் ஓட்டம்	i	மின் அழுத்தம்	e
மின் அழுத்தம்	e	மின் ஓட்டம்	i
தேக்கம்	C	தூண்டம்	L
தூண்டம்	L	தேக்கம்	C
தடை	R	கடத்துமை	$\frac{1}{R}$

3. வெளிக் கிளைகளின் ஊடு செல்லும் கோடுகளால் உள் புள்ளிகளை, வெளிப்புள்ளியுடன் சேர்க்க. இக்கோடுகளில் வெளிக் கிளைக் கூறின் மறு உருவை இணைக்க.

இவ்வாறு கிடைக்கும் புதிய மின்வலையே விசை அழுத்த ஒற்றுமை உரு ஆகும்.

முக்கியக் குறிப்பு: மறு உரு காண்கையில், மின் வலையின் எந்த ஒரு கூறும், வரை கோடு ஒன்றால் வெட்டப்படாது இருக்கக் கூடாது; ஒரு முறைக்கு மேலும் வெட்டுப்படக் கூடாது.

மாதிரி வினா 2.7

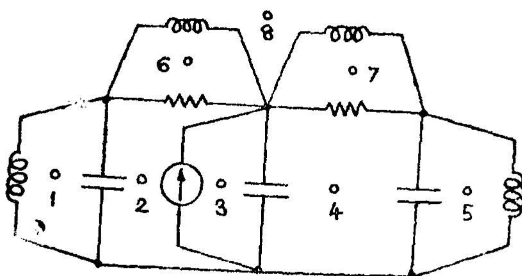
ஒரு சிற்றுந்து (car), ஒரு திருப்பு விசை இயக்கி (torque motor) இவற்றின் உருவியல் மாதிரிகள் படம் 2.36, 2.37-ல் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் விசை திருப்பு விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உருவை வருவிக்க.

தீர்வு:

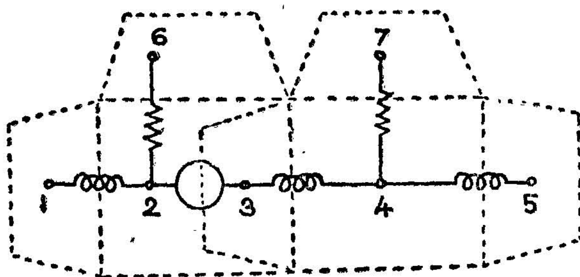
(அ) இயந்திரக் கோட்டு இயற்குவை: சிற்றுந்து

மாதிரி வினா 2.6-ன் தீர்வில் கொடுக்கப்பட்ட சிற்றுந்தின் (படம் 2.36) இயந்திர வலைப் படத்தை வருவித்தோம். (படம் 2.37) பிறகு அதில் இருந்து விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு கிடைத்தது (படம் 2.40).

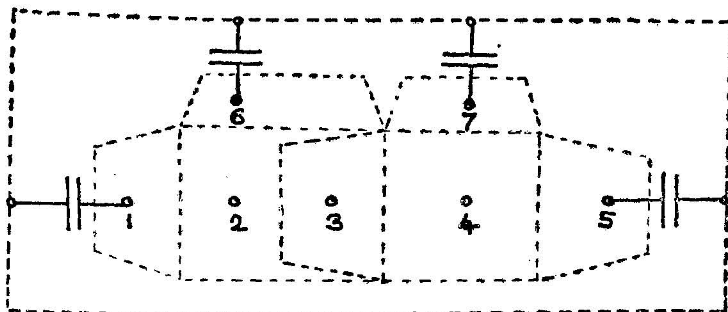
புள்ளி முறையில் இதன் மறு உரு காணும் படிகளைக் கீழே காணலாம்.



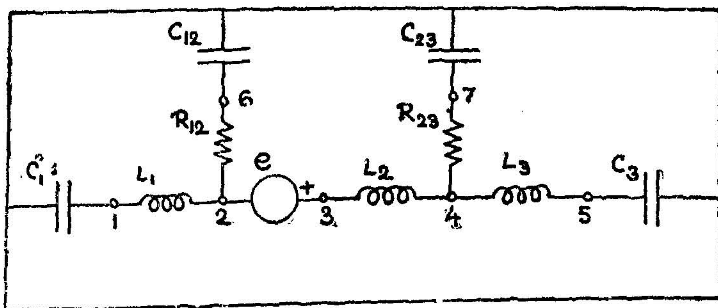
படம் 2.43
சிற்றுந்தின் விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு படி 1.



படம் 2.44
சிற்றுந்தின் விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு : படி 2

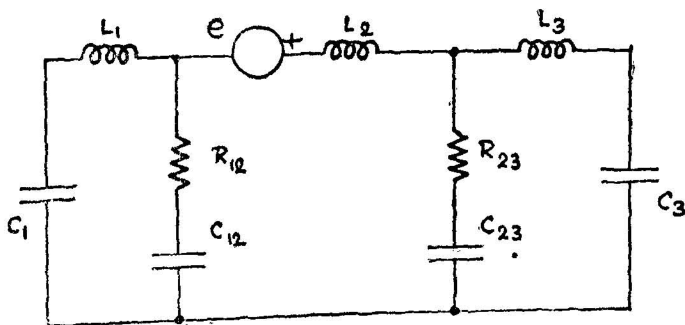


படம் 2.45—சிற்றுந்தின் விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு : படி 3



படம் 2.46—சிற்றுந்தின் விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உரு : படி 4

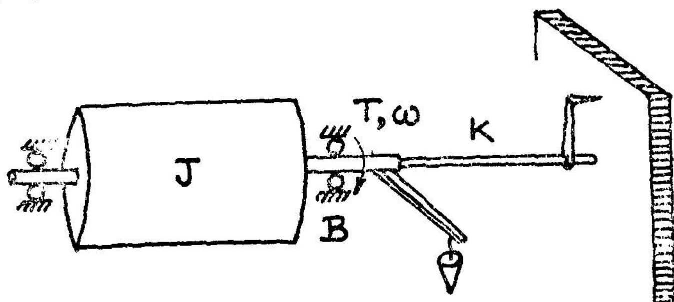
இறுதியாக, இப்படத்தை (2.46) கீழ்வருமாறு வரையலாம்.



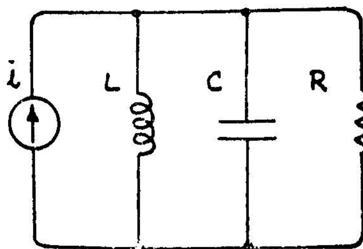
படம் 2.47—சிற்றுந்தின் விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உரு

(ஆ) இயந்திரச் சுழல் இயற் குவை : திருப்பு விசை இயக்கி

படம் 2.37-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சுழல் திறன் இயக்கியின் இயந்திர வலைப் படத்தையும் (படம் 2.41) திருப்புவிசை ஒட்ட ஒற்றுமை உருவையும் (படம் 2.42, மாதிரி வினா 2.6-ல்) வருவித்தோம்.

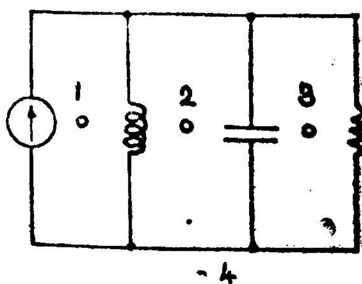


படம் 2.37—திருப்பு விசை இயக்கி

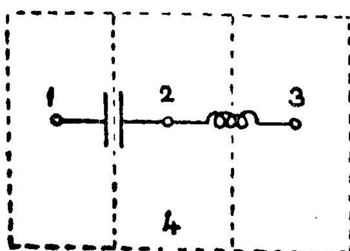


படம் 2.42—திருப்பு விசை இயக்கியின் திருப்பு விசை ஓட்ட ஒற்றுமை உரு

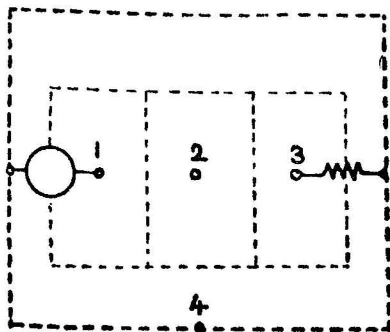
இந்த மின் வலையின் மறு உருவைப் புள்ளி முறையில் கண்டு பிடிப்போம். கீழ்க்காணும் படங்கள் இதன் படிகளைக் காட்டுகின்றன.



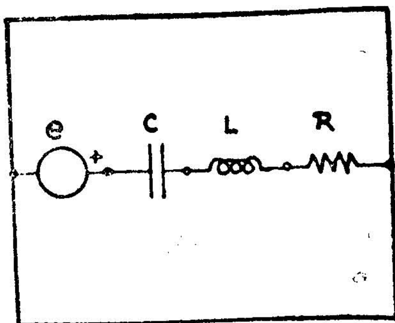
படம் 2.48—படி 1



படம் 2.49—படி 2

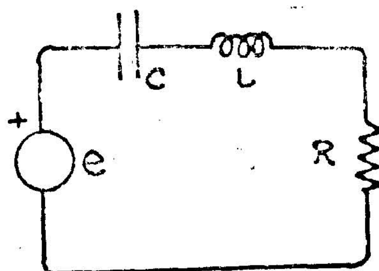


படம் 2.50—படி 3



படம் 2.51—படி 4

இறுதியாகக் கிடைத்த மின் வலையைக் கீழ்வருமாறு மாற்றி வரையலாம்.



படம் 2.52—திருப்பு விசை இயக்கியின் திருப்ப விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உரு

இதுவே (படம் 2.47) கொடுக்கப்பட்ட திருப்பு விசை இயக்கியின் அழுத்த ஒற்றுமை உருவாகும்.

2.3.4 பாய்ம இயல் மின் இயல் உரு ஒற்றுமை

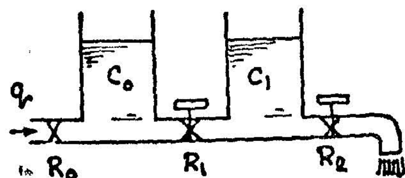
குவிக் கூறுகளை (lumped elements) உடைய மாதிரி பாய்ம இயற் குலைகளுக்கும், மின் இயற் குலைகளுக்கும் நெருக்கமான உரு ஒற்றுமை உண்டு. இதைக் கீழ்வரும் அட்டவணையில் விளக்கமாகக் காணலாம்.

அட்டவணை 2.9—பாய்ம இயல் மின் இயல் உரு ஒற்றுமை

1) கூறுகள்	
பாய்மத் தடை R	மின் தடை R
பாய்மத் தேக்கம் C	மின் தேக்கம் C
2) மாறிகள்	
பாய்ம ஓட்டம் q	மின் ஓட்டம் i
பாய்ம அழுத்தம் p	மின் அழுத்தம் e
3) சமநிலை உறவு :	
பாய்ம ஓட்டத் தொடர்ச்சி விதி	கிர்கா∴பு மின் ஓட்ட விதி
4) உருவியல் உறவுகள் :	
$q = \frac{1}{R} p$	$i = \frac{1}{R} e$
$p = L \frac{dq}{dt}$	$e = L \frac{di}{dt}$
$q = C \frac{dp}{dt}$	$i = C \frac{de}{dt}$

மாதிரி வினா 2.8

ஓர் எளிய பாய்மக் குலையைப் படத்தில் காண்க. ஓரதர் 2
(i) முழுதும் மூடி இருக்கையிலும்
(ii) சிறிது திறந்து இருக்கையிலும்
(iii) முழுதும் திறந்து இருக்கையிலும்
அதன் மின் இயல் ஒற்றுமை உரு என்ன மாற்றங்களை அடையும்?

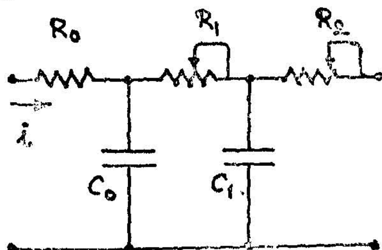


படம் 2.53—ஒரு பாய்மக் குலை

தீர்வு :

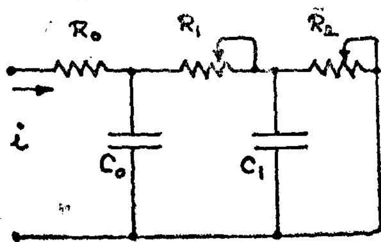
தொட்டிகள் தேக்கங்களாகவும், குறுக்கங்கள் தடைகளாகவும், ஓரதர் கட்டுப்படுத்தும் குறுக்கங்கள் மாறக்கூடிய தடைகளாகவும் செயற்படுகின்றன.

(1) ஓரதர் 2 முழுதும் மூடி இருக்கையில் பாய்ம ஓட்டம் நின்றுவிடுகிறது. ஒற்றுமை உரு மின் குலையில் இதற்கு ஏற்ப மின் ஓட்டம் சுழியாக வேண்டும். எனவே, ஈட்டச் சுற்று (output circuit) திறந்து இருக்கிறது. $R_2 \rightarrow \infty$. *(படம் 2.49)*



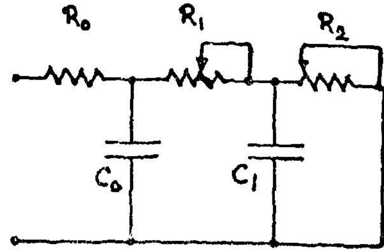
படம் 2.54—மின்னியல் ஒற்றுமை உரு 1

(2) ஓரதர் 2 சிறிது மூடி இருக்கையில் பாய்ம ஓட்டம் இருக்கும். ஒற்றுமை உரு மின்குலையிலும் மின் ஓட்டம் இருக்கும். $O < R_2 < \infty$ *(படம் 2.50).*



படம் 2.55—மின்னியல் ஒற்றுமை உரு 2

(3) ஓரதர் 2 முழுதும் திறந்து இருக்கையில் பாய்ம ஓட்டம் உச்சமாக இருக்கும். ஒற்றுமை உரு மின் குலையில் மின் ஓட்டமும் உச்சமாக இருக்கும். $R_2 \rightarrow o$ *(படம் 2.51).*



படம் 2.56—மின் இயல் ஒற்றுமை உரு 3

2·3.5 வெப்ப இயல் - மின் இயல் உரு ஒற்றுமை

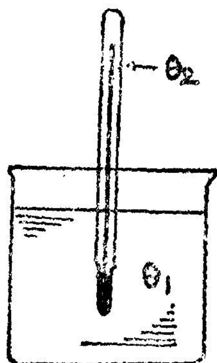
குவிக் கூறுகளை (lumped elements) உடைய வெப்ப இயற்குவைகளுக்கும், மின் இயற் குவைகளுக்கும் உள்ள உரு ஒற்றுமையை அட்டவணை 2.10–ஆல் தெளியலாம்.

அட்டவணை 2.10—வெப்ப இயல் மின் இயல் உரு ஒற்றுமை

வெப்ப இயற்குவை	மின் இயற் குவை
1) கூறுகள் :	
வெப்பத் தடை R	மின் தடை R
வெப்பத் தேக்கம் C	மின் தேக்கம் C
2) மாறிகள் :	
வெப்ப ஓட்டம் q	மின் ஓட்டம் i
வெப்ப நிலை θ	மின் அழுத்தம் e
3) சமநிலை உறவு :	
வெப்ப இயக்க முதல் விதி	கிர்காஃபு மின் ஓட்ட விதி
வேலையில்லா, வெப்பம் மாறும் புள்ளியில்	
$\Sigma q = 0$	$\Sigma i = 0$
4) உருவியல் உறவுகள் :	
$q = \frac{1}{R}\theta$	$i = \frac{1}{R}e$
$q = C\frac{d\theta}{dt}$	$i = C\frac{de}{dt}$

மாதிரி வினு 2.9

ஓர் எளிய பாதரச வெப்பமானியின் மின்இயல் ஒற்றுமை உருவைக் காண்க.



படம் 2.57—பாதரச வெப்பமானி

படம் 2.57-ல் காணும் வெப்பமானியில் நீரின் வெப்பநிலை θ_1. வெப்பமானியினுள் பாதரசத்தின் வெப்பநிலை θ_2, சூழலின் வெப்பநிலை $\theta_3 = 0$, என்று கொள்க.

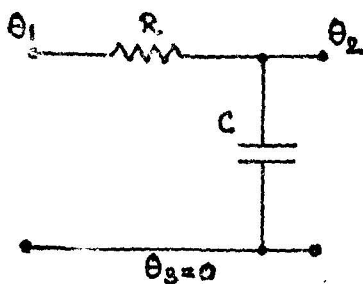
நிர்வு :

தொட்டியில் உள்ள நீரின் வெப்பநிலை θ_1. இது பாதரசத்திற்குச் சூடு ஏற்றுகிறது. பாதரசக் கம்பத்தின் வழியாக வெப்பம் கடத்தப்பட்டு மேல் முனையில் θ_2 என்ற வெப்பநிலை கிடைக்கிறது. பாதரசக் கம்பத்தின் வெப்பத் தடை R என்க.

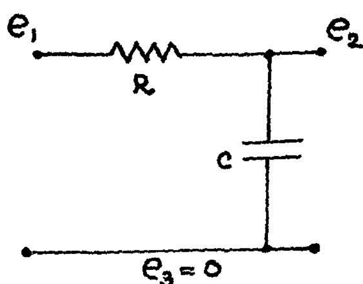
வெப்பமானியின் சுவர்கள் கண்ணுடியால் ஆனவை. கண்ணுடி அரிதில் கடத்தி. அது வெப்பத்தை வெளி விடாது தேக்கிக் கொள்ளும். வெப்பத் தேக்கம் C என்க.

ஒற்றுமை உரு மின்குவையில் (Anulagous electrical system) θ_1, θ_2 என்ற வெப்ப நிலைகளுக்குப் பதில் e_1, e_2 என்ற மின் அழுத்தங்கள் இருக்கும். இவை இரண்டு சந்திகள். இவற்றின் இடையே மின்தடை R இருக்கும்.

$\theta_3 = 0$ என்பது ஆதாரச் சந்தி $e_3 = 0$ ஆகிறது. e_2, e_3 — சந்திகளுக்கு இடையே மின் தேக்கி C இருக்கிறது (படம் 2.58).



படம் 2.58—வெப்ப நிலை (Thermal network)

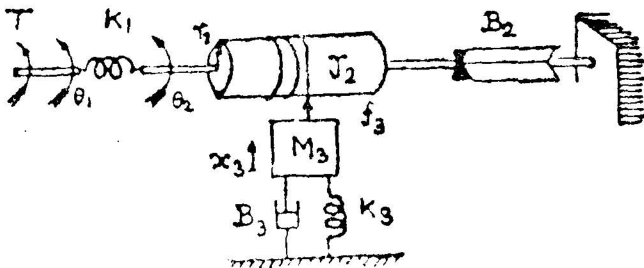


படம் 2.59—ஒற்றுமை உரு மின்வலை

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளை இனிக் காணலாம்.

மாதிரி வினா 2.10

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயந்திரக் குவையின் (படம் 2.60) வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை எழுதுக. ஊட்டம் θ_1, ஈட்டம் x_3 இவற்றின் இடை உறவைக் காட்டும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை வருவிக்க.

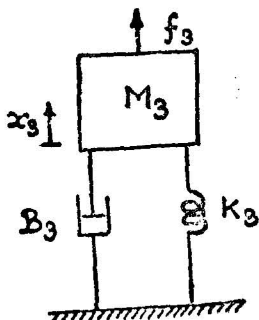


படம் 2.60—ஓர் இயந்திரக் குவை

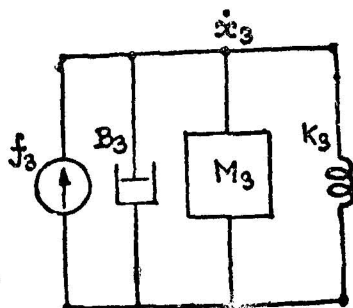
தீர்வு:

இவ் இயந்திரக் குவையில் சுழல் இயல், நேர் கோட்டு இயல் ஆகிய இருவகைக் குவைக் கூறுகளும் உள்ளன. எனவே, இக் குவையை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்து ஆய்ந்து பிறகு இணைக்கலாம்.

நேர் கோட்டு இயற் பகுதி:



படம் 2.61—இயந்திரப் பகுதி

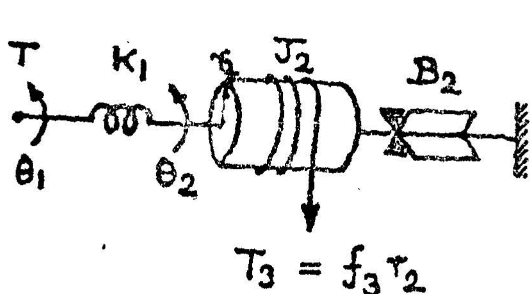


படம் 2.62—இயந்திர வலைப்படம்

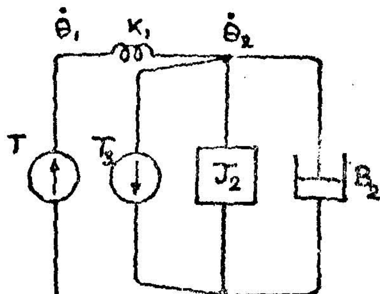
செயற் சமன்பாடு:

$$M_3 \ddot{x}_3 + B_3 \dot{x}_3 + K_3 x_3 = F_3 \qquad \dots (1)$$

சுழல் இயற் பகுதி :



படம் 2.63—இயந்திரப் பகுதி



படம் 2.64—இயந்திர வலைப்படம்

செயற் சமன்பாடுகள்

$$K_1(\theta_1 - \theta_2) - T = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + T_3 + K_1(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$T_3 = F_3 r_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

இந்தச் செயற் சமன்பாடுகளை ஒன்ருய் இணைக்க.

$$(J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + K_1\theta_2) + r_2(M_3\ddot{x}_3 + B_3\dot{x}_3 + K_3x_3) = K_1\theta_1$$

$x_3 = r_2\theta_2$, $\frac{d}{dt} = D$ என்று பிரதியிட.

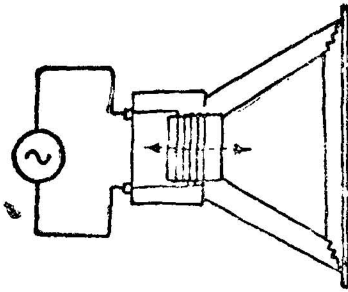
$$(J_2D^2 + B_2D + K_1)\frac{x_3}{r_2} + r_2(M_3D^2 + B_3D + K_3)x_3 = K_1\theta_1$$

அதாவது,

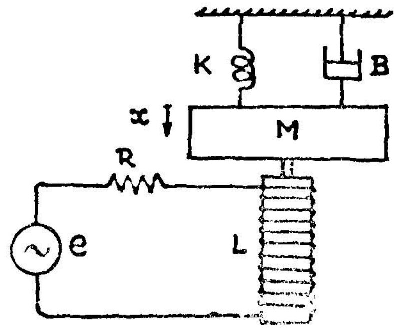
$$\left[\left(\frac{J_2}{r_2} + M_3r_2\right)D^2 + \left(\frac{B_2}{r_2} + B_3r_2\right)D + \left(\frac{K_1}{r_2} + K_3r_2\right)\right]x_3 = K_1\theta_1$$

மாதிரி வினு 2.11

ஒரு மின் இயக்கி ஒலி பெருக்கியும் அதன் செயல் ஒருமைச் சுற்றும் (equivalent circuit) படத்தில் (2.65, 2.66) காட்டப் பட்டுள்ளன. இவ்வியந்திர-மின் இயற்குவையின் செயற் சமன் பாடுகளை எழுதுக.



படம் 2.65—ஒலி பெருக்கி



படம் 2.66—செயல் ஒருமைச் சுற்று

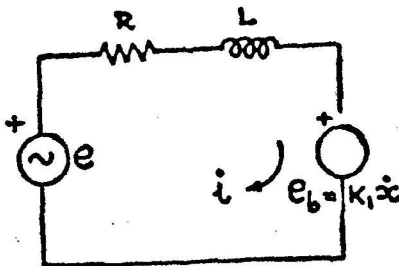
தீர்வு:

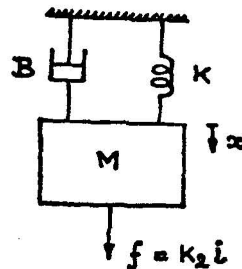
இயந்திர-மின் இயற் குவைக்கு, மின் இயங்கி ஒலி பெருக்கி நல்லதோர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

நிலைக்காந்தப் புலத்தில் ஒலிச்சுருள் (voice coil) அமைந்துள்ளது. அதன் வழி மின்னோட்டத்தைச் செலுத்தும்போது ஒரு விசை தோன்றுகிறது. இவ்விசை மின் ஓட்டத்திற்கு நேர் விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும். $f = K_2 i$.

இதனால் ஓர் இயக்கம் விளைகிறது. அப்பொழுது ஒலிச் சுருளில் ஒரு பின் அழுத்தம் (back emf) உண்டாகிறது. இது சுருளில் இயக்க வேகத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கும். $e_b = K_1 \dot{x}$.

ஒலி பெருக்கி செயல் ஒருமைச் சுற்றின் (equivalent circuit) இரு பகுதிகளைக் கீழே காண்க.





படம் 2.67—(அ) மின் இயங்கி ஒலி பெருக்கியின் பகுதிகள் (ஆ)

7

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + e_b$$

$$e_b = K_1 \dot{x}$$

$$f = K_2 i$$

$$f = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$$

இவற்றை ஒன்ருய் இணைக்க,

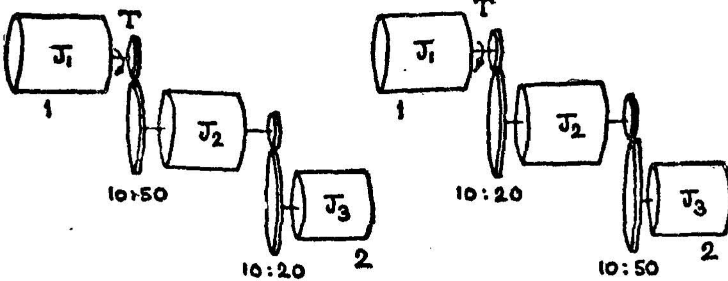
$$e = (R + LD)\, i + K_1\, Dx \qquad \left[\because \frac{d}{dt} = D \right]$$

$$K_2\, i = (MD^2 + BD + K)\, x$$

$$K_2\, e = \left[(R + LD)(MD^2 + BD + K) + K_1 D \right] x$$

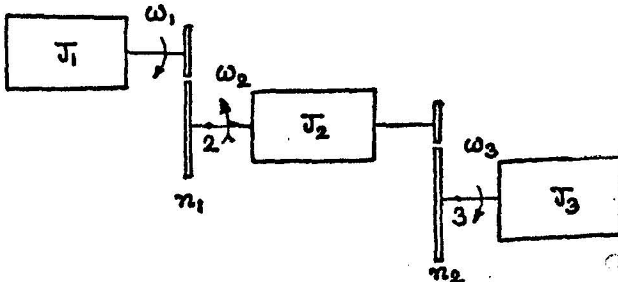
மாதிரி வினு 2.12

இரு பல்லிணைத் தொடர்கள் (gear trains) படத்தில் *(2.68)* காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் எது அதிக சுமை முடுக்கத்தைத் (load acceleration) தருகிறது என்று கணிக்க. இயந்திர வலைப் படம், மின்னியல் ஒற்றுமை உரு இவற்றை வரைக.



படம் 2.68—பல்லிணைத் தொடர்கள் (gear trains)

நீர்வு : பல்லிணைகள் வேகத்தைக் குறைக்கின்றன ; (செயல் திறன் மாருது இருப்பதால்) திருப்பு விசையைப் பெருக்குகின்றன.



படம்—2.69
பல்லிணைத் தொடர்

படம் 2.69 - ல் காட்டப்பட்டுள்ள பல்லிணைத் தொடரில், புள்ளி 3-ல் சுமை திருப்ப விசை (load torque)

$$T_3 = J_3 \dot{\omega}_3$$

பல்லிணை n_2க்கு முன் அதன் மதிப்பு ($n_2 < 1$)

$$T_3{}^1 = n_2 T_3 = n_2 J_3 \dot{\omega}_3$$

புள்ளி 2-ல் திருப்பு விசை

$$T_2 = J_2 \dot{\omega}_2 + T_3{}^1 = J_2 \dot{\omega}_2 + n_2 J_3 \dot{\omega}_3$$

பல்லிணை n_1 க்கு முன் அதன் மதிப்பு ($n_1 < 1$)

$$T_2{}^1 = n_1 T_2 = n_1 J_2 \dot{\omega}_2 + n_1 n_2 J_3 \dot{\omega}_3$$

புள்ளி 1-ல் திருப்பு விசை

$$T_1 = J_1 \dot{\omega}_1 + T_2{}^1 = J_1 \dot{\omega}_1 + n_1 J_2 \dot{\omega}_2 + n_1 n_2 J_3 \omega$$

எனவே இயக்கியின் திருப்பு விசை

$$T = J_1 \dot{\omega}_1 + n_1 J_2 \dot{\omega}_2 + n_1 n_2 J_3 \dot{\omega}_3$$

மேலும் $\omega_2 = n_1 \omega_1$

$$\omega_3 = n_2 \omega_2 = n_1 n_2 \omega_1$$

எனவே, $T = J_1 \dot{\omega}_1 + n_1{}^2 J_2 \dot{\omega}_1 + n_1{}^2 n_2{}^2 J_3 \dot{\omega}_1$

முதற் பல்லிணைத் தொடரில் $n_1 = \frac{10}{50}$, $n_2 = \frac{10}{20}$

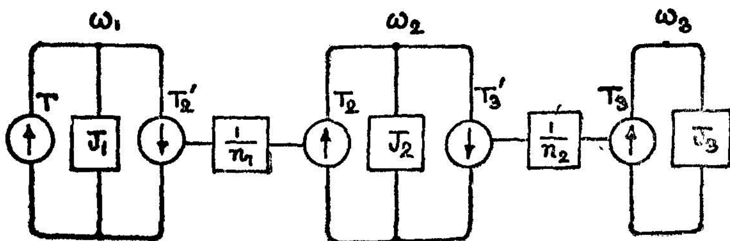
எனவே $T = J_1 \dot{\omega}_1 + \frac{1}{25} J_2 \dot{\omega}_1 + \frac{1}{100} J_3 \dot{\omega}_1$ ... (1,

இரண்டாம் பல்லிணைத் தொடரில் $n_1 = \frac{10}{20}$, $n_2 = \frac{10}{50}$

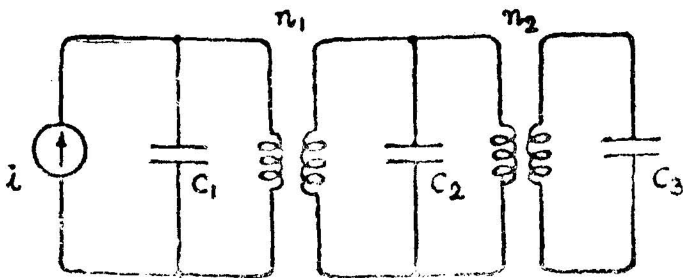
எனவே $T = J_1 \dot{\omega}_1 + \frac{1}{4} J_2 \dot{\omega}_1 + \frac{1}{100} J_3 \dot{\omega}_1$ ... (2)

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றை ஒப்பிடுகையில், முதல் தொடரில் தேவையான திருப்பு விசை இரண்டாம் தொடரில் தேவையான திருப்பு விசையை விடக் குறைவு என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, முதல் தொடரில் சுமை முடுக்கம் அதிகமாக இருக்கும்.

படம் 2.69-ல் உள்ள பல்லிணைத் தொடரின் இயந்திர வலைப் படத்தையும் (படம் 2.70), மின்னியல் ஒற்றுமை உருவையும் (படம் 2.71) கீழே காண்க.



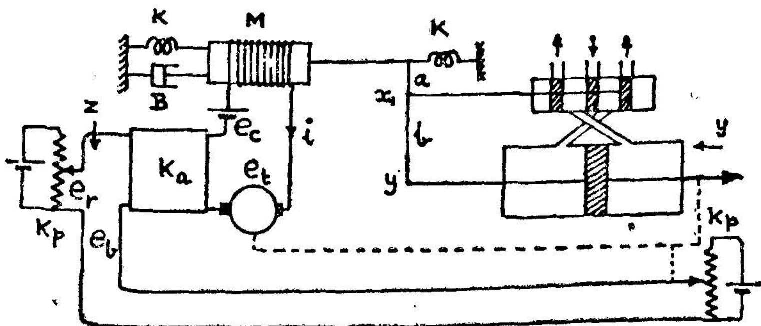
படம் 2.70—பல்லிணைத் தொடரின் இயந்திர வலைப் படம்



படம் 2.71—பல்லிணைத் தொடரின் மின்னியல் ஒற்றுமை உரு

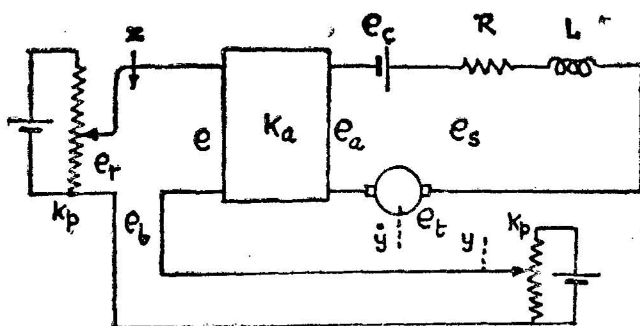
மாதிரி வினா 2.13

படத்திற் காணும் குவையின் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதுக.



படம் 2.72—ஓர் அடிமைக் குவை

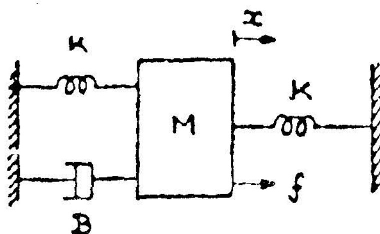
தீர்வு :



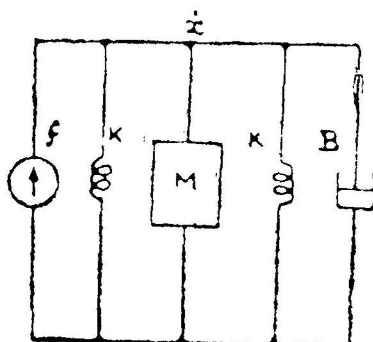
படம் 2.73—மின் இயற் பகுதி

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$e = e_r - e_b$$
$$e_r = K_p\, z$$
$$e_b = K_p\, y$$
$$e_a = K_a\, e$$
$$e_s = e_a + e_c - e_t$$
$$e_t = K_b\, \dot{y}$$
$$e_s = Ri + L\frac{di}{dt} + K_c\, \dot{x}$$ பின் அழுத்தம்



படம் 2.74—இயந்திரப் பகுதி

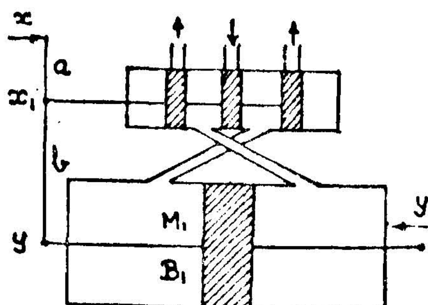


படம் 2.75—இயந்திர வலைப்படம்

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$f = K_s\, i$$

$$f = M\ddot{x} + B\dot{x} + 2K\, x$$



படம்—2.76—பாய்ம இயற் பகுதி

x_1 : ஓரதர்த் தண்டின் இடப் பெயர்ச்சி

p : அழுத்த வேறுபாடு

q : பாய்ம ஓட்டம்

A : திறன் உந்து வில்லையின் (power piston) பரப்பு, என்க.

$$q = k_1 x_1 - k_2 p$$

$$q = A\dot{y}$$

$$f = M\ddot{y} + B_1 \dot{y}$$

$$f = pA$$

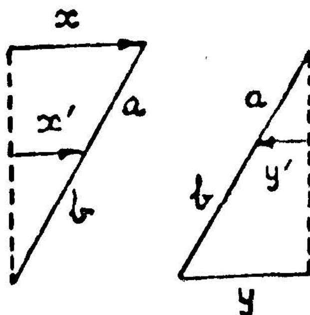
எனவே,

$$M_1 \ddot{y} + B_1 \dot{y} = A.\frac{1}{K_2}(K_1 x_1 - q)$$

$$= \frac{A}{K_2}(K_1 x_1 - A\dot{y})$$

அதாவது,

$$M_1 \ddot{y} + \left(B_1 + \frac{A^2}{K_2}\right)\dot{y} = \frac{AK_1}{K_2} x_1$$



படம் 2.77—மின் இணைப்புத் தண்டின் இயக்கம்

படம் 2.77–ல் இருந்து,

$$x_1 = x^1 - y^1$$

$$= \frac{b}{a+b} x - \frac{q}{a+b} y$$

எனவே,

$$M_1 \ddot{y} + \left(B_1 + \frac{A^2}{K_2}\right)\dot{y} + \frac{AK_1}{K_2}\left(\frac{a}{a+b}\right)y = \frac{AK_1}{K_2}\left(\frac{b}{a+b}\right)x$$

இவ் அடிமைக் குவையின் செயற் சமன்பாடுகள் சுருக்கமாகக் கீழே தொகுத்துத் தரப்பட்டுள்ளன.

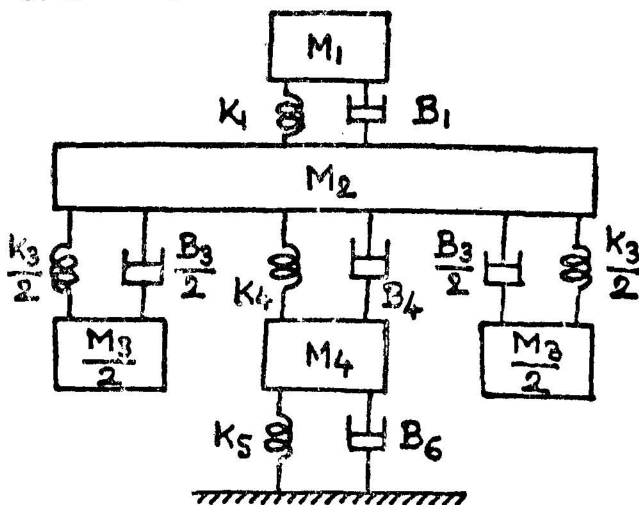
$$K_a\, K_p\,(z - y) + e_c - K_b\,\dot{y} = Ri + L\frac{di}{dt} + K_c\,\dot{x}$$

$$K_s\, i = M\ddot{x} + B\dot{x} + 2Kx$$

$$M_1 \ddot{y} + \left(B_1 + \frac{A^2}{K_2}\right)\dot{y} + \frac{AK_1}{K_2}\left(\frac{a}{a+b}\right)y = \frac{AK_1}{K_2}\left(\frac{b}{a+b}\right)x$$

மாதிரி வினா 2.14

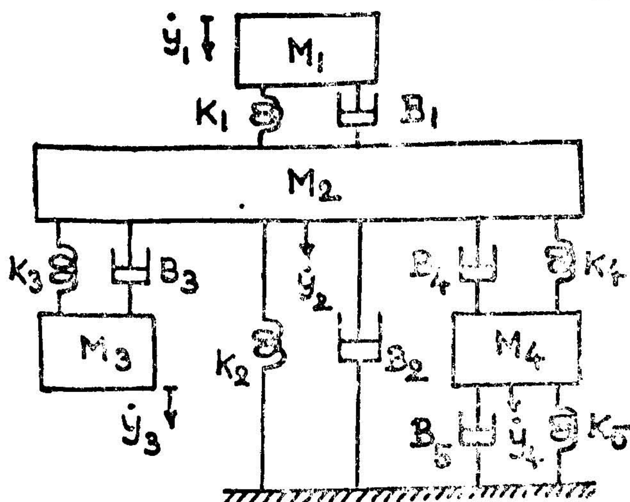
மனித உடலின் அதிர்வு இயக்கத்தை அறிய உதவும் உருவியல் மாதிரி ஒன்றைக் கீழே காண்க. (படம் 2.78) இவ் உருவியல் மாதிரியின் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதுக. மின் இயல் ஒற்றுமை உருவங்களை வரைக.



படம் 2.78—மனித உடலின் உருவியல் மாதிரி

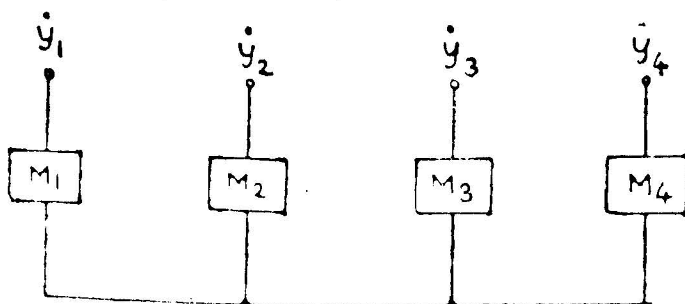
தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட மனித உடலின் உருவியல் மாதிரியை படம் 2.79-ல் கண்டபடி எளிய முறையில் வரையலாம்.

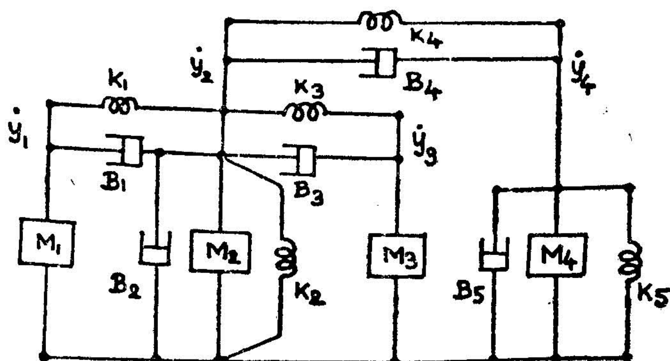


படம் 2.79—எளிதாக்கப்பட்ட மனித உடலின் உருவியல் மாதிரி.

இதன் இயந்திர வலைப் படத்தை முதலில் வரைவோம்.



படம் 2.80—இயந்திர வலைப்படம்-சந்திகள்



படம் 2.81—இயந்திர வலைப்படம்—முற்றுப் பெற்றது

இவ் இயந்திர வலைப்படத்தில் இருந்து செயற்சமன்பாடு களை எளிதாக எழுதலாம்.

$$M_1 \ddot{y}_1 + B_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_1 (y_1 - y_2) = 0$$

$$M_2 \ddot{y}_2 + B_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 + B_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + K_1 (y_2 - y_1) + B_3 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + K_3 (y_2 - y_3) + B_4 (\dot{y}_2 - \dot{y}_4) + K_4 (y_2 - y_4) = 0$$

$$M_3 \ddot{y}_3 + B_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + K_3 (y_3 - y_2) = 0$$

$$M_4 \ddot{y}_4 + B_5 \dot{y}_4 + K_5 y_4 + B_4 (\dot{y}_4 - \dot{y}_2) + K_4 (y_4 - y_2) = 0$$

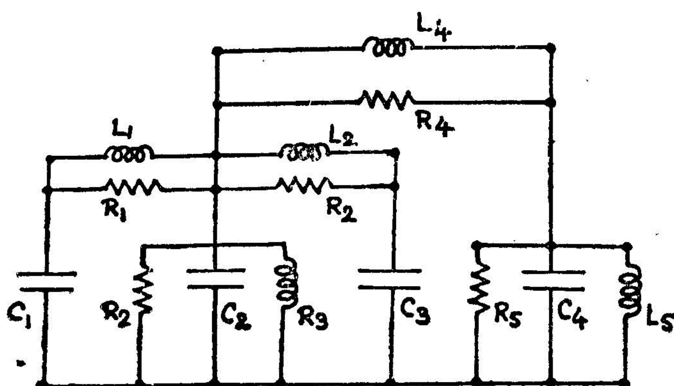
விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு :

இவ் இயந்திர வலைப் படத்தின் விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு காண, $M \rightarrow C$

$$B \rightarrow \frac{1}{R}$$

$$K \rightarrow \frac{1}{L}$$

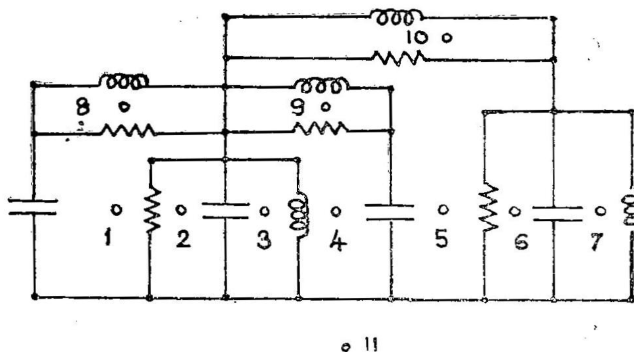
என்று மாற்றங்கள் செய்கிறோம். இவ்வாறு கிடைப்பது படம் 2.81.



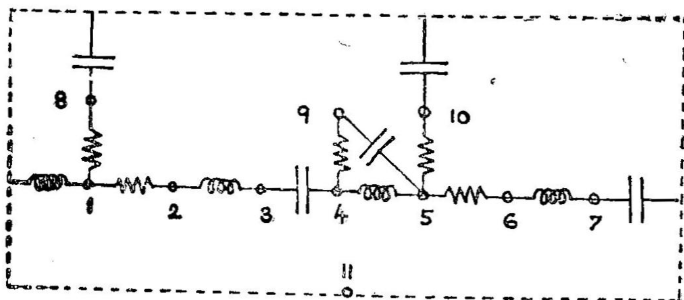
படம் 2.82—மனித உடலின் விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு

விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உரு

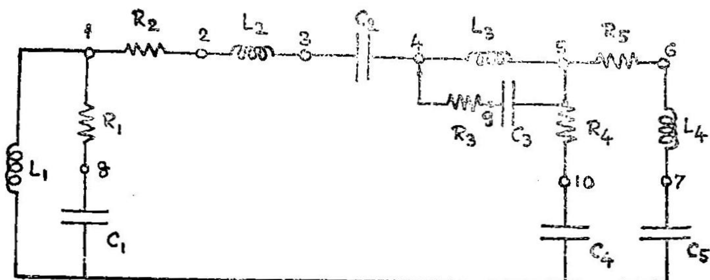
புள்ளி முறையின் வாயிலாக விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உருவை அடுத்துக் காண்போம்.



படம் 2.83—விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு-படி 1



படம் 2.84—விசை அழுத்த ஒற்றுமை உரு-படி 2

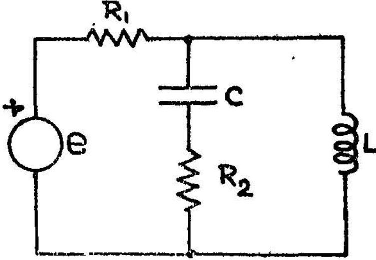


படம் 2.85—விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு-முற்றுப்பெற்றது.

மாதிரி வினு 2.15

(அ) ஓர் இயந்திரக் குவையின் விசை – அழுத்த ஒற்றுமை உரு படம் 2.86 – ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதற்கு உரிய இயந்திரக் குவையை வரைக.

(ஆ) இணைக் கிளைகளை (parallel branches) இடம் மாற்றுவதால் மின் சுற்றின் செயல் மாறுவது இல்லை. ஆனால் படம் 2.86-ன் இயந்திரக் குவை காண்கையில் சிக்கல் ஒன்று தோன்றுகிறது. அது என்ன ?

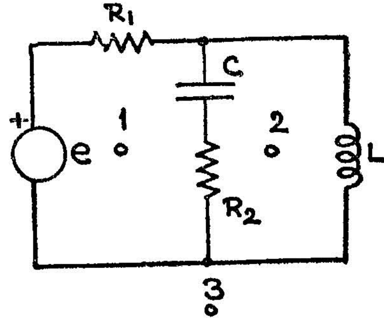


படம் 2.86—ஓர் இயந்திரக் குவையின்-அழுத்த விசை ஒற்றுமை உரு

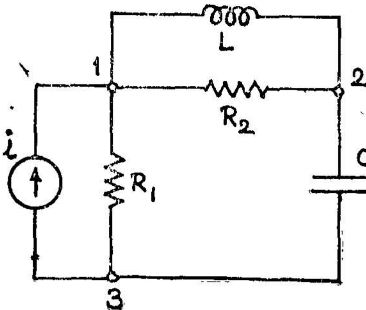
தீர்வு :

(அ) படிகள் : கொடுக்கப்பட்ட விசை - அழுத்த ஒற்றுமை உருவிற்கு உரிய விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு கண்டுபிடிக்கப் படுகிறது. அதில் இருந்து இயந்திர வலைப் படம் வரையப்படு கிறது. இறுதியாக, இவ் இயந்திர வலைக்கு ஏற்ப ஒரு இயந்திரக் குவை வருவிக்கப்படுகிறது.

விசை– அழுத்த ஒற்றுமை உருவில் இருந்து புள்ளி முறையிலேயே விசை – ஓட்ட ஒற்றுமை உரு காணலாம்.



படம் 2 87 விசை 3—அழுத்த ஒற்றுமை உரு

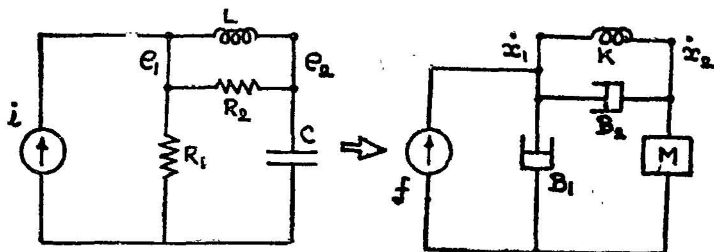


படம் 2 88—விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு

இயந்திர வலைப் படம்:

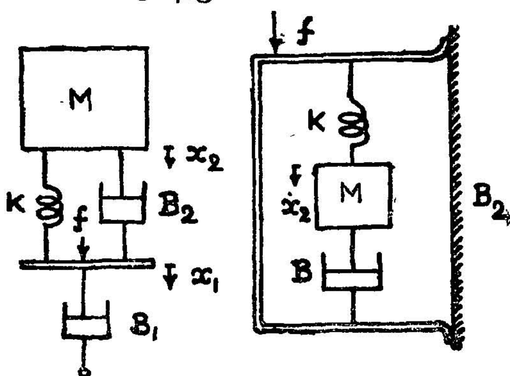
$C \rightarrow M \qquad e \rightarrow v$
$1/L \rightarrow K \qquad i \rightarrow f$
$1/R \rightarrow B$

என்று விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உருவில் பிரதியிட, இயந்திர வலைப் படம் கிடைக்கிறது. படம் (2.89)



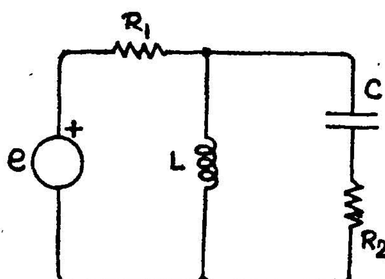
படம் 2.89—விசை-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு

இதன் அமைப்பில் இருந்து இயந்திரக் குவையின் உருவை யும் வருவிக்கலாம். படம் 2.90 இது போன்ற இரண்டு மாதிரி களைக் காட்டுகிறது.



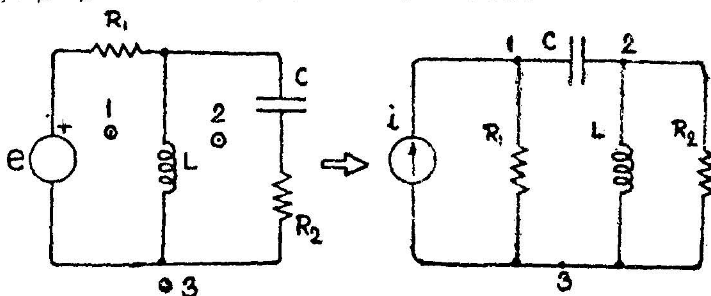
படம்—2.90
இயந்திரக் குவை மாதிரிகள்.

(ஆ) படம் 2.86 - ல் இணைக் கிளைகளை மாற்றி அமைக்கப் படம் 2.91 கிடைக் கிறது.

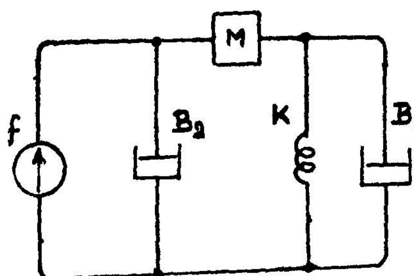


படம் 2.91—விசை-அழுத்த ஒற்றுமை உரு

இதன் விசை - ஓட்ட ஒற்றுமை உரு, இயந்திர வலைப் படம் இவற்றைப் படம் 2.92, 2.93 – ல் காணலாம்.



படம் 2.92—மின்-ஓட்ட ஒற்றுமை உரு



இவ் இயந்திர வலைப் படம் ஒரு சிக்கலைத் தோற்றுவிக்கிறது. பொருண்மை உறுதிப்பாடு உடைய ஒரு கூறு. ஒரு திண் பொருளின் இரு முனைகளும் ஒரே வேகத்தில்தான் நகரும்.

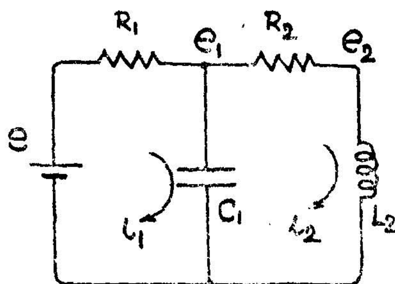
படம் 2.93—இயந்திர வலைப் படம்

எனவே, பொருண்மைக் கூறு எங்கு இருந்தாலும், இயந்திர வலைப் படத்தில் அதன் ஒரு முனை ஆதாரச் சந்தியோடு இணைக்கப் படுகிறது. மறுமுனை அதன் வேகத்தைக் குறிக்கும் சந்தியோடு சேர்க்கப்படுகிறது.

இங்கேயோ, பொருண்மைக் கூறு இரு வேறு வேகச் சந்திகளுக்கு இடையே வந்துள்ளது. எனவே, இதற்கு ஏற்ப ஓர் இயந்திரக் குவையை உருவாக்கல் இயலாது.

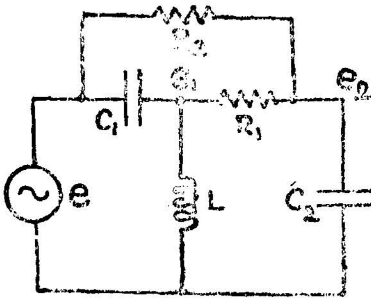
பயிற்சி 2

2.1 முதல் நிலை ஆற்றல் தேக்கச் சுழியெனக் கொண்டு சுற்றுச் சமன்பாடுகளை எழுதுக :-



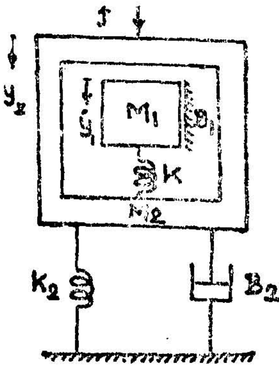
படம் 2.94

2.2 முதல் நிலை ஆற்றல் தேக்கம் சுழி எனக் கொண்டு சந்திச் சமன்பாடுகளை எழுதுக :-

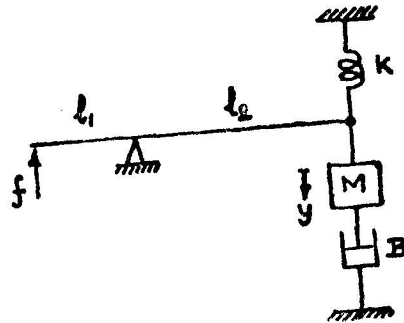


படம் 2.95

2.3 படத்திற் காணும் இயந்திரக் கோட்டு இயற் குவைகளின் செயற் சமன்பாடுகளை இயந்திர வலைப்பட முறையில் வருவிக்க.

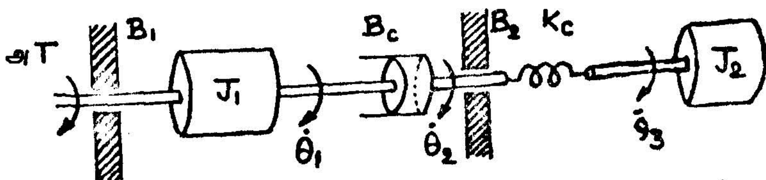


படம் 2.96

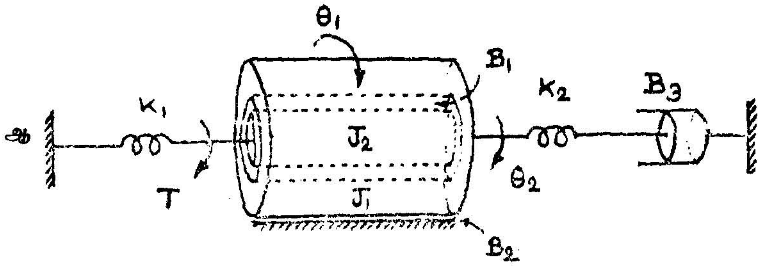


படம் 2.97

2.4 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயந்திரச் சுழல் இயற் குவைகளின் செயற் சமன்பாடுகளை வருவிக்க.



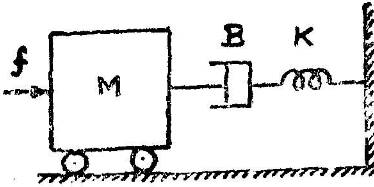
படம் 2.98



படம் 2.99

2 5 ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டின் விட்டம் 50 செ.மீ. அதன் எடை 10 கிலோ கிராம். நடு அச்சை ஆதாரமாகக் கொண்டு அதில் 10 பாகை/நொடி/நிமிடம் முடுக்கத்தைத் தோற்றுவிக்க எவ்வளவு திருப்ப விசை தேவைப்படும்?

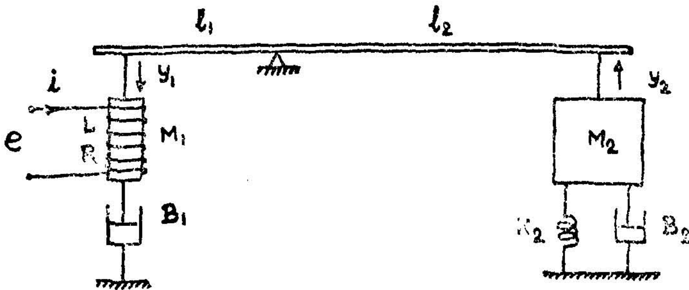
2 6 படத்திற் காணும் இயந்திரக் குவையில் $M = 1$ கிலோ கிராம், $B = 12$ நியூட்டன்-நொடி/மீட்டர், $K = 144$ நியூட்டன் / மீட்டர். $f(t) = 8$ நியூட்டன். குவையின் செயற் சமன்பாட்டை வருவித்து. பொருண்மை M-ன் இறுதி வேகத்தைக் கணிக்க.



படம் 2.100

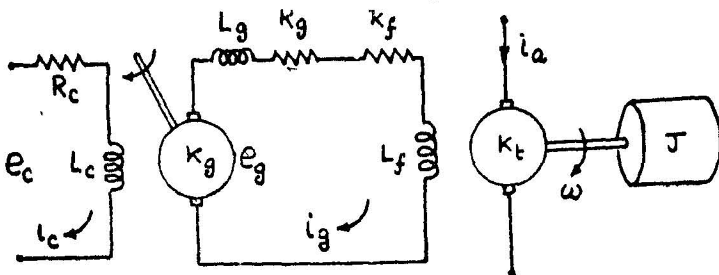
2.7 கீழ்க் காணும் இயந்திர-மின் குவையின் செயற்சமன் பாடுகளை எழுதுக.

காந்த விசை இயக்கியில் $f = K_s i$ என்று கொள்க.



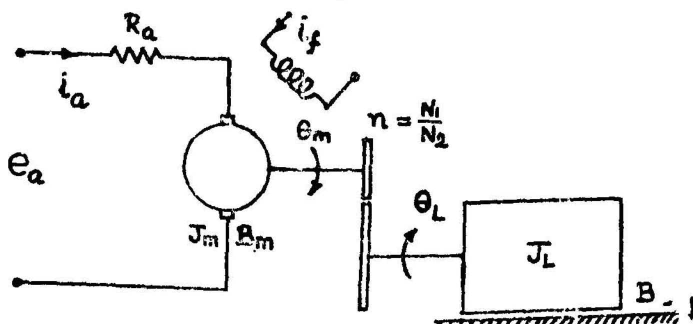
படம் 2.101

2.8 கொடுக்கப்பட்டுள்ள மின் – இயந்திர இயற் குவையின் முழுச் செயற் சமன்பாட்டை வருவிக்க.



படம் 2.102

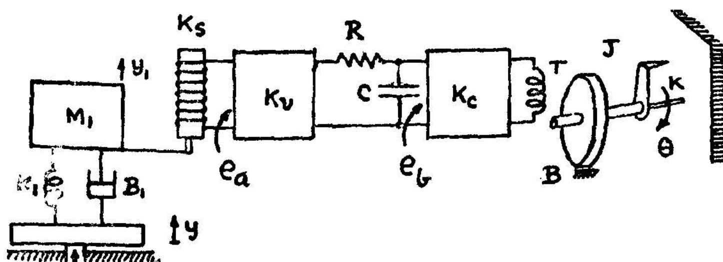
2.9 ஆள் குவைகளில் பெரிதும் பயன்படும் நேர்மின் அடிமை இயக்கி ஒன்றின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 2.103

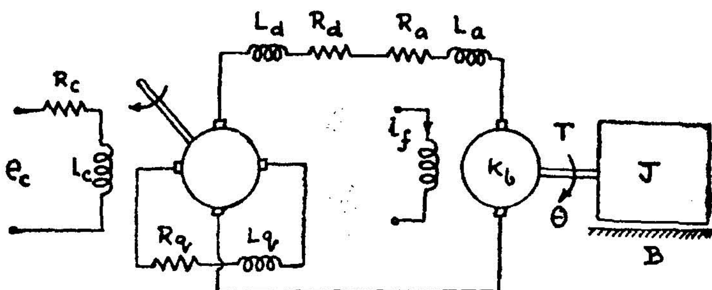
இக் குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை, சுமையின் திருப்பத்தைக் காணும் வகையில் எழுதுக.

2.10 ஒரு கருவியின் அதிர்வை (vibration) அளக்க உதவும் குவை ஒன்றைப் படம் 2.104 விளக்குகிறது. இதில் $e_a = K_s\, y_1$ $T = K_c\, e_b$. குவையின் முழுச்செயற் சமன்பாட்டை வருவிக்க.



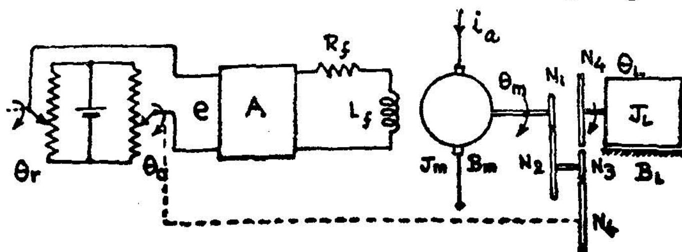
படம் 2.104

2.11 ஆம்பிளிடைனைக் கொண்டு ஒரு பெரிய நேர்மின் இயக்கி யின் வேகத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் குவை ஒன்று படம் 2.105-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இது வேலைசெய்யும் விதத்தை வருவித்து, குவை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை எழுதுக.



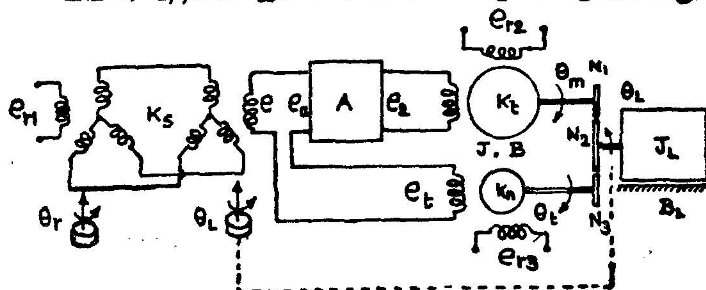
படம் 2.105

2.12 ஓர் எளிய அடிமைக் குவை படம் 2.106-ல் தரப் பட்டுள்ளது. இதன் உறுப்புகளின் தனித்தனிச் செயற்சமன் பாடுகளை எழுதி, அவற்றை இணைத்து, குவையின் முழுச் செயற் சமன்பாட்டைக் கொணர்க. $n=1\ \frac{N_1}{N_2}\cdot\frac{N_3}{N_4}$



படம் 2.106

2.13 ஒரு மாறுமின் பெயர்ச்சிக் கட்டுப்பாட்டுக் குவை (AC position control system) கீழே தரப்பட்டுள்ளது. ஒத்தி யங்கி, அடிமை இயக்கி, வேகமின் ஆக்கி ஆகிய உறுப்பு

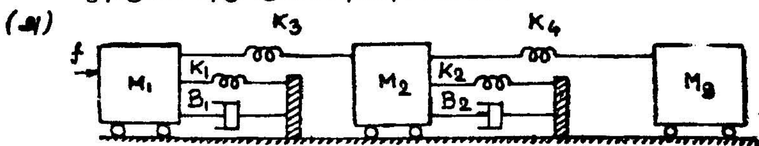


படம் 2.107

களின் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதுக. குவையின் முழுச் சமன்பாட்டையும் காண்க. $n_1 = N_1/N_2$, $n_2 = N/N_3$

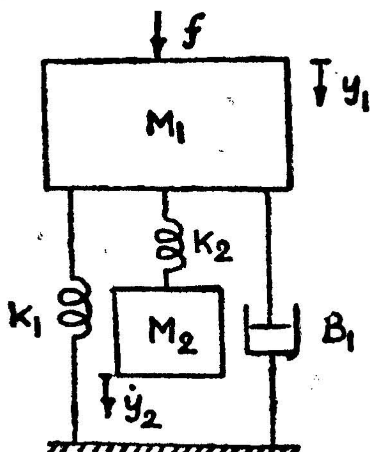
2.14 விசை–மின் ஓட்ட ஒற்றுமையுரு, விசை-மின் அழுத்த ஒற்றுமையுரு ஆகியவற்றை வரைக.

(அ)



படம் 2.108

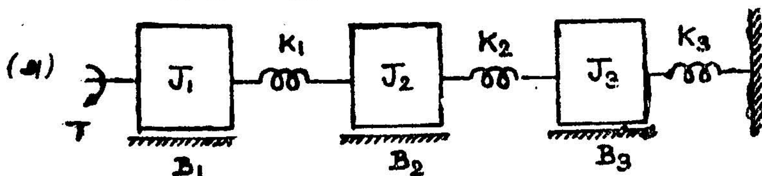
(ஆ)



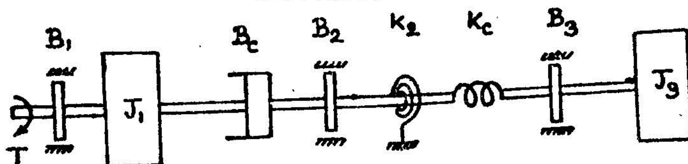
படம் 2.109

2.15 படத்தில் உள்ள இயந்திரச்சுழல் இயற்குவைகளின் மின்னியல் ஒற்றுமையுருக்களை வரைக:

(அ)

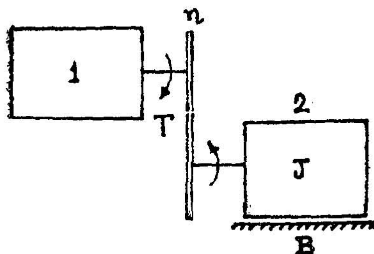


படம் 2.110



படம் 2.111

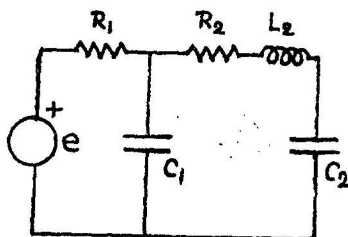
2.16 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயந்திரக் குவையில் $J=2$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}, $B=1$ நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன், $n=1/500$, இயக்கியின் திருப்பு விசை $T=5$ நியூட்டன்-மீட்டர், இயக்கியின் திருப்புவிசை, சுமையின் சுழல் வேகம் இவற்றின் இடை உறவை வருவிக்க, மின் ஒட்ட ஒற்றுமை உருவையும் வரைக.



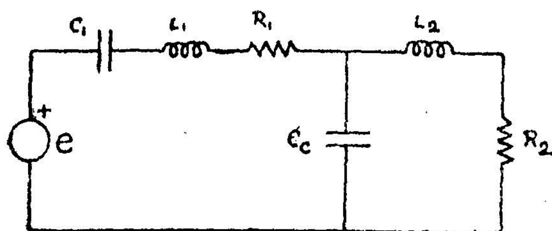
படம் 2.112

2.17 ஓர் இயந்திரக் குவையின் விசை-மின் ஒட்ட ஒற்றுமை உரு படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதற்கு ஏற்ப ஓர் இயந்திரக் குவையின் மாதிரியை வரைக.

படம் 2.113

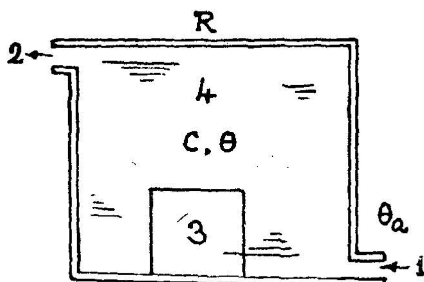


2.18 இயந்திரச் சுழல் இயற்குவை ஒன்றின் திருப்பு விசை-மின் அழுத்த ஒற்றுமை உரு கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது. இதற்கு உரிய இயந்திரக் குவையின் மாதிரி ஒன்றை வரைக,



படம் 2.114

2.19 நீரைச் சூடேற்றும் கருவி ஒன்றின் எளி வடிவைக் கீழே காண்க. இதில் θ_a வெளி வெப்பநிலை என்றும் θ நீரின் வெப்ப நிலை [θ_a வுக்கு மேல்] என்றும் கொண்டு, செயற் சமன்பாட்டை எழுதி, மின்னியல் ஒற்றுமை உருவையும் வரைக.



C : தொட்டியின் வெப்பத் தேக்கம்
R : சுவரின் வெப்பத் தடை
S : சுயவெப்பஎண் (specific heat)
n : நீரின் பாய்வு (flow)

படம் 2.115

2.20 தக்க உதாரணங்களின் துணை கொண்டு ஆள்குவைப் பொறி இயல்பானது, மின் இயல், இயந்திர இயல், வெப்ப இயல், பாய்ம இயல் ஆகிய யாவற்றிற்கும் பொது வானதே என நிறுவுக.

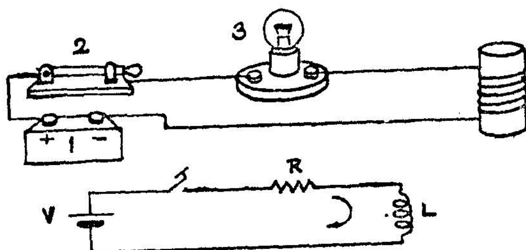
3. செயற் சமன்பாடுகளின் தீர்வு

(Solution of Performance Equations)

3.1 செயற் சமன்பாடு (Performance Equation)

3.1.1 உருவியல் மாதிரியும் செயற் சமன்பாடும்

ஓர் எளிய மின் குவை, அதன் உருவியல் மாதிரி இரண்டும் படம் 3.1-இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 3.1—ஒரு மின் குவையும் அதன் உருவியல் மாதிரியும்

1. மின்கலம் 2. மின் குமிழ்
3. மின் விளக்கு 4. கம்பிச் சுருள்

இதன் செயற் சமன்பாடு, $V = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

இதை எவ்வாறு வருவித்தோம்? இதோ, செயற் சமன்பாடு காணும் முறை.

1. தக்க எளிமை ஆக்கும் புனைவுகளைக் கொண்டு, கொடுத்துள்ள குவையின் உருவியல் மாதிரியை எழுதுகிறோம்.

தற்புனைவுகள் : (1) மின் கலத்தில் உள்தடை இல்லை, அதன் மின் அழுத்தம் மாறாதது.

(2) மின் குமிழ், இணைப்புக் கம்பிகள் இவற்றில் மின்தடை இல்லை.

(3) மின் விளக்கு ஒரு தூய மின்தடை, கம்பிச் சுருள் ஒரு தூய தூண்டல் தடை.

(4) $v_R \propto i$, $v_L \propto \frac{di}{dt}$ நேர் உறவுகள்

2. உருவியல் மாதிரியின் உறுப்புகளுக்கு உரிய செயற் சமன்பாடுகளைத் தனித் தனியாக எழுதுகிறோம்.

$$v_R = Ri$$

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

3. உறுப்புகளின் செயற் சமன்பாடுகளை ஒன்று சேர்க்கவும் குவையின் முழுமைச் செயற் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$V = v_R + v_L$ அதாவது $V = Ri + L\frac{di}{dt}$.

3·1.2 நேர்—நேரிலா—வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

நாம் கையாளும் குவைகள் யாவும் தம் இயக்கத்தை உடையன. எனவே செயற் சமன்பாட்டில் இடப் பெயர்ச்சியோடு, வேகம், முடுக்கம் அனைய பிறவும் வருகின்றன. அதாவது, மாறிகளோடு, அவற்றின் வகைக்கெழுக்களும் இடம் பெறுகின்றன.

பொதுவாக நேர் உறவுடைய (linear relationship) மாறிகளைக் காண்பது அரிது. எனவே, பெரும்பாலும் நடைமுறைக் குவைகளின் செயற் சமன்பாடுகள் 'நேரிலா-வகைக்கெழுச் சமன்பாடு'களாகவே (nonlinear differential equations) இருக்கின்றன.

கூடிய வரையில், பொருத்தமான புனைவுகளின் வழி இவற்றைத் தோராய 'நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு'களாக (linear differential equation) எழுதித் தீர்வு காண்கிறோம். இதற்குக் காரணங்கள் :

(1) நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கப் பல நியமமான வழிகள் (standard methods) உள்ளன. நேரிலா வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க (ஒரோ வழிச் சில குறிப்பிட்ட வகைகளைத் தவிர) முறையான வழிகள் இல்லை;

(2) தோராய நேர் உறவு மாதிரியில் கிடைக்கும் செயல் விளக்கம், உண்மையில் இருந்து அதிகம் விலகுவது இல்லை.

மேல் வைப்புத் தேற்றம் (Superposition theorem) :

x_1 என்ற கட்டளைச் சார்பு (forcing function) y_1 என்ற தீர்வையும் ; x_2, y_2 என்ற தீர்வையும் தருவதாகக் கொள்வோம். இதை $x_1 \rightarrow y_1$, $x_2 \rightarrow y_2$ என்று எழுதலாம்.

$x_1 \rightarrow y_1$

$x_2 \rightarrow y_2$ எனில் $ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2$ என்பதே 'மேல் வைப்புத் தேற்றம்' a, b : மாறிலிகள்.

'மேல் வைப்புத் தேற்றம் பொருந்தும் சமன்பாடே நேர் உறவுச் சமன்பாடு ; நேர் உறவு அற்றது நேரிலா உறவுச் சமன்பாடு' என்பது வரையறை.

நேர்வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளில்

(1) சார்ந்த மாறி (x) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளாக வராது $[x^2, x^3, \ldots]$.

(2) சார்ந்த மாறியின் வகைக் கெழுக்களும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளாக வரமாட்டா $\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)^4, \ldots\right]$

(3) சார்ந்த மாறியும், அதன் வகைக் கெழுக்களும் பெருக்கல் தொடராக வரமாட்டா. $\left[x.\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\right]$

(4) சார்ந்த மாறி e^x, $\sin x$, $\log x$ போன்ற சார்புகளாக வராது.

இவ் அடையாளங்களைக் கொண்டு நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை எளிதில் அறியலாம்.

குறிப்பு : உறுப்புக் கெழுக்கள் சாரா மாறியின் (t) சார்புகளாக இருப்பதால் ஒரு சமன்பாடு நேரிலா வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகாது.

ஒரு நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் உறுப்புக் கெழுக்கள்

(i) மாறிலிகளாக இருப்பின் அது கால மாறிலி-அல்லது தன்னாட்சி-நேர்வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (linear autonomous differential equation or constant parameter linear differential equation) எனப்படும்.

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = f(t)$$

(ii) காலச் சார்புகளாக இருப்பின் அது காலமாறு நேர் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு (time variant linear differential equation) எனப் படும்.

$$\dddot{x} + 2t\ddot{x} + t^3\dot{x} + (1 + t)x = f(t)$$

3·1.3 சமன்பாடுகளின் சிறப்பு

திருப்பு விசை இயக்கி (torque motor) பலவகை ஆள் குவை களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதன் இயக்கத்தைக் காண் போம் (படம் 2,37).

இயக்கியின் திருப்பு விசை T, நிலைமம் (inertia), உராய்வு friction), முறுக்கம் (tor ion) இவற்றை எல்லாம் எதிர்த்துச் சுழற் பகுதியைத் திருப்பவேண்டும்.

இதன் செயற் சமன்பாடு

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T$$

இது ஒரு கால மாறிலி நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஆகும்.

இதில் T என்பது கட்டளைச் சார்பு, θ என்பது சார்ந்த மாறி. J, B, K என்பவை உறுப்புக் கெழுக்கள்.

ஓர் ஆள் குவையின் அமைப்பும் சிறப்பியல்பும் செயலும், குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையே ஒட்டி உள்ளன.

வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின்—

(i) உறுப்புக் கெழுக்கள், ஆள் குவை உறுப்புகளின் சிறப்பு இயல்புகளையும்

(ii) கட்டளைச் சார்பு, ஆள் குவையின் ஊட்டக் குறியையும்,

(iii) தீர்வு, ஆள் குவையின் பதில் விளைவையும் குறிக்கின்றன.

3·1.4 இயற்கை விளைவு, கட்டளை விளைவு

திருப்பு விசை இயக்கிக்கு (torque motor), ஊட்டமாக (அல்லது கட்டளை அறிகுறியாக) ஒரு திருப்பு விசை அளிக்கப் படுகிறது. அதன் விளைவாகச் சுழலியின் தண்டு திரும்புகிறது. அத்தண்டின் திருப்பத்தைக் 'கட்டளை விளைவு' (forced response) என்கிறோம்.

ஊட்டம் இல்லாமல் இருக்கையில், தன்னிச்சையாகச் சுழலி யின் தண்டு திரும்பினால், அதை இயற்கை விளைவு (natural response) என்கிறோம்.

குறிப்பு: ஊட்டம் இல்லாத இயக்கம் ஏது? எனலாம். உண்மையில், ஆற்றலைத் தேக்கிக்கொள்ளும் உறுப்புகளில் இயக்க அறிகுறி நின்றதும் மீதி உள்ள தேங்கிய ஆற்றலே இயற்கை விளைவிற்குக் காரணம்.

தேங்கிய ஆற்றலை இல்லாது, குலைக்கு ஓர் அதிர்ச்சியைக் (impulse) கொடுத்தாலும், அதன் இயக்கம் இயற்கை விளைவாகவே இருக்கும்.

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = 0$$

என்ற ஒரு படி (first order) வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு இயற்கை விளைவைத் தருகிறது.

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T$$

என்ற முழுவகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு, கட்டளை விளைவைத் தருகிறது.

பொதுத் தீர்வு (complimentary function) → இயற்கை விளைவு

சிறப்புத் தீர்வு (particular solution) → கட்டளை விளைவு

இவ் இரண்டின் கூடுதல் மொத்த விளைவைத் தரும்.

8·1.5 தீர்வும், ஆன் குலை ஆக்கமும்

எவ்வகைக் குலையும் கிளர்வுக்கு (stimulus) ஏற்ற ஒரு விளைவைத் (response) தரும். சான்றாகத் திருப்பு விசை இயக்கியில், கொடுக்கப்படும் திருப்பு விசையே (T) (torque) ஊட்டம் (input) அல்லது கிளர்வு (stimulus) ஆகிறது; சுழல் தண்டின் திருப்பமே (θ) ஈட்டம் (output) அல்லது விளைவு (response) ஆகிறது.

செயற் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண்கையில் T என்னும் கட்டளைச் சார்பினால் குலையில் தோன்றும் விளைவாகிய θ-வின் மதிப்பைக் காண்கிறோம். சார்ந்த மாறி θ, சாரா மாறி t-யின் சார்பாக எழுதப்படுவதே தீர்வு. இதைக் 'கால விளைவு' (time response) என்பர். ஆக, செயற் சமன்பாட்டின் தீர்வு, குலையின் கால விளைவைத் தருகிறது. மேலும், கட்டளைச் சார்பை மாற்றுவதன் வழிப் பலவகை ஊட்டங்களுக்குக் குலை எப்படிப்பட்டதில் விளைவுகளைத் தருகிறது என அறிய முடிகிறது. விளைவு

தேவையானவாறு இல்லை எனில், தேவைக்கு ஏற்பத் தீர்வில் மாறுதல்கள் புரியலாம். அதற்கு ஏற்ப உறுப்புக் கெழுக்களைக் கணிக்கலாம்.

இவ் உறுப்புக் கெழுக்கள், குவையின் நிலைமம், உராய்வு, முறுக்கம் போன்ற தனி இயல்புகளைக் குறிக்கின்றன. இவற்றை எந்த அளவு மாற்றினால், விரும்பிய பதில் விளைவு கிடைக்கும் என அறிந்து, மாற்றங்கள் செய்யலாம். புதிய தீர்வு வரம்புடைச் சார்பாக (bounded function) இருப்பின் குவை நிலையுறுதி (stability) உடையது என அறியலாம்.

இவ்வாறு, குவையின் ஆக்கப் பணியில், செயற்சமன் பாட்டின் தீர்வு ஒரு சிறப்பு இடத்தைப் பெற்றுள்ளது.

8.2 இலாப்லாசு மாற்றம் (Laplace Transform)

8.2.1 வரையறையும் சிறப்பும்

குவைகளின் செயல்களை விளக்கும் வகைக்கெழுச் சமன் பாடுகளைத் தீர்க்க உதவும் ஒரு சிறந்த சாதனம் 'இலாப்லாசு மாற்றம்' (Laplace transform) ஆகும்.

இதன் வரையறை :

$f(t)$ என்பது t என்னும் காலத்தின் சார்பு என்க. இதை $\int_0^\infty e^{-st}dt$ என்ற தொகையீட்டால் இயக்க (operate) $\int_0^\infty f(t).\ e^{-st}dt$ என்ற s என்னும் மாறியின் சார்பு கிடைக்கிறது. இதையே இலாப்லாசு மாற்றம் $F(s)$, என்கிறோம்.

இதையே பின்வரும் கணிதச் சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம்.

$$Lf(t) \triangle F(s) \triangleq \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

இதில் L: இலாப்லாசு மாற்றத்தைக் குறிக்கும் இயக்குக் குறி (operator)

$f(t)$: t–யின் ஏதாவது ஒரு சார்பு

$F(s)$: $f(t)$–யின் இலாப்லாசு மாற்றச் சார்பு

$\int_0^\infty e^{-st}dt$: இலாப்லாசு தொகையீடு

குறிப்பு: $f(t)$ என்பது பொதுவாக $x(t)$, $y(t)$ என்ற உருவங்களில் வரும். இலாப்லாசு மாற்றச் சார்பு $F(s)$ என்பது $x(s)$, $y(s)$ என எழுதப்படும். எளிமை கருதி,

$x(t)$ என்பதை x என்றும்

$X(s)$ என்பதை X என்றும் எழுதுவது வழக்கம்.

சிறப்பு:

இலாப்லாசு மாற்றம் புரிகையில், (முதல் நிலே சுழி எனக் கொண்டால்) $\frac{dx}{dt}$ என்பது sX எனவும் $\int xdt$ என்பது $\frac{1}{s}X$ எனவும் மாறுகின்றன. (இம் மாற்றங்களேப் பிறகு வருவிப்போம்.) இதனுல் $\frac{d}{dt}$ என்ற வகைக் கெழுக் குறி s-இன் பெருக்கலாகவும், $\int dt$ என்ற தொகையீட்டுக் குறி s-இன் வகுத்தலாகவும் மாறுவது தெளிவு. இவ்வாறு, இலாப்லாசு மாற்றத்தால் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளே (differential equations) இயற் கணிதச் சமன்பாடுகளாக (algebraic equations) மாற்ற முடிகிறது. பிறகு இவற்றைத் தீர்த்தல் எளிது.

சான்று: $s^2 + bs + c = o \rightarrow s = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ இவ்வழியில், பலவகை ஊட்டங்களுக்கு, ஆள் குவையின் பதில் விளேவுகளே விரைவிற் காணலாம்.

இலாப்லாசு மாற்றம், நேர் உறவு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கே (linear differential equations) பொருந்தும் முறை ஆகும். நமது படிப்பு இங்கு நேர் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் விளங்கும் ஆள்குவைகளேப் பற்றியதே ஆகையால் இலாப்லாசு மாற்ற முறையே நூல் முழுதும் கையாளப்படுகிறது. ஆள் குவையில் முதனிலே ஆற்றலும் சுழி (zero initial energy) எனில் இலாப்லாசு மாற்ற முறை மிகவும் எளிதாகும்.

3·2.2 இலாப்லாசு மாற்றத் தேற்றங்கள்

1. நேர் உறவு (Linearity):
   $L [a f_1(t)] = a L f(t)$

2. ஒருங்கமைவு (Homogenity):
   $L [f_1 (t) + \; _2 (t)] - L f_1 (t) + L f_2 (t)$

3. மெய்ப் பெயர்ச்சி (Real translation):

$$L\,f(t - T) = e^{-Ts}\,L\,f(t)$$

4. சிக்கற் பெயர்ச்சி (Complex translation):

$$L\,e^{at}\,f(t) = F(s - a)$$

5. மெய்த் தள வகையிடல் (Real differentiation):

$$L\frac{d}{dt}[f(t)] = s\,F(s) - f(o)$$

6. சிக்கல் தள வகையிடல் (Complex differentiation):

$$L\,t\,f(t) = (-1)^1\frac{d}{ds}[F(s)]$$

7. மெய்த் தளத் தொகையிடல் (Real integration):

$$L\int f(t)\,dt = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(o)$$

8. சிக்கல் தளத் தொகையிடல் (Complex integration):

$$L\frac{f(t)}{t} = \int_s^{\infty} F(s)\,ds$$

9. முதல் மதிப்பு (Initial value):

$$\lim_{t \to o} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

10. கடை மதிப்பு (Final value):

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to o} s\,F(s)$$

11. மடிப்பு (Convolution):

$$L\int_o^t f_1(t)\,.\,f_2(t - T)\,dt = F_1(s)\,.\,F_2(s)$$

இதை எழுதும் முறை : $L\,[f_1(t) - f_2(t)] = F_1(s)\,.\,F_2(s)$

சிறப்பான கட்டளைச் சார்புகளின் இலாப்லாசு மாற்றம் காணவும், வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளை எளிதாகத் தீர்க்கவும் இத் தேற்றங்கள் பெரிதும் உதவுகின்றன.

3·2.3 சில கட்டளைச் சார்புகளின் இலாப்லாசு மாற்றங்கள்

1. அடுக்குச் சார்பு (exponential function):

$$f(t) = e^{-at}$$

$$Lf(t) = \int_{o}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

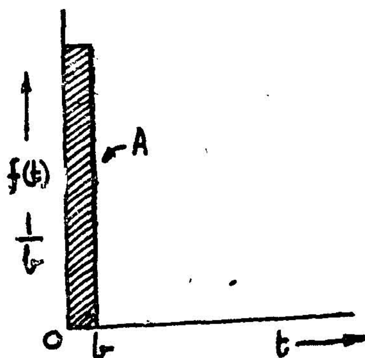
$$= \int_{o}^{\infty} e^{-at} . e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{o}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

$$\therefore \boxed{L\, e^{-at} = \frac{1}{s+a}}$$

2. ஒருமை அதிர்ச்சிச் சார்பு (unit impulse function) :



படம் 3.2—அதிர்ச்சிச் சார்பு

$$f(t) = \Sigma(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(t) = o \quad t \le o \\ \delta(t) = \frac{1}{b}\,;\; o \le t \le b\,;\; b \to o \\ \delta(t) = o\,;\; b \le t \le \infty\,;\; b \to o \end{array}}$$

$$Lf(t) = \int_{o}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{b \to o} \left[\int_{o}^{b} \frac{1}{b} . e^{-st} dt + \int_{b}^{\infty} o .\ e^{-st} dt \right]$$

$$= \lim_{b \to o} \frac{1}{b} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{o}^{b}$$

$$= \lim_{b \to o} \frac{1-e^{-st}}{sb}$$

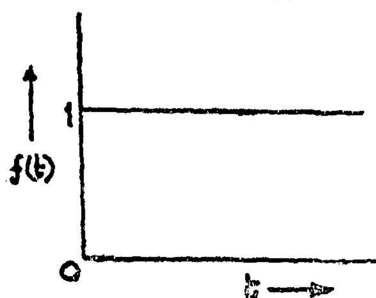
$$= \lim_{b \to o} \frac{1 - \left[1 - sb + \frac{s^2b^2}{2!} - \dots \right]}{sb}$$

$$= \lim_{b \to o} \left(1 - \frac{sb}{2!} + \dots \right)$$

$$= 1$$

$$\therefore \boxed{L\,\delta(t) = 1}$$

3. ஒருமைப் படிச் சார்பு (Unit step function):



$f(t) = u$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(t) = 0, \quad < o \\ u(t) = 1, \quad o < t < \infty \end{array}}$$

படம் 3.3—ஒருமைப் படிச் சார்பு

$$L f(t) = \int_o^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_o^{\infty} 1.e^{-st}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_o^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s}$$

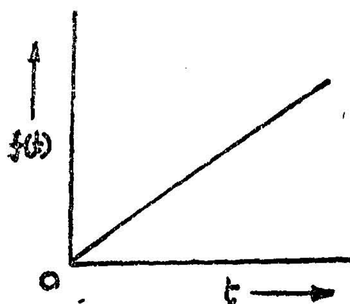
$$\therefore \boxed{L\,u(t) = \frac{1}{s}}$$

குறிப்பு : $f(t) = A$, என்க.

$A = A\,u(t)$

$L[A] = L[A\,u(t)] = A\,L[u(t)] = \frac{A}{s}$

4. ஒருமை நேர்வளர் சார்பு (unit ramp function) :



$f(t) = t$

$L\,e^t = \frac{1}{s-1}$

படம் 3.4—ஒருமை நேர் வளர் சார்பு

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{s}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{s}\left[1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \cdots$$

எனவே,

$$L\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] = \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \cdots\right] \cdots (1)$$

இதில் இருந்து, $L\,1 = \frac{1}{s}$

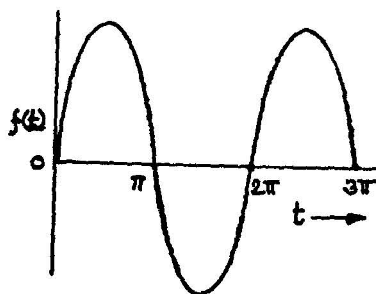
$$\boxed{L\,t = \frac{1}{s^2}}$$

குறிப்பு : சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து,

$L t^2 = \frac{2!}{s^3}$

$$L\, t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

5. நெடுக்கைச் சார்பு (Sine function):



$$f(t) = \sin t$$

$$L\, e^{at} + \frac{1}{s-a}$$

படம் 3.5—நெடுக்கைச் சார்பு

$a = j$ என்க $[j = \sqrt{-1}]$

எனவே,

$$L\, e^{jt} = \frac{1}{s-j}$$

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$\frac{1}{s-j} = \frac{s+j}{(s-j)(s+j)} = \frac{s+j}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + j\,\frac{1}{s^2+1}$$

எனவே,

$$L\left[\cos t + j \sin t\right] = \frac{s}{s^2+1} = j\,\frac{1}{s^2+1}$$

கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$$L \sin t = \frac{1}{s^2+1}$$

குறிப்பு: மெய்ப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$$L \cos t = \frac{s}{s^2+1}$$

முக்கியமான கட்டளைச் சார்புகள் (forcing functions) சில வற்றின் அலையுருவம், இலாப்லாசு மாற்றம், s- தளப் படம் ஆகிய வற்றை அட்டவணை 3.1 ல் காணலாம்.

அட்டவணை 3-1 கட்டளைச் சார்புகளும் இலாப்லாசு மாற்றங்களும் :

கட்டளைச் சார்பு	கணித உரு	இலா. மாற்றம்	s - தளப் படம்	வரைபட உரு
1. ஒருமை அதிர்ச்சி unit impulse	$\delta(t)$	1		
2. ஒருமை படி unit step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$		1
3. ஒருமை நேர் வளர்ச்சி unit ramp	t	$\frac{1}{s^2}$		1 1
4. அழியும் அடுக்கு decaying exponent	e^{-t}	$\frac{1}{s+1}$		1

5. வளரும் அடுக்கு building up exponent	e^{t}	$\frac{1}{s-1}$		
6. நெடுக்கை sinusoid	sin ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$		
7. அழியும் அலைவு decaying oscilln.	e^{-t} sin ωt	$\frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}$		
8. வளரும் அலைவு building up oscilln.	e^{t} sin ωt	$\frac{\omega}{(s-1)^2+\omega^2}$		

அட்டவணையில் உள்ள e^{-t} sin ωt, e^{t}sin ωt இவைகளின் இலாப்லாசு மாற்றங்களைக் காண்பது எவ்வாறு என்ற கேள்வி எழலாம். விளக்கத்தை மாதிரி வினா 3·1 இல் காண்க.

மாதிரி வினா : 3·1

கீழ்வரும் கணிதச் சார்புகளின் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க :

(அ) $e^{-at}\sin bt$

(ஆ) cosh at

(இ) e^{-at}, t^{n}

தீர்வு :

(அ) $f(t) = e^{-at}\sin bt$

$$L\,e^{\alpha t} = \frac{1}{s-\alpha}$$

$\alpha = -a+jb$, என்க

எனவே,

$$L\,e^{-(a-jb)\,t} = \frac{1}{s+(a-jb)}$$

$$L\,e^{-at}\,e^{jbt} = \frac{1}{(s+a)-jb}$$

$$L\,e^{-at}\,[\cos bt+j\sin bt] = \frac{(s+a)+jb}{(s+a)^2+b^2}$$

கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$$L\,e^{-at}\sin bt = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

குறிப்பு :

$$Le^{-at}\cos bt = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

(ஆ) $f(t) = \cosh at$

$$L\, e^{at} = \frac{1}{s-a}$$

$$\cosh at = \tfrac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$$

$$L \cosh at = L\left[\tfrac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[L\, e^{at} + L\, e^{-at}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

எனவே,

$$\boxed{L \cosh at = \frac{s}{s^2 - a^2}}$$

(இ) $f(t) = e^{-at}\, t^n$

$$L\, e^{-at} = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{d}{da}\left[L\, e^{-at}\right] = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

$$L\, \frac{d}{da}(e^{-at}) = \frac{d}{d(s+a)}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

$$L - t\, e^{-at} = -\frac{1}{(s+a)^2}$$

எனவே

$$\boxed{L\, t\, e^{-at} = \frac{1}{(s+a)^2}}$$

$$\frac{d}{da}\left[L t e^{-at}\right] = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right]$$

$$L t^2 e^{-at} = \frac{2!}{(s+a)^3}$$

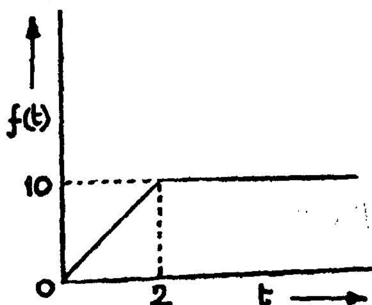
இவ்வாறு n தடவைகள் வகையீடு (differentiate) செய்தால்,

$$L\, t^n e^{-at} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

மாதிரி வினா 3·2.

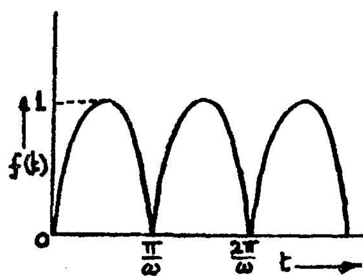
கீழ்க் காணும் அலை உருவங்களுக்கு இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க :

(அ)



படம் 3.6

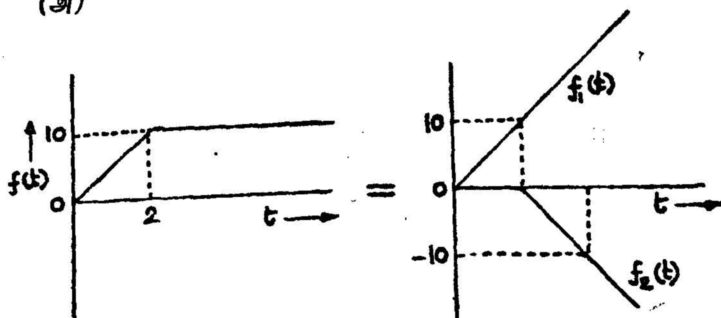
(ஆ)



படம் 3.7

தீர்வு :

(அ)



படம் 3.8

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f(t) = \frac{10}{2}t = 5t$$

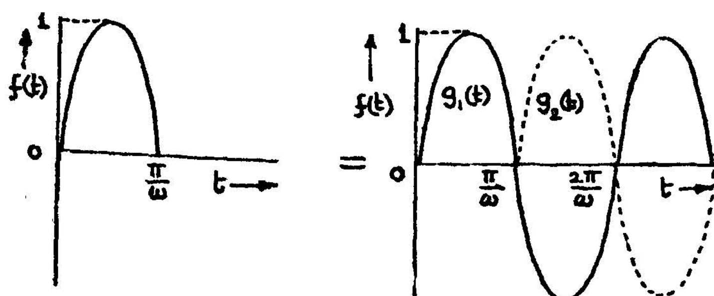
$$f_2(t) = -\frac{10}{2}(t-2) = -5(t-2)$$

$$F(s) = F_1(s)+F_2(s)$$

$$= 5\cdot\frac{1}{s^2} - 5\cdot e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{5}{s^2}(1-5e^{-2s})$$

(ஆ)



படம் 3.9

$$f_1(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$g_1(t) = \sin \omega t$$

$$g_2(t) = \sin \omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$F_1(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left[1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right]$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \dots$$

$$= F_1(s) + e^{-\frac{\pi}{\omega}s} F_1(s) + e^{-\frac{2\pi}{\omega}s} F_1(s) + \dots$$

$$= F_1(s)\,[1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s} + e^{-\frac{2\pi}{\omega}s} + \cdots]$$

$$= \frac{F_1(s)}{\left[1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right]}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}$$

$$= \frac{w}{s^2+\omega^2}\,.\ \coth \frac{\pi 1}{2\omega} s$$

மாதிரி வினா 3.3.

$F(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+3)^2\,(s+4)}$ என்ற சார்பில் இருந்து $f(t)$-யின் முதல் மதிப்பைக் காண்க. $f(t)$-யின் கடை மதிப்பு 1 ஆக வேண்டும் எனில், K-யின் மதிப்பு என்ன?

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\,\frac{K(s+2)}{s(s+3)^2\,(s+4)}$$

$$= \lim_{\frac{1}{s}\to 0} \frac{K\left(1+\frac{2}{s}\right)}{s^2\left(1+\frac{3}{s}\right)^2\left(1+\frac{4}{s}\right)}$$

$$= 0$$

$f(t)$-யின் முதல் மதிப்பு 0

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\,.\,\frac{K(s+2)}{s(s+3)^2\,(s+4)}$$

$$= \frac{K(2)}{(3)^2\ (4)}$$

$$= \frac{K}{18}$$

$f(t)$-யின் கடை மதிப்பு $\frac{K}{18} = 1$

எனவே $\boxed{K = 18}$

3. 2. 4. எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் (Inverse Laplace Transform)

எதிர் இலாப்லாசு மாற்றத்தின் குறியீடு L^{-1}.

$L\,f(t) = F(s)$. எனவே, $L^{-1}\,F(s) = f(t)$.

$$L^{-1}\ \frac{1}{s+a} = e^{-at}$$

$$L^{-1}\ 1 = (t)$$

$$L^{-1}\ \frac{1}{s} = 1$$

$$L^{-1}\ \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} = e^{-at}\cos bt$$

$$L^{-1}\ \frac{b}{(s+a)^2+b^2} = e^{-at}\sin bt$$

$$L^{-1}\ \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} = e^{-at}\,.\,t^n$$

$F(s)$ கொடுக்கப்பட்டால், அதன் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண வழி :

1. கொடுத்துள்ள சார்பைக் காரணிப் படுத்தி, 'பகுதிப் பின்ன விரிவாக' (partial fraction expansion) எழுதுக.

2. s-இன் சம அடுக்கு உறுப்புக்களை ஒப்பிடு முறையிலோ, 'ஹெவிசைடு தேற்றங்க'ளின் (Heaviside theorems) வழியிலோ மாறிலிகளைக் கணிக்க.

3. கிடைக்கும் சார்புகளை நியமமான உருவங்களில் எழுதி, அவற்றின் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றங்களைக் காண்க.

பகுதிப் பின்ன விரிவு, ஹெவிசைடு தேற்றங்கள் இவற்றைச் சில எடுத்துக் காட்டுகளின் உதவியால் விளக்குவோம்.

மாதிரி வினா 3. 4

கொடுக்கப்பட்ட $F(s)$-இன் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க:

$$F(s) = \frac{8(s^2+4s+3)}{s(s^2+6s+8)}$$

குறிப்பு: ஒருமை அடுக்கு, சமம் இல்லாக் காரணிகள். **(first order, unequal factors)**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $F(s)$ஐ காரணிப் படுத்தினால்,

$$F(s) = \frac{8(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$$

இதைப் பகுதிப் பின்ன விரிவாக எழுதினால்,

$$\frac{8(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} \equiv \frac{A_1}{s} + \frac{BA_2}{s+2} + \frac{CA_3}{s+4} \qquad \ldots(1)$$

சமன்பாடு 1ஐ s-ஆல் பெருக்க,

$$s\,F(s) \equiv A_1 + \frac{A_2Bs}{s+2} + \frac{A_3Cs}{s+4}$$

இதில் $s=0$, எனப் பிரதியிட,

$$sF(s)\Big|_{s=0} = A_1+0+0$$

அதாவது $$A_1 = sF(s)\Big|_{s=0}$$

$$= s\,\frac{8(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}\Big|_{s=0}$$

$$= 3.$$

சமன்பாடு 1-ஐ $(s+2)$-ஆல் பெருக்க,

$$(s+2)\,F(s) \equiv A_1\,\frac{(s+2)}{s} + A_2 + \frac{A_3(s+2)}{s+4}$$

இதில் $(s+2)=0$ என்று பிரதியிட

$$(s+2)\,(Fs)\Big|_{s+2=0} = 0+A_2+0$$

எனவே, $A_2 = (s+2)\,F(s)\Big|_{s+2=0}$

$$= \cancel{(s+2)}\,\frac{8\,(s+1)(s+3)}{s\cancel{(s+2)}(s+4)}\Bigg|\,s+2=0$$

$$= \frac{8\,(-2+1)\,(-2+3)}{(-2)\,(-2+4)}$$

$$= \underline{2}$$

சமன்பாடு 1-ஐ $(s+4)$-ஆல் பெருக்கி, $(s+4)=0$ என்று பிரதியிட,

$$A_3 = (s+4)\,(F(s)\Big|_{s+4=0}$$

$$= \cancel{(s+4)}\,\frac{8\,(s+1)(s+3)}{s(s+2)\cancel{(s+4)}}\Bigg|\,s+4=0$$

$$= \frac{8\,(-4+1)\,(-4+3)}{(-4)\,(-4+2)}$$

$$= \underline{3}$$

எனவே,

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+4}$$

$$F(t) = L^{-1}\,F(s) = 3L^{-1}\,\frac{1}{s} + 2L^{-1}\,\frac{1}{s+2} + 3L^{-1}\,\frac{1}{s+4}$$

$$= \underline{3 + 2e^{-2t} + 3e^{-4t}}$$

இங்கு நாம் கையாண்டது ஹெவிசைடின் முதல் தேற்றம்.

குறிப்பு : ஹெவிசைடு தேற்றம் 1.

$$F\,(s) = \frac{A_1}{(s+p_1)} + \frac{A_2}{(s+p_2)} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(s+p_n)}$$ என்க.

p_1, p_2, ... p_n சமம் இல்லா ஒருமைப் பேரெண்கள் (unequal unrepeated poles) ஆகட்டும்.

அப்பொழுது,

$$A_k = (s+p_k)\,F(s)\Big|_{s+p_k=0}$$

இதுவே ஹெவிசைடின் முதல் தேற்றம் ஆகும்.

மாதிரி வினு 3·5

கீழ்க்காணும் $F(s)$-இல் இருந்து எதிர் இலாப்லாசு மாற்றத்தின் மூலம் $f(t)$ஐ வருவிக்க.

$$F(s) = \frac{2(s^2+2s-3)}{(s^2+6s+8)}$$

குறிப்பு : பகுதி, தொகுதி இரண்டும் s-இன் ஒரே அடுக்கு. (The denominator and the numerator are of the same degree)

தீர்வு :

$$F(s) = \frac{2(s^2+2s-3)}{(s+2)(s+4)}$$

$$F(s) \equiv A_0 + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+4}$$

$$A(0) = \frac{\text{தொகுதியில் } s^2 \text{ உறுப்பின் கெழு}}{\text{பகுதியில் } s^2 \text{ உறுப்பின் கெழு}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A_1 = (s+2)\,F(s)\Big|_{(s+2)=0}$$

$$= \cancel{(s+2)}\frac{2(s^2+2s-3)}{\cancel{(s+2)}(s+4)}\Big|_{s+2=0} = \frac{2(-3)}{2} = -3$$

$$A_2 = (s+4)\,F(s)\Big|_{s+4=0}$$

$$= \cancel{(s+4)}\frac{2(s^2+2s-3)}{(s+2)\cancel{(s+4)}}\Big|_{s+4=0} = \frac{2(5)}{(-2)} = -5$$

எனவே,

$$F(s) = 2 - \frac{3}{s+2} - \frac{5}{s+4}$$

$$L^{-1} F(s) = 2\, L^{-1} \cdot 1 - 3\, L^{-1} \frac{1}{s+2}$$

$$- 5\, L^{-1} \frac{1}{s+4}$$

எனவே,

$$f(t) = 2\, \delta(t) - 3\, e^{-2t} - 5\, e^{-4t}$$

மாதிரி வினு 3.6

$L^{-1} \dfrac{4\,(s+2)}{(s+3)(s+1)^2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

$F(s) = \dfrac{4\,(s+2)}{(s+3)\,(s+1)^2}$ என இருக்கட்டும்.

$$F(s) \equiv \frac{A}{s+3} + \frac{B_0}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{(s+1)} \quad \dots (1)$$

என எழுதலாம்.

$$A = (s+3)\; F(s) \Big|_{s+3 = 0}$$

$$= \cancel{(s+3)} \frac{4(s+2)}{\cancel{(s+3)}\,(s+1)^2} \Big|_{s+3 = 0} = \frac{4(-1)}{(-2)^2} = -1$$

$$B_0 = (s+1)^2\, F(s) \Big|_{s+1 = 0}$$

$$= \cancel{(s+1)^2} \frac{4(s+2)}{(s+2)\,\cancel{(s+1)^2}} \Big|_{s+1 = 0} = \frac{4(1)}{(2)} = 2.$$

$B_1 = (s+1)\; F(s) \Big|_{s+1=0}$ என்று எழுதிப் பயன் இல்லை.

ஏனெனில் B_0 உறுப்பு வரம்பிலி ஆகிவிடும்.

சமன்பாடு 1ஐ $(s+1)^2$ ஆல் பெருக்க,

$$(s+1)^3 F(s) = \frac{A(s+1)^2}{(s+2)} + B_0 + B_1(s+1)$$

இதில் இருந்து B_0-ஐ விலக்க, இதன் வகைக்கெழு காண்போம்.

$$\frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s) = \frac{d}{ds}\frac{A(s+1)^2}{(s+2)} + 0 + B_1$$

இப்பொழுது $s+1=0$ எனப் பிரதியிட,

$$B_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s)\right]\Bigg|_{s+1=0}$$

அதாவது,

$$B_1 = \frac{d}{ds}\left[\frac{4(s+2)}{(s+3)}\right]\Bigg|_{s+1=0}$$

$$= \frac{4(s+3)-4(s+2)}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=-1}$$

$$= 1$$

எனவே,

$$F(s) = -\frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)}$$

இதன் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் எழுதினால்,

$$f(t) = -L^{-1}\frac{1}{s+3} + 2L^{-1}\frac{1}{(s+1)^2} + L^{-1}\frac{1}{(s+1)}$$

$$= -e^{-st} + 2e^{-t}.t + e^{-t}.$$

எனவே $\underline{f(t) = e^{-t}(1+2t) - e^{-8t}}$

இங்கு நாம் பயன்படுத்தியது ஹெவிசைடின் இரண்டாவது தேற்றம்.

குறிப்பு : ஹெவிசைடு தேற்றம் 2.

$$F(s) = \frac{B_0}{(s+p)^n} + \frac{B_1}{(s+p)^{n-1}} + \frac{B_2}{(s+p)^{n-2}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(s+p)}$$

எனில்

$$B_k = \frac{1}{K!} \frac{d^k}{ds^k} [s+p)^k (Fs)] \Big|_{s+p=0}$$

இதுவே ஹெவிசைடின் இரண்டாவது தேற்றம்.

மாதிரி வினு 3·7 இருபடி உறுப்புக்கள் (quadratic terms)

$F(s) = \dfrac{4}{s(s^2+2s+4)}$; $f(t)$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$F(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+4)}$$

$s^2+2^2+4=0$ எனில் $s = -1 \pm j\sqrt{1-4} = -1 \pm j\sqrt{3}$

எனவே, $s^2+2s+4 = (s+1+j\sqrt{3})\,(s+1-j\sqrt{3})$

$$F(s) \equiv \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1+j\sqrt{3}} + \frac{A_3}{s+1-j\sqrt{3}}$$

இதில் இருந்து A_1, A_2, A_3 இவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணிக்கலாம். [A_2 A_3 இரண்டும் பிரியா இரட்டையாக (conjugate) இருக்கும். $A_3 = A_2^*$ அதாவது $A_2 = a+jb$ எனில் $A_3 = a-jb$].

இதைவிட எளிய முறை ஒன்று கீழே தரப்படுகிறது.

$$F(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+4)}$$

$$= \frac{s^2+2s+4-(s^2+2s)}{s(s^2+2s+4)}$$

$$= \frac{s^2+2^n+4}{s(s^2+2s+4)} - \frac{s(s+2)}{s(s^2+2s+4)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+4}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+1+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

இதற்கு எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் எழுதினால்,

$$f(t) = 1-e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t}\sin\sqrt{3t}$$

3.2.5 வரைபட முறையில் மாறிலிகளின் மதிப்பைக் காணல் : (A graphical method for evaluating the constants)

சிக்கல் உறுப்புக்கள் (complex terms) வரும் இடங்களில், வரைபட வழியிலும் பகுதிப் பின்ன மாறிலிகளைக் (partial fraction constants) கணிக்கலாம். இதற்குத் தேவையானது 'சுழிப் பேரெண் படம்' (pole-zero diagram)

சுழிப் பேரெண் படம் :

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)}{s(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \text{ என்க.}$$

இங்கு, K, z_1, z_2, z_3 p_2, p_2. p_3 இவை மாறிலிகள்.

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s\ \ z_2)(s-z_3)}{s(s-p_1)(s-p_2)(s-p_2)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2} + \frac{D}{s-p_3}$$

இதில்,

z_1, z_2, z_3 என்பவை 'சுழியெண்கள்' (zeros)

p_1, p_2, p_3 என்பவை 'பேரெண்கள்' (poles)

A, B, C, D என்பவை 'எச்சங்கள்' (residues)

சுழியெண் (zero) : s-இன் சார்பு ஒன்றைச் சுழி ஆக்கும் s-இன் மதிப்பு, 'சுழியெண்' எனப்படும்.

பேரெண் (pole) : s-இன் சார்பு ஒன்றை வரம்பிலி ஆக்கும் s-இன் மதிப்பு, 'பேரெண்' எனப்படும்.

எச்சம் (residue) : ஒரு சார்பு விகிதத்தின் (ratio of two functions) பகுதிப் பின்ன விரிவு மாறிலிகள், எச்சங்கள் எனப் படும்.

சுழிப் பேரெண் படம் (pole-zero diagram) :

s-தளத்தில் சுழியெண் (0), பேரெண் (x) இவைகளைக் குறிக்கலாம். இது 'சுழிப் பேரெண் படம்' எனப்படும்.

வரைபட முறை (Graphical method) :

ஒவ்வொரு பேரெண்ணுக்கும் ஓர் எச்சம் இருக்கும்.

$s=o \rightarrow A$; $s=p_1 \rightarrow B$; $s=p_1 \rightarrow C$.

A-இன் மதிப்பைக் காண, மற்ற எல்லா சுழியெண், பேரெண் களிலும் இருந்து, *A*-ன் பேரெண்ணுக்குத் திசைக் கோடுகள் (**directed lines**) வரைக.

இதில் இருந்து,

$$A = \frac{\text{சுழியெண் திசைக்கோடுகளின் பெருக்கற் தொகை}}{\text{பேரெண் திசைக்கோடுகளின் பெருக்கற் தொகை}}$$

இதை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் தெளிவு படுத்தலாம்.

மாதிரி வினு 3·8

$$F(s) = \frac{4(s+2)}{s(s^2+2s+5)}$$

இதன் பகுதிப் பின்ன விரிவை எழுதுக.

தீர்வு 1

$$s^2+2s+5=0 \quad \text{எனில்} \quad s = -1 \pm \sqrt{1-5}$$
$$= -1 \pm j\,2$$

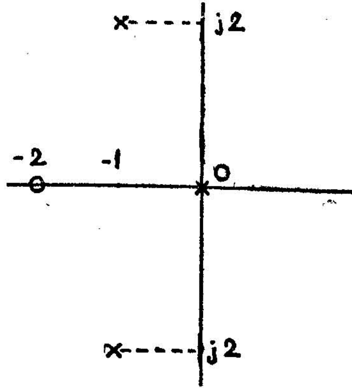
எனவே,

$$F(s) = \frac{4(s+2)}{s(s+1+j2)(s+1-j2)}$$

பேரெண்கள் : $s=o$, $-1-j2$, $-1+j2$

சுழியெண் : $s = -2$

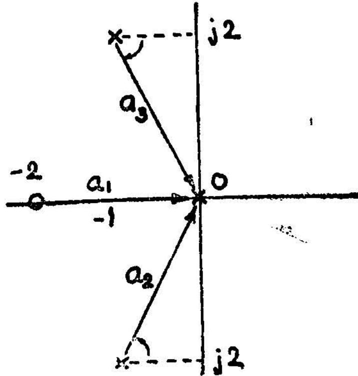
சுழிப் பேரெண் படம் :



படம் 3.10. சுழிப் பேரெண் படம்

$$F(s) \equiv \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1+j2} + \frac{A_3}{s+1-j2}$$ என்க.

A_1-ன் மதிப்பு :



படம் 3.10 அ. A_1-ன் மதிப்பு

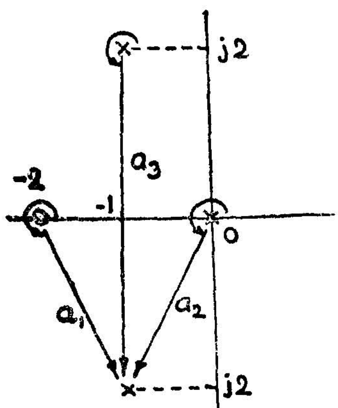
படம் 3·10 அ-விலிருந்து,

$$A_1 = \frac{a_1}{a_2 a_3}$$

$$= \frac{2 \angle 0°}{\sqrt{5} \angle 63{\cdot}5° \; \sqrt{5} \angle -63.5°}$$

$$= 0{\cdot}4 \angle 0°$$

A_2-ன் மதிப்பு :



படம் 3.10 ஆ. A_2 -ன் மதிப்பு

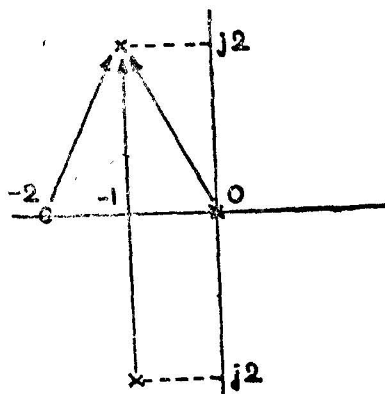
படம் 3·10ஆ-விலிருந்து,

$$A_2 = \frac{a_1}{a_2 a_3}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \angle -63{\cdot}5^\circ}{\sqrt{5} \angle 180^\circ + 63{\cdot}5 \times 4 \angle -90^\circ}$$

$$= \underline{0{\cdot}25 \angle 143^\circ}$$

A_3-ன் மதிப்பு :



படம் 3.10 இ. A_3 -ன் மதிப்பு

படம் 3·10 இ-யிலிருந்து,

$$A_3 = \frac{a_1}{a_2 a_3}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \angle 63{\cdot}5^\circ}{\sqrt{5} \angle 180^\circ - 63{\cdot}5^\circ \times 4 \angle 90^\circ}$$

$$= 0{\cdot}25 \angle -143$$

$A_3 = A_2^*$ என்பது தெளிவாகிறது.

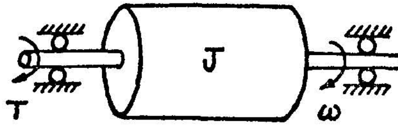
$$F(s) = \frac{0.4}{s} + \frac{0{\cdot}25 \angle 143}{s+1+j2} + \frac{0{\cdot}25 \angle -143}{s+1-j2}$$

3·3 சமன்பாட்டுத் தீர்வு

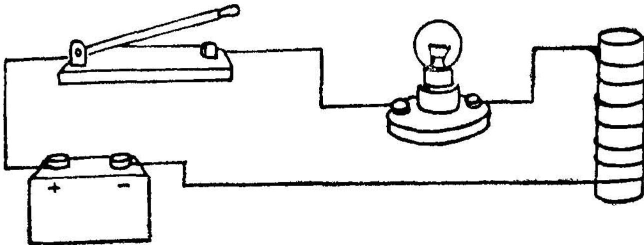
3·3·1 ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (First order differential equations)

ஒரே வகை ஆற்றல் தேக்குப் பகுதியையே உடைய குவை ஒருபடிக் குவை (first order system) எனப்படும். ஏனெனில், அதன் செயற் சமன்பாடு ஒரு மாறி, அதன் வகைக் கெழு இவற்றை மட்டுமே கொண்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :



படம் 3.11. இயக்கியின் சுழற் பகுதி



படம் 3.12. தூண்டு மின்சுற்று

இவற்றின் சமன்பாடுகள்:

$$J\frac{d\omega}{dt} + B\omega = T$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

இவற்றின் பொது உருவம்

$$\frac{dy}{dt} + \sigma y = x$$

தீர்வு:

இருபுறமும் இலாப்லாசு மாற்றம் காணவும்,

$$sY(s) - y(0) + \sigma Y(s) = X(s) \quad \dots (1)$$

$$(s+\sigma)\,Y(s) = X(s) \quad [y(0) = 0 \text{ எனக் கொண்டால்}]$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+\sigma}\,X(s)$$

(அ) x என்பது ஓர் அதிர்ச்சிக் கட்டளைச் சார்பு $A\,\delta(t)$ என்க.

$$x = A\,\delta(t)$$

$$X(s) = A$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+\sigma}\cdot A$$

எனவே,

$$\boxed{y(t) = Ae^{-\sigma t}}$$

(ஆ) கட்டளைச் சார்பு இல்லை $(x = 0)$ எனில் முதனிலை மதிப்பு $y(0) = A$, என்க.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து,

$$(s+\sigma)\,Y(s) = y(0) = A$$

$$\therefore\quad Y(s) = \frac{A}{s+\sigma}$$

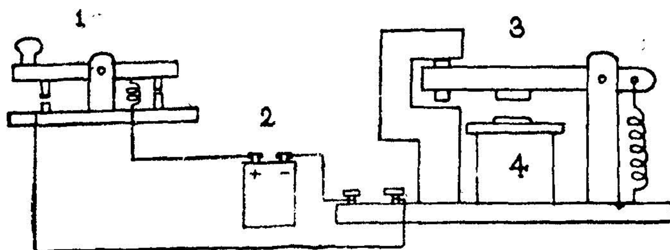
எனவே,

$$\boxed{y(t) = Ae^{-\sigma t}}$$

குறிப்பு : குவையின் இயற்கைப் பதில் விளைவும் (natural response, $x = 0$), அதிர்ச்சிக் கட்டளைப் பதில் விளைவும் (impulse response) இரண்டும் ஒன்றே என இதனால் அறியலாம்.

மாதிரி வினா 3·9

கீழே காட்டப்பட்டுள்ள தந்திச் சுற்றில் L என்பது கட்டையை இழுத்து ஒலி எழுப்பும் இயக்கிச் சுருளைக் குறிக்கிறது. மின் கம்பித் தடை R. $L = 1$ ஹென்றி, $R = 10$ ஓம், மின்கல அழுத்தம் $e = 6$ வோல்ட். அலுவலர் தந்திச் சாவியை (key) 0·05 நொடி அழுத்தி ஒரு 'புள்ளி'யைச் செலுத்துகிறார் (transmits a 'dot'). கம்பிச்சுருளில் பாயும் மின்னோட்டத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

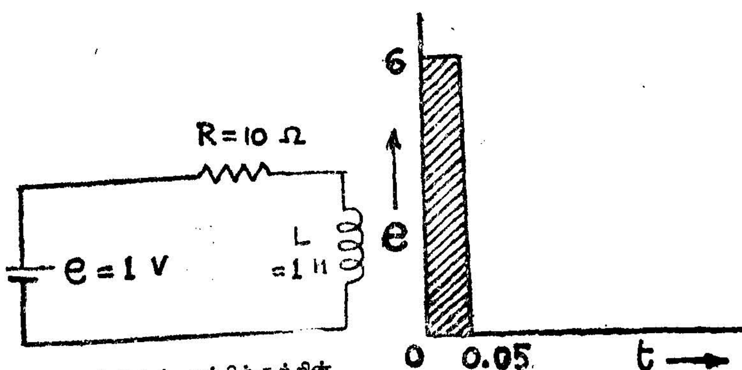


படம் 3.13. தந்திச் சுற்று

1. தந்திச் சாவி; 2. மின்கலம்; 3. ஒலிப்பான்' 4. இயக்கிச் சுருள்

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தந்திச் சுற்றின் (telegraph circuit) உருவியல் மாதிரி (physical model) படம் 3·14-ல் உள்ளது.



படம் 3.14. தந்திச் சுற்றின் உருவியல் மாதிரி

படம் 3.14 அ. கட்டளைச் சார்பு

கட்டளைச் சார்பைப் (forcing function) படம் 3·14அ-வில் காண்க. இவ்விரண்டு படங்களிலிருந்து கீழ்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்.

$$Ri + L\frac{di}{dt} = e \qquad \ldots(1)$$

$$e = 6 \qquad 0 < t < 0.05$$

$$= 0 \qquad 0.05 < t < \infty$$

இது ஓர் அதிர்ச்சி அறிகுறி (impulse signal). இதன் பரப்பு $6\times0{\cdot}05 = 0{\cdot}3$. 0 05 நொடி என்னும் ஆட்சி நேரம் (duration) மிகச் சிறியது ஆகையால், இதை $0{\cdot}3\ \delta\ (t)$ என எழுதலாம்.

எனவே,

$$e = 0{\cdot}3\ \delta\ (t) \qquad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து,

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0{\cdot}3\ \delta\ (t)$$

இதன் இருபுறமும் இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$RI\ (s) + sLI\ (s) - i\ (0) = 0{\cdot}3$$

$R = 10,\ L = 1$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$i\ (0) = 0$ என்க.

பின்,

$$(10 + s)\ I\ (s) = 0{\cdot}3$$

எனவே,

$$I\ (s) = \frac{0{\cdot}3}{s+10}$$

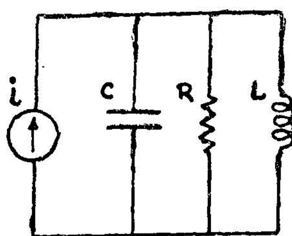
$$i\ (t) = L^{-1}\ I\ (s) = L^{-1}\frac{0{\cdot}3}{s+10} = 0{\cdot}3\ e^{-10t}$$

அதாவது $\boxed{i\ (t) = 0{\cdot}3\ e^{-10t}}$

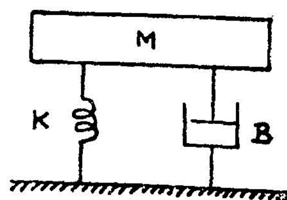
3.3·2 இருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Second order differential equations)

இருவகை ஆற்றல் தேக்குப் பகுதிகளை உடைய குவை இருபடிக் குவை (second order system) ஆகும். அதன் செயற் சமன்பாடு, ஒரு மாறி, அதன் முதல் இரண்டாம் வகைக் கெழுக்கள் (first and second derivatives) ஆகியவற்றைக் கொண்ட இருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக இருக்கும்.

தூண்டு தடை, தேக்கு தடை இரண்டையும் உடைய மின் சுற்று (படம் 3·15), பொருண்மை, மீள்தடை இரண்டையும்



படம் 3.15. இருபடி மின் குவை



படம் 3.16. இருபடி இயந்திரக் குவை

கொண்ட இயந்திரப் பகுதி (படம் 3·16) ஆகியவை எடுத்துக் காட்டுகள் ஆகும்.

இவற்றின் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$i = C\frac{de}{dt} + \frac{1}{R}e + \frac{1}{L}\int e\,dt$$

$$f = M\frac{dv}{dt} + Bv + K\int v\,dt$$

இவற்றை ஒருமுறை தொகையீடு செய்து (Integrate) மாற்றி எழுதினால் பின்வரும் பொது உருவம் கிடைக்கிறது.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sigma\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = x$$

இங்கு σ, ω_n ஆகியவை மாறிலிகள்.

முதனிலே சுழி எனக் கொண்டு இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$s^2 Y(s) + 2\sigma s Y(s) \omega_n^2 Y(s) = X(s)$$

$$(s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2) Y(s) = X(s)$$

இயற்கை விளைவு காண, $X(s) = 1$ எனப் பிரதி இடுகிறோம்.

எனவே,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{(s+\sigma)^2 + (\omega_n^2 - \sigma^2)} \qquad \dots (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2}}{(s+\sigma)^2 + (\omega_n^2 - \sigma^2)}$$

பகுதி 1 :

$\sigma < \omega_n$ என்க.

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2}} e^{-\sigma t} \sin \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2}\, t$$

$\sigma = \delta\, \omega_n$, $\delta < 1$ என இருக்கட்டும்.

$\sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} = \omega_d$ என்க.

எனவே,

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\delta \omega_n t} \sin \omega_d t}$$

அல்லது

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}.\, t} \quad \delta < 1$$

பகுதி 2 :

$\sigma = \omega_n$ என்க.

$$Y(s) = \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \quad \text{[சமன்பாடு 1-லிருந்து]}$$

எனவே,

$$\boxed{y(t) = e^{-\omega_n t} \cdot t} \quad \delta = 1$$

பகுதி 3 : $\sigma > \omega_n$ என்க.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+\sigma)^2 - (\sigma^3 - \omega_n^2)}$$

[சமன்பாடு (1)-லிருந்து]

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - \omega_n^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma^2 - \omega_n^2}}{(s+\sigma)^2 - (\sigma^2 - \omega_n^2)}$$

எனவே,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - \omega_n^2}} e^{-\sigma t} \sin h \sqrt{\sigma^2 - \omega_n^2}\, t$$

அல்லது,

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}} e^{-\sigma t} \sinh \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}\, t} \quad \delta > 1.$$

சுருக்கம் : ஆகவே

$$\frac{dy^2}{dt^2} + 2\sigma \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = x$$

என்ற சமன்பாட்டின் இயற்கைத் தீர்வு **(natural solution)** வருமாறு :

$\sigma = \delta \omega_n$ எனில்,

$$\delta < 1 : \quad y(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} e^{-\sigma t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\, t$$

$$\delta = 1 : \quad y(t) = e^{-\omega_n t} t.$$

$$\delta > 1 : y(t) \frac{1}{\omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}} e^{-\sigma t} \sin h\, \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}\, t.$$

இதில்,

ω_n என்பது இயற்கை அலைவெண் (natural frequency)

ω_d என்பது தடையுறு அலைவெண் (damped frequency)

σ என்பது தடைக்கெழு (damping factor)

δ என்பது தடைவிகிதம் (damping ratio)

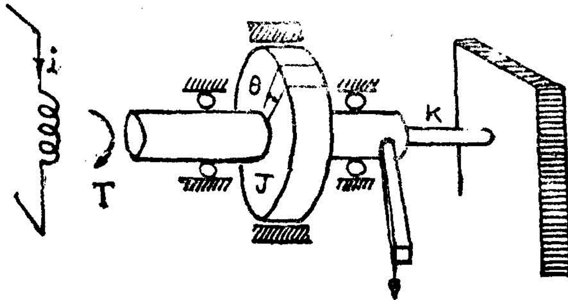
எனப் பின்னல் கால விளைவு (time response) என்ற அத்தியாயத்தில் அறிவோம்.

3·3·3 சிறப்பியல் சமன்பாடும், அளவைச் சார்பும் (Characteristic equation and weighting function)

இருபடிக் குலைவுக்குச் சிறந்ததோர் எடுத்துக்காட்டு திருப்பு விசை இயக்கி (torque motor) ஆகும்.

இதில் ஒரு மின் சுருள் திருப்பு விசையைத் தோற்றுவிக்கிறது. இவ்விசை ஒரு சுழற் பகுதியைத் திருப்புகிறது. சுழற் பகுதி தாங்கிகளை உடையது. இதன் திருப்பம் ஒரு முறுக்கு ஏறும் தண்டால் கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது (படம் 3·17).

பெரும் அடிமைக் குலைகளில் நீர்ம இயக்கிகளின் ஓரதரைத் (valve) திறக்கவும், மூடவும் இத் திருப்புவிசை இயக்கி பயன்படுகிறது.



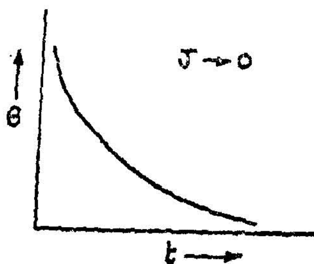
படம் 3.17. ஒரு திருப்புவிசை இயக்கியின் உருவியல் மாதிரி

இதன் செயற் சமன்பாடு (performance equation) :

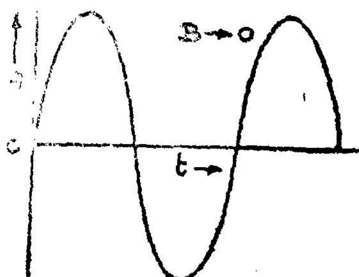
$$J\ddot{\theta}+B\cdot\dot{\theta}+K\theta = T$$

ஊட்டம் இல்லாதபொழுது, தேக்க ஆற்றலால் தோன்றும் இயக்கமே இயற்கை விளைவு. எனவே $J\ddot{\theta}+\dot{B}.\theta+K\theta=0$ ...... (1)

இக் குவையில் நிலைமத்தின் அளவு வெகு குறைவு என்க. உராய்வுத் தடை அதிகமாக இருப்பின், முறுக்குத் தண்டில் தேக்கப்படும் ஆற்றல் உராய்வுத் தடையால் சீராகக் குறைந்து இறுதியில் மறைந்து போகும். விளைவு படம் 3·18-ல் காட்டிய வாறு இருக்கும்.



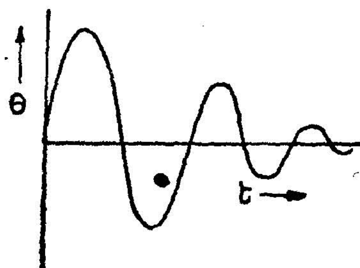
படம் 3·18.
கால விளைவு $J \to 0$



படம் 3·19.
கால விளைவு $B \to 0$

உராய்வுத்தடை வெகு குறைவாக இருந்தால், தேக்கு ஆற்றல் அநேகமாகக் குறைவின்றி நிலைமத்திற்கும், முறுக்குத் தண்டிற்கு மாக மாறிக்கொண்டு இருக்கும். இதைப் படம் 3·19-ல் காண்க.

நிலைமம், உராய்வு, முறுக்கம் இவை ஒப்பிடத்தக்க அளவில் (comparable values) இருக்குமானால் விளைவு, மேற்காட்டப்பட்ட இருவகை விளைவுகட்கும் இடைப்பட்டதாய் இருக்கும் (படம் 3·20).



படம் 3·20. கால விளைவு : J, B, K ஒப்பிடும் அளவின

படம் 3·18 முதல் படம் 3·20 வரை விளக்கும் விளைவுகளை முறையே பின்வரும் கணிதச் சமன்பாடுகளாக எழுதலாம் :

$$\theta = Ae^{-\sigma t}$$

$$\theta = A \sin \omega t$$

$$\theta = Ae^{-\sigma t} \sin \omega t$$

இவை மூன்றையும் உள் அடக்கிய பொதுச் சமன்பாடு

$$\theta = Ae^{(\sigma+j\omega)t}$$

$\sigma+j\omega$ என்பது ஒரு சிக்கல் எண். $s=\sigma+j\omega$, என்க. எனவே சமன்பாடு ஒன்றின் பொதுத் தீர்வு

$$\theta = Ae^{st}$$

J, B, K—இவைகளின் மதிப்பைப் பொறுத்து இப் பொதுத் தீர்வும் பலவகை இயக்கங்களைத் தோற்றுவிக்கும்.

$\theta = Ae^{st}$ என்று சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட,

$$(Js^2+Bs+K)\ Ae^{st} = 0$$

அதாவது, $\theta = Ae^{st}$ பொதுத் தீர்வாக இருக்க வேண்டுமானால்

$$Js^2+Bs+K = 0$$

இதன் பொது உருவம்

$$\boxed{s^2+2\sigma s+\omega_n^2 = 0}$$

$$\sigma = \frac{B}{2J}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

இதுவே சிறப்பியல் சமன்பாடு எனப்படுகிறது.

சிறப்பியல் சமன்பாட்டு வரையறை (Characteristic equation-definition)

> ஊட்டமும், முதனிலையும் சுழியான ஒரு குலையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டில் $\theta = Ae^{st}$ என்ற பொதுத் தீர்வைப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் சமன்பாடு 'சிறப்பியல் சமன்பாடு' எனப்படும்.

குலையின் சிறப்பு இயல்புகளைக் காட்டுவது அதன் இயற்கை விளைவு. இயற்கை விளைவை நிர்ணயிப்பவை இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். எனவே, இது சிறப்பியல் சமன்பாடு எனப் பெயர் பெறுகிறது.

அளவைச் சார்பு (Weighting function)

ஒரு குலையின் ஒருமை அதிர்ச்சி விளைவு (unit impulse response) 'அளவைச் சார்பு' (weighting function) எனப்படும். இதன் குறியீடு (symbol) $w(t)$. சில ஆசிரியர்கள் $h(t)$ என்றும் கொள்வர்.

ஒரு குலையின் அளவைச் சார்பு தெரிந்து இருந்தால், அதைக் கொண்டு, எவ்வகை ஊட்டத்திற்கும், குலையின் விளைவை எளிதிற் காண இயலும். இதுவே அளவைச் சார்பின் சிறப்பு. இதை விரிவாகப் பின்னர்க் காணலாம்.

ஓர் ஈரடுக்குக் குலையில் கட்டுப்படு ஈட்டம் c என்றும், கட்டளை ஊட்டம் r என்றும் இருக்கட்டும். அக்குலையின் செயலைப் பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டால் அறியலாம்:

$$\ddot{c} + 2\sigma\dot{c} + \omega_n^2 c = r$$

முதனிலை சுழி எனக் கொண்டு, இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$(s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2)\, C(s) = R(s)$$

$r = \delta(t)$ எனில் $R(s) = 1$

எனவே, $C(s) = \dfrac{1}{s^2+2\sigma s+\omega_n^2}$

$$c = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2\sigma s+\omega_n^2}\right]$$

ஆக, இக் குலையின்

(i) சிறப்பியல் சமன்பாடு : $s^2+2\sigma s+\omega_n^2 = 0$

(ii) அளவைச் சார்பு :

$$w(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2}\right]$$

3.3.4 மடிப்பு முறையில் தீர்வு காணல் (Solution by the method of convolution)

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பல்வகைக் கட்டளைச் சார்புகளுக்கும் ஏற்ற தீர்வுகள் தேவைப்படுகின்றன என்க. பொது

வாகக் கட்டளைச் சார்பு (forcing function) $r(t)$ என்றும், அளவைச் சார்பு (weighting function) $w(t)$ என்றும் இருக்கட்டும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $c(t)$, கொடுத்துள்ள கட்டளைச் சார்பு $r(t)$, அளவைச் சார்பு $w(t)$ இவற்றின் மதிப்பு (convolution) ஆகும். அதாவது;

$$c(t) = r(t) * w(t) \quad \text{அல்லது,}$$

$$c(t) = \int_0^t r(T)\, w(t-T)\, dT$$

குறிப்பு :
$$\int_0^t r(T)\, w(t-T)\, d(T) = \int_0^t w(T)\, r(t-T)\, dT$$

இதன் நிரூபணம் விரிவு அஞ்சி விடுக்கப்படுகிறது. ஈடுபாடு உடையோர் இதனை மேற்கோள் (reference) 3, 4 ஆகியவற்றில் விளக்கமாகக் காணலாம்.

மாதிரி வினா 3.10

ஒரு திருப்பு விசை இயக்கியில் சுழற்பகுதியின் நிலைமத் திருப்பு விசை $J = 2$ கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}, உராய்வுத் தடை $B = 20$ நியூட்டன் மீட்டர்—நொடி/ரேடியன். முறுக்குத் தடை $K = 82$ நியூட்டன் மீட்டர்/ரேடியன். அதன் தண்டிற்கு ஒரு மாறாத் (constant) திருப்புவிசை $T = 120$ நியூட்டன்—மீட்டர் கொடுத்தால் ஏற்படும் இயக்கத்தைக் கணிக்க.

தீர்வு :

திருப்புவிசை இயக்கியின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = T\,\theta$$

முதனிலை ஆற்றல் சுழி என்க. $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

இருபுறமும் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$(Js^2 + Bs + K)\,\theta(s) = T(s)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{Js^2+Bs+K} T(s)$$

$$= \frac{T(s)}{2s^2+20s+82}$$

$$= \frac{0.5\ T(s)}{s^2+10s+41}$$

$T = \delta(t)$ எனில் $T(s) = 1,$

$$w(t) = L^{-1}\theta(s) = L^{-1}\frac{0{\cdot}5}{s^2+10s+41}$$

$$= L^{-1}\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{(s+5)^2+4^2}$$

$$= \tfrac{1}{8}e^{-5t}\sin 4t$$

$T = 120$

அதாவது $r(t) = 120$

$$c(t) = r(t) * w(t) = w(t) * r(t)$$

$$= \int_0^t w(T)\, r(t-T)\, dT$$

$$= \int_0^t \tfrac{1}{8} e^{-5t} \sin 4T.120\, dT$$

$$= 15\int_0^t e^{-5t} \sin 4T\, dT$$

$$= 15\left[\frac{e^{-5t}}{(5)^2+4^2}\left\{5\sin 4T - 4\cos 4T\right\}\right]_0^t$$

$$c(t) = \frac{15}{41}\left[4 \quad e^{-5t}(5\sin 4t+4\cos 4t)\right]$$

$$\left[\int e^{-at}\sin bt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left\{a\sin bt - b\cos bt\right\}\right]$$

குறிப்பு : சாதாரண முறையில் தீர்வு காணும் பொழுது,

$$T(s) = \frac{120}{s}$$

$$\theta(s) = \frac{120}{s} \cdot \frac{0{\cdot}5}{s^2 + 10s + 41}$$

$$= \frac{60}{41} \cdot \frac{41}{s^2 + 10s + 41}$$

$$= \frac{60}{41}\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+5}{(s+5)^2+4^2} + \frac{5}{4}\,\frac{4}{(s+5)^2+4^2}\right\}\right]$$

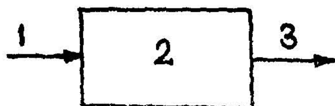
$$\theta(t) = \frac{60}{41}\left[1 - e^{-5t}\left(\cos 4t + \frac{5}{4}\sin 4t\right)\right]$$

$$= \frac{15}{41}\left[4 - e^{-5t}(5\sin 4t + 4\cos 4t)\right]$$

மடிப்பு முறையிலும் இதே தீர்வே கிடைத்தது.

3·3·5 செலுத்துச் சார்பு (Transfer function) முறையில் தீர்வு காணல் :

ஒரு குவையில் கட்டளைக்கும் அதன் விளைவிற்கும் இடையில் உள்ள உறவைக் காட்டுவது செலுத்துச் சார்பு. இதை ஈட்ட ஊட்ட விகிதம் என்றும் கூறலாம்.



படம் 3.21. செலுத்துச் சார்பு

1. ஊட்டம்; 2. செலுத்துச் சார்பு; 3. ஈட்டம்

> முதனிலை சுழியான ஒரு நேர் உறவுக் குவையில் (linear system) இலாப்லாசு மாற்றம் அடைந்த ஈட்ட ஊட்ட விகிதமே செலுத்துச் சார்பு (transfer function) எனப்படும்.

ஒரு திருப்பு விசை இயக்கியின் செலுத்துச் சார்பு $\frac{\theta(s)}{T(s)}$. இன்னும் பொதுவாக, ஈட்டம் C, ஊட்டம் r என்கையில், செலுத்துச் சார்பு $\frac{C(s)}{R(s)}$ ஆகும்.

திருப்பு விசை இயக்கியில்,

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} \cdot T(s)$$

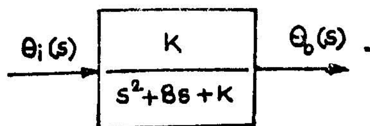
இதன் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் $\theta(t)$ஐ தருகிறது.

இவ்வாறு ஒரு குவையின் செலுத்துச் சார்பும், கட்டளைச் சார்பும் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் வகைக் கெழுச் சமன் பாட்டின் தீர்வு, L^{-1} (செலுத்துச் சார்பு X கட்டளைச் சார்பு) என்பதே. இதுவே செலுத்துச் சார்பு முறை ஆகும்.

மாதிரி வினா 3·11

கீழ்க்காணும் குவையில் $\theta_i = 2$ என்க

$K = 12, 16, 32$ எனில், θ_oவின் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 3.22

தீர்வு :

$$\theta_i = 2$$

$$\theta_i(s) = \frac{2}{s}$$

$$\theta_o(s) = \frac{K}{s^2 + 8s + K}\theta_i(s)$$

$$= \frac{2K}{s(s^2 + 8s + K)}$$

(i) $K=12$ எனில் :

$$\theta_o(s) = \frac{24}{s(s^2+8s+12)}$$

$$= \frac{24}{s\,(s+2)\,(s+6)}$$

$$\equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+6}$$

$$A = \left.\frac{24}{(s+2)\,(s+6)}\right|_{s=0} = 2$$

$$B = \left.\frac{24}{s(s+6)}\right|_{s=-2} = -3$$

$$C = \left.\frac{24}{s(s+2)}\right|_{s=-6} = -3$$

$$\theta_o(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s+6}$$

எனவே, $\theta_0(t) = 2-3e^{-2t}+3e^{-6t}$

(ii) $K = 16$ எனில் :

$$\theta_0(s) = \frac{32}{(s^2+8s+16)}$$

$$= \frac{32}{s(s+4)^2}$$

$$\equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+4)^2} + \frac{C}{(s+4)}$$

$$A = \left.\frac{32}{(s+4)^2}\right|_{s=0} = 2$$

$$B = \left.\frac{32}{s}\right|_{s=-4} = -8$$

$$C = \frac{d}{ds}\left[\frac{32}{s}\right]\Bigg|_{s=-4} = \left.\frac{-32}{s^2}\right|_{s=-4} = -2$$

$$\theta_o(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{(s+4)^2} - \frac{2}{(s+4)}$$

எனவே

$$L^{-1}\theta_o(t) = L^{-1}\theta_o(s) = 2 - 8e^{-4t}\,t - 2e^{-4t}$$

$$\theta_o(t) = 2 - 8e^{-4t}\,t - 2e^{-4t} = 2\left[1 - e^{-4t}(1+4t)\right]$$

(iii) $K = 32$ என்க:

$$\theta_o(s) = \frac{64}{s(s^2+8s+32)}$$

$$= 2\left[\frac{s^2+8s+32-(s^2+8s)}{s(s^2+8s+32)}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+4}{(s+4)^2+4^2} + \frac{4}{(s+4)^2+4}\right\}\right]$$

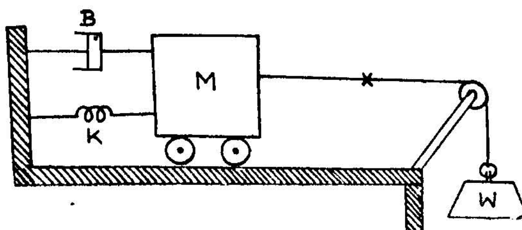
எனவே,

$$\theta_o(t) = 2\left[1 - e^{-4t}(\cos 4t + \sin 4t)\right]$$

மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுக்களை இனிக் காண்போம்.

மாதிரி வினா 3.12

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இயந்திரக் குலை முதலில் இயக்கமில் நிலையில் உள்ளது. நேரம் $t=0$ என்கையில் பளு W-ஐ வண்டி M-உடன் இணைத்துள்ள கயிறு துண்டிக்கப் படுகிறது. வண்டியின் இயக்கம் $x(t)$-ஐ கணிக்கவும்.



படம் 3.23 ஓர் இயந்திரக் குவை

$M = 2$ கிலோ கிராம்

$W = 100$ நியூட்டன்

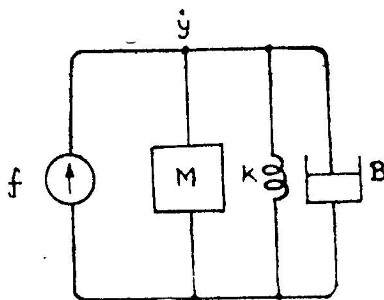
$K = 200$ நியூட்டன்|மீட்டர்

$B = 20$ நியூட்டன்–நொடி/மீட்டர்

தீர்வு 1

வண்டி M, பளு W–வால் இழுக்கப்படும் பொழுது சிறிது தூரம் நகர்ந்து (xo), பளுவின் இழுப்பு விசையும், சுருள் வில்லின் (spring) எதிர்ப்பு விசையும் சமமாகும் நிலையில் நிற்கும்.

இக் குவையின் சமன்பாட்டை எழுத, இயந்திர வலைப்படம் (3·24) உதவுகிறது.



படம் 3.24

இதில் இருந்து,

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = W$$

நேரம் $t = o$ என்கையில், $x = x_o$. அப்பொழுது, குவை நிலையாக இருப்பதால், $\dot{x} = \ddot{x} = o$,

எனவே, $o + o + Kx_o = W$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{W}{K}$$

$$= \frac{100}{200} = 0{\cdot}5$$

இந்த சமயத்தில் கயிறு துண்டிக்கப்படுகிறது. அதாவது இதுவரை வலதுபுறமாக வண்டியை இழுத்துக்கொண்டு இருந்த விசை W இல்லாது போகிறது. இது, கயிறு வெட்டப்படாமலேயே, இடதுபுறமாக வண்டியை இழுக்கும் புதிய விசை (W) ஒன்றை இணைப்பதற்குச் சமம் ஆகும்.

இவ்வாறு கொள்ளும்பொழுது x_o தூரம் நகர்ந்த பின் உள்ள புதிய நிலையில் இருந்தே பெயர்ச்சி x அளக்கப்பட வேண்டும்.

எனவே,

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = W^{+}$$

$^{+}$ (கொடுத்துள்ள W இழுவிசை, இந்த W அழுத்துவிசை)

$$2\ddot{x} + 20\dot{x} + 200x = 100$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 10\dot{x} + 100x = 50$$

இருபுறமும் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$(s^2+10s+100)\,X = \frac{50}{s}$$

$$\therefore X = \frac{50}{s(s^2+10s+100)}$$

$$= 0{\cdot}5\left[\frac{s^2+10s+100-(s^2+10s)}{s(s^2+10s+100)}\right]$$

$$= 0{\cdot}5\left[\frac{s^2+10s+100}{s(s^2+10s+100)} - \frac{s(s+10)}{s(s^2+10s+100)}\right]$$

$$= 0{\cdot}5\left[\frac{1}{s} - \left\{\frac{s+5}{(s+5)^2+(\sqrt{75})^2} + \frac{5}{\sqrt{75}}\cdot\frac{\sqrt{75}}{(s+5)^2 \div (\sqrt{75})^2}\right\}\right]$$

எனவே,

$$x = 0{\cdot}5 \left[1 - e^{-5t} (\cos \sqrt{75}\, t + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ si } \sqrt{75} t \right]$$

$$= 0{\cdot}5 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-5t} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \sqrt{75}\, t + \frac{1}{2} \sin \sqrt{75}\, t \right) \right]$$

$$= 0{\cdot}5 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-5t} \sin \left(\sqrt{75}\, t + \frac{\pi}{3} \right] \right.$$

இதுவே, வண்டியின் இடப் பெயர்ச்சி $x\ (t)$ ஆகும்.

மாதிரி வினா 3·13 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள (படம் 3·25) இயந்திரக் குவையில் சுமையின் சுழல் வேகம் ω, இயக்கியின் ஊட்டத் திருப்பு விசை T, இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள உறவை வருவிக்க.

இயக்கியின் ஊட்டத் திருப்பு விசை $T = 5$ நியூட்டன்-மீட்டர் எனில், சுமையின் கடைநிலைச் சுழல் வேகம் என்ன ?

$J_m = 2$ கிலோ கிராம் மீட்டர்^{2}
$B_m = 10$ நியூட்டன்–மீட்டர் நொடி/ரேடியன்
$J_2 = 100$ கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}
$B_2 = 1000$ நியூட்டன்-மீட்டர், நொடி/ரேடியன்

$$n = \frac{1}{10}$$

படம் 3.25

தீர்வு :

$$T_2 = J_2 \frac{d^2\omega}{dt} + B_2\, \omega_2$$

$$T_2^1 = nT_2$$

$$T = J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m\, \omega_m + T_2^1$$

அதாவது,

$$T = J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m\, \omega_m + n \left[J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + B_2\, \omega_2 \right]$$

$$= J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m \omega_m + n^2 \left[J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + B_2\omega_m \right]$$

$$= (J_m + n^2 J_2) \frac{d\omega_m}{dt} + (B+n^2B_2)\,\omega_m$$

$$J_m+n^2 J_2 = 2 + 10^{-2}\times100 = 3 \ \frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்/நொடி}}$$

$$B_m+n^2B_2 = 10+10^{-2}\times1000 = 20 \ \frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ரேடியன்}}$$

எனவே,

$$T = 3 \frac{d\omega_m}{dt} + 20\,\omega_m$$

$$\omega_m = 10\,\omega_2$$

$$\therefore\ T = 30 \frac{d\omega_2}{dt} + 200\,\omega_2$$

இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில் [முதனிலைசுழி $\omega_2(0) = 0$]

$$T(s) = (30s+200)\,\Omega_2(s)$$

$$\therefore\ \frac{\Omega_2(s)}{T(s)} = \frac{1}{(30s+200)}$$

$T = 5$

$T(s) = \frac{5}{s}$ இதுவே ω_2, T இவற்றின் இடை உறவு.

$$\therefore\ \Omega_2(s) = \frac{5}{s(30s+200)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \omega_2(t) = \lim_{s\to 0} s\Omega_2(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\ \frac{5}{s(30s+200)}$$

$$= \frac{5}{200} \text{ or } \frac{1}{40}$$

எனவே, சுமையின் கடை நிலை வேகம் $\frac{1}{40}$ ரேடியன்/நொடி

மாதிரி வினா 3· 14:

ஓர் ஆள்குலையின் மாற்றுச் சார்பு (transfer function) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$; c என்பது கட்டுப்பாட்டு ஈட்டம் (Controlled output). r என்பது கட்டளை ஊட்டம் (command input). $r = \delta(t)$ எனில், cயின் மதிப்பு என்ன ?

($\delta < 1$ என்று கொள்க.) இதில் இருந்து $r = u(t)$ எனில், cயின் மதிப்பு என்ன என்று காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s+\delta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\delta^2)}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \quad \frac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{(s+\delta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\delta^2)}$$

எனவே,

$$c = \frac{wn}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}t$$

இதுவே கொடுத்துள்ள குலையின் அளவைச் சார்பு (Weighting function) ஆகும். அதாவது,

$$w(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}t$$

$$r(t) = u(t) = 1$$

மடிப்புத் தேற்றத்தின் (convolution theorem) படி

$$c(t) = \int_0^t w(T).r(t\text{-}T)\,dT$$

$$w(T) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} \; e^{-\delta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,t$$

$$r(t-T) = 1$$

எனவே,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} \int_0^t e^{-\delta\omega_n T} \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,T \; dt$$

குறிப்பு :

$$\int e^{at} \sin bt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (a \sin bt - b \cos bt)$$

இங்கு

$$a = -\delta\omega_n$$

$$b = w_n \sqrt{1-\delta^2}$$

$$a^2+b^2 = \omega_n^2$$

$$\therefore \quad c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} \left[\frac{e^{-\delta\omega_n T}}{\omega_n^2} \left(-\delta\omega^n \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,T - \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cos \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,T \right) \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \left[e^{-\delta\omega_n T} \left(\delta \sin \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,T + \sqrt{1-\delta^2} \cos \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\,T \right) \right]_0^t$$

$\cos\phi = \delta$ என்க.

அப்பொழுது $\sin\phi = \sqrt{1-\delta^2}$

$$\sin\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi = \sin(\theta+\phi)$$

எனவே,

$$c(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[e^{-\delta\omega_n T} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}T+\phi\right)\right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[e^{-\delta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t+\phi\right) - \sin\phi\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\, e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t+\phi) + \frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t+\phi)$$

$$\phi = \cos^{-1}\delta$$

பயிற்சி 3

3·1 இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க :

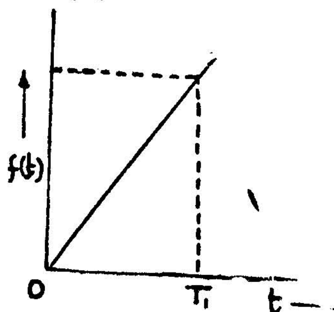
அ. $e^{-at}\sin(\omega t+\theta)$

ஆ. $t^n e^{0\,5t}$

இ. $\frac{1}{\alpha^2}\left[1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right]$

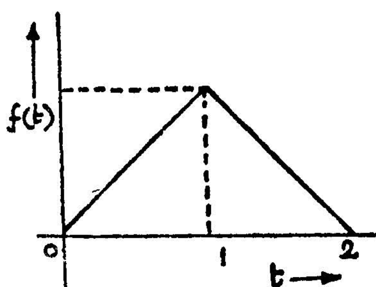
3,2 இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க :

(அ)

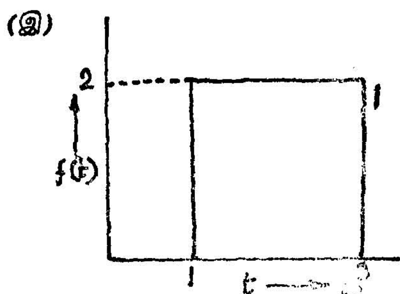


படம் 3·26

(ஆ)

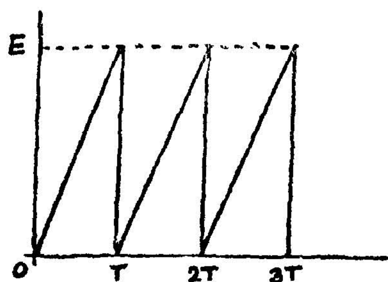


படம் 3,27

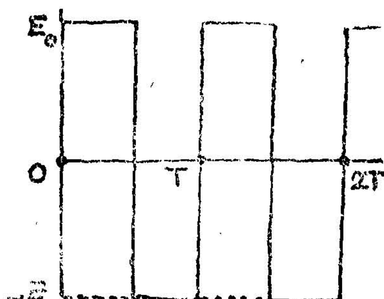


படம் 3'28

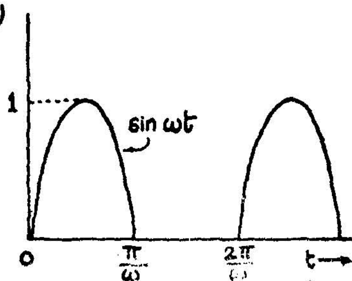
3.3 கீழ்வரும் தொடர் அலை வடிவங்களின் இலாப்லாசு மாற்றங்களைக் கணிக்க :



படம் 3.29



படம் 3.30

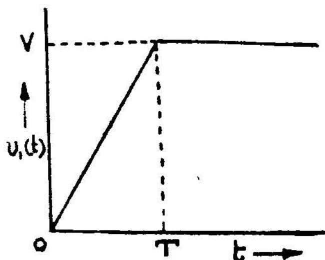


படம் 3.31

3.4 $f(t) = \frac{1}{ab^2} - \frac{e^{-at}}{a(a^2+b^2)} + \frac{\cos bt}{b^2\sqrt{a^2+b^2}}$

என்ற சார்பின் இலாப்லாசு மாற்றத்தை எழுதுக. கடை மதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $f(t)$ இன் கடை மதிப்பைக் காண்க. $f(t)$ யில் $t \to \infty$ என்று பிரதியிட்டு வரும் மதிப்புடன் இதனை ஒப்பிடுக.

3·5 படத்திற் காட்டியுள்ள மின் அழுத்த அலை வடிவம் முதனிலை ஆற்றல் சுழியாகவுள்ள ஒரு தொடர் RL. சுற்றுக்கு (initially de energised series RL circuit) வழங்கப்படுகிறது.



படம் 3 32

(அ) $v(t)$ இன் இலாப்லாசு மாற்றம் என்ன?

(ஆ) எதிர் இலாப்லாசு மாற்றத்தின் உதவி இன்றி மின்னோட்டம் $i(t)$யின் கடை மதிப்பு என்ன என்று கணிக்க.

3·6 $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$ எனில் $f(t)$யின் மதிப்பென்ன?

3.7 நிறுவுக !

$$L^{-1} \frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = \alpha e^{-\alpha t} \left[\cos\beta t + \frac{1}{\beta}\left(\frac{b}{a} - \alpha\right) \sin \beta t\right]$$

3.8 எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்க.

(அ) $\dfrac{1}{s(s^2+2s+10)}$ (ஆ) $\dfrac{s+2}{s^2(s+1)(s+6)}$

3.9 நிறுவுக :

(அ) $L\, f(t-T) = e^{-Ts}\, L\, f(t)$

(ஆ) $L\, f'(t) = sF(s)-f(o)$

3.10 நிறுவுக :

(அ) $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$

(ஆ) $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

3·11 எதிர் இலாப்லாச மாற்றத்தின் வழி $f(t)$இன் மதிப்பைக் காண்க :

(அ) $F(s) = \dfrac{s^3+6s^2+11s+6}{s(s+2)\,(s+3)}$

(ஆ) $F(s) = \dfrac{s^4+12s^3+74s^2+153s+90}{(s+1)\,(s+4)\,(s+5)}$

3·12 பின்வரும் சார்புகளின் சுழி எண்களையும், பேரெண்களையும் கண்டுபிடித்து, அவற்றை சுழிப் பேரெண் படத்திற் குறிக்க.

(அ) $F(s) = \dfrac{4\,(s+1)}{s(s^2+2s+2)\,(s^2+6s+10)}$

(ஆ) $F(s) = \dfrac{3\,(s+1)\,(s+3)^2}{(s+2)\,(s^2+4)\,(s^2+8s+17)}$

3·13 வரைபட முறையில் 'பகுதிப் பின்ன விரிவு' காண்க :

(அ) $\dfrac{4\,(s+4)}{s(s+3)\,(s^2+2s+2)}$

(ஆ) $\dfrac{(s+1)}{s(s+2)(s^2+4)}$

3·14 மடிப்பு முறையில் எதிர் இலாப்லாச மாற்றம் காண்க.

(அ) $F(s) = \dfrac{1}{s^2\,(s+9)}$

(ஆ) $F(s) = \dfrac{1}{s\,(s+4)^2}$

3·15 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் அளவைச் சார்பை (weighting function) வருவிக்க. அதன் துணையால் கட்டளை விளைவைக் கணிக்க.

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 4\,\frac{dc}{dt} + 4c = 3\,\frac{dr}{dt} + 2\,r$$

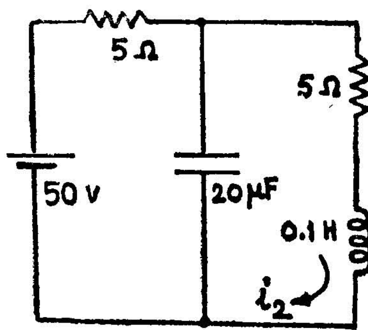
3.16 ஓர் செயற் குவையின் செயற்பாட்டைப் பின்வரும் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டால் அறியலாம்.

$$\frac{d^3c}{dt^3} + 4\frac{d^2c}{dt^2} + 6\frac{dc}{dt} + 4c = r$$

$$c(0) = 1, \quad c'(0) = 0, \quad c''(0) = -1$$

இதன் இயற்கை விளைவை இலாப்லாசு முறையில் தருவிக்க.

3.17 படத்திற் காணும் மின் வலையில் மின் குமிழ் s, $t=0$ என்கையில் மூடப்படுகிறது. i_2-இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 3.33

3.18 ஓர் ஏவுகணைச் செலுத்தியின் **(missile launcher)** நிலைமத் திருப்பு விசை 5000 கிலோ கிராம்–மீட்டர்², உராய் தடை 2000 நியூட்டன் மீட்டர்–நொடி | ரேடியன். ஒரு திருப்பு விசை வழங்கி (torque source) இதற்கு 2500 நியூட்டன்–மீட்டர் மாறாத் திருப்பு விசையை அளித்தால், ஏவு கணைச் செலுத்தியின் திருப்பம் என்னவென்று கணிக்க.

3·19 ஒரு பொருண்மை, சுருள் வில், உராய் தடைக் குவையில் பொருண்மை M இன் பெயற்சியைக் குறிக்கும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

$f = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$ என்க. இதில்

பொருண்மை $M =$ 0 கிலோ கிராம்

உராய்தடைக் கெழு $B = 80$ நியூட்டன்-நொடி | மீட்டர்

மீள் விசைக் கெழு $K = 160$ நியூட்டன் | மீட்டர்

இயக்கு விசை $f = 20$ நியூட்டன் எனவும்

$x(o) = 4$. $x'(o) = o = x''(o)$ எனவும் கொண்டு, M இன் பெயற்சிச் சமன்பாட்டை வருவிக்க. வரம்பிலா நேரத்திற்குப் பின் கிடைக்கும் M இன் பெயற்சியைக் கணக்கிடுக.

3.20 ஒரு பீரங்கித் திருப்ப ஆள்குவையில், அடிமை இயக்கியின் திருப்பம் θm, பீரங்கியின் திருப்பம் θo. இரண்டும் பின்வரும் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

$$J\ddot{\theta}_o + B\dot{\theta}_o + K\dot{\theta}_o = Kn\,\theta m$$

$\theta m = 4$ ரேடியன் என்ற படி ஊட்டத்திற்கு உரிய விளைவைக் கணக்கிடுக. குவையின் முதனிலை ஆற்றல் சுழியெனக் கொள்க. $J = 50$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}, $B = 300$ நியூட்டன் மீட்டர் நொடி | ரேடியன்; $K = 450$ நியூட்டன் மீட்டர் | ரேடியன், $n = \frac{1}{10}$.

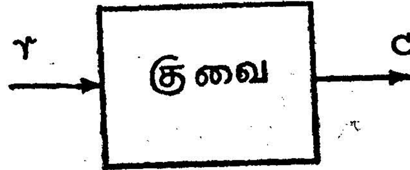
4. செலுத்துச் சார்பு
(Transfer Function)

4.1 செலுத்துச் சார்பு

4.1.1 அறிமுகம் : ஆள்குவை உறுப்புக்களின் செயலைக் கணிதச் சார்புகளாகக் (**mathematical functions**) குறித்தல் இயலும். ஒரு குவையின் ஈட்டம், ஊட்டத்தையும், குவையின் செயலையும் பொறுத்தது. எனவே, ஊட்ட ஈட்டத் தொடர்பை ஒரு கணிதச் சார்பாகக் காட்டலாம். இதுவே 'செலுத்துச் சார்பு' (**transfer function**) எனப்படும்.

செலுத்துச் சார்பால் ஊட்டத்தைப் பெருக்கவும், ஈட்டம் கிடைக்கிறது. இதன் வரையறை வருமாறு:

> **ஒரு நேர் உறவுக் குவையின் முதல் நிலை (initial state) சுழி எனக் கொண்டு கணிக்கப் பெறும் இலாப்லாசு மாறிய ஈட்ட ஊட்ட விகிதமே செலுத்துச் சார்பு எனப்படும்.**



படம் 4.1 பெட்டிப் படம்

செலுத்துச் சார்பு : $\dfrac{C(s)}{R(s)}$

இங்கு $C(s) = L\, c(t)$; $R(s) = L\, r(t)$,

ஆள்குவைப் பகுப்பாய்வில் செலுத்துச் சார்பு ஓர் ஆற்றல் மிகு கருவியாகப் (tool) பயன் படுகிறது. இதன் சிறப்பு இயல்புகள் வருமாறு :

(1) ஓர் ஆள்குவையில் பல்வேறு கட்டளை அறிகுறிகளின் விளைவு காண இச் செலுத்துச் சார்பு உதவுகிறது. கட்டளை அறிகுறியைச் செலுத்துச் சார்பால் பெருக்கி அதற்கு எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் கண்டால், ஆள்குவையின் விளைவு (response) கிடைக்கிறது.

(2) ஓர் எளிய பிரதியீட்டின் (substitution) வழி, ஆள்குவையின் அலை விளைவைக் காண உதவுகிறது. அதாவது, செலுத்துச் சார்பில் $S = j\omega$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பதே அலை விளைவு (frequency response).

(3) ஓர் ஆள்குவையின் நிலையுறுதி (stability) காணவும் பயன் படுகிறது செலுத்துச் சார்பு. செலுத்துச் சார்பின் பேரெண்கள் (poles) யாவும் எதிர்க் குறி (negative) எண்களாக இருப்பின், இவை நிலையுறுதி உடையது எனலாம்.

செலுத்துச் சார்பு முறையைப் பயன் படுத்துவதற்கும் ஒரு வரம்பு உண்டு.

1. நேர் உறவு வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளால் விளக்க இயலும் ஆள்குவைகளுக்கே செலுத்துச் சார்புமுறை பொருந்தும்.

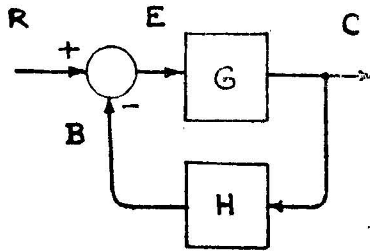
2. ஓர் ஊட்டம், ஓர் ஈட்டம் இவற்றையே உடைய எளிய ஆள்குவைகளுக்கே செலுத்துச் சார்பு காணல் இயலும். பன்மை ஊட்ட-ஈட்ட ஆள்குவைகளில் இது செயல் அற்றுப்போகிறது.

3. செலுத்துச் சார்பின் வரையறையிலேயே, குவையின் முதல் நிலை சுழியெனக் கொள்ளப்படுகிறது. இது எல்லாக் குவைகளுக்கும் பொருந்தாது.

4·1·2 ஆள்குவைச் செலுத்துச் சார்பு உறவுகள் :

பின்னூட்டு ஆள்குவை ஒன்றின் பெட்டிப் படத்தை அடுத்த பக்கத்தில் காண்க.

இதில் பெரிய எழுத்துக்கள் இலாப்லாசு மாற்றம் அடைந்த மாறிகளைக் குறிக்கின்றன. சான்று $R = R(s) = Lr(t)$



படம் 4.2 பின்னூட்டு ஆள்குவை பெட்டிப் படம்

C : கட்டுப் பாட்டு ஈட்டம் (controlled output)
E : இயக்கு அறிகுறி (actuating signal)
அல்லது வழு அறிகுறி (error signal)
R : ஆதார ஊட்டம் (reference input)
B : பின்னூட்டு அறிகுறி (feedback signal)

இக் குறியீடுகளைக் கொண்டு பின் வரும் செலுத்துச் சார்பு களை எழுதலாம்.

முன் செல் பாதை செலுத்துச் சார்பு (forward path transfer function) : G.

$$G = \frac{C}{E}$$

பின்னூட்டுப் பாதை செலுத்துச் சார்பு (feedback path transfer function) : H.

$$H = \frac{B}{C}$$

சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு (loop transfer function) : GH

$$GH = \frac{B}{E}$$

முழுச் செலுத்துச் சார்பு (overall transfer function) : M

$$M = \frac{C}{R}$$

முழுச் செலுத்துச் சார்பை (M) நிறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு (closed-loop transfer function) என்றும் சொல்வது உண்டு.

இதற்கு எதிராக, $G = \frac{C}{E}$ குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு (open-loop transfer function) எனப்படும்.

நிறை சுற்று, குறை சுற்று செலுத்துச் சார்புகளின் இடை உறவைப் பின் வருமாறு நிறுவலாம்:

படம் 4.2 இல் இருந்து,

$$\begin{aligned} C &= GE \\ &= G\,(R-B) \\ &= G\,(R-HC) \\ &= GR-GHC \\ C\,(1+GH) &= GR \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{C}{R} = M = \frac{G}{1+GH}}$$

இவ்வாறு, குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பும், நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பும் தொடர்புற்று இருக்கின்றன.

முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவையில், $B = C$. எனவே, $H = 1$.

அதாவது,

$$\boxed{\frac{C}{R} = M = \frac{G}{1+G}}$$

இது மிகவும் பயன்படும் உறவுகளுள் ஒன்றாகும்.

அடுத்து வரும் பகுதியில் சில எளிய வலைகளின் (networks) செலுத்துச் சார்புகளைக் காண்போம்.

4.1.3 எளிய வலைகளின் செலுத்துச் சார்புகள் :

ஆள் குவைகள் சீராக இயங்க, வழுக்கணிப்பி, பெருக்கி, இயக்கி போன்ற சிறப்பு உறுப்புக்களைத் தவிர சில ஈடுசெய் கூறுகளும் (compensating elements) அவசியம் ஆகின்றன.

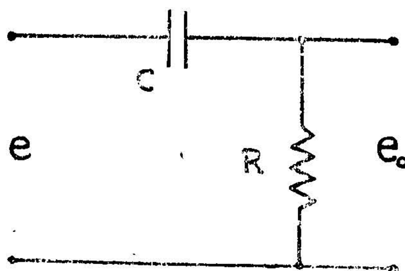
சான்றாக, உராய்வை அதிகம் ஆக்கவோ, குறைக்கவோ அல்லது பருவப் பெயர்ச்சியைக் (phase shift) கூட்டவோ, கழிக்கவோ கூறுகள் தேவை. இவை மின் இயல், இயந்திர இயல்,

பாய்ம இயல் கூறுகளாக இருக்கலாம். இவற்றுள் மின் இயல் பருவமாற்று வலைகளை இங்குக் காண்போம்.

மாதிரி 4·1 :

பருவ முந்து வலை (phase lead network)

படம் 4.3 இல் ஒரு பருவ முந்து வலை காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 4.3 பருவம் முந்து வலை

பெயர்க் காரணம் : இவ் வலையில் $e_i = Ei\ sin\ \omega t$ என்ற மாறு மின் அழுத்தம் ஊட்டமாக இருக்கட்டும். வலையில்,

$$\text{மின் ஓட்டம் } i = \frac{e_i}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\text{ஈட்டம் } e_0 = Ri = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} e_i$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} e_i$$

$$\text{அதாவது } e_0 = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} E_i \ \underline{|\ 90° - tan^{-1} \omega RC}$$

ஈட்ட அழுத்தத்தின் பருவப் பெயர்ச்சி (e_i ஆதாரம் ஆக) $\phi = 90° - Tan^{-1}\omega RC$.

அலைவெண் $\omega = 0$ எனில் $\phi = 90°$

$\omega = \frac{1}{RC}$ எனில் $\phi = 45°$

$\omega \rightarrow \infty$ எனில் $\phi \rightarrow 0°$

ஆகவே, எந்த அலைவெண்ணுக்கும் (frequency), ஊட்டம் ஆதாரமாக, ஈட்டத்தின் பருவப் பெயர்ச்சி நேர் முகமாகவே (positive) இருக்கிறது. அல்லது, e_o வின் பருவம், e_i இன் பருவத்தை முந்துவதாகவே உள்ளது. எனவே, இது பருவ முந்து வலை ஆயிற்று.

செலுத்துச் சார்பு : (1) கொடுத்துள்ள பருவ முந்து வலையில் (படம் 4.3) மின் ஓட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு பாதையே உள்ளது. இந்த மின் ஓட்டத்தை i என்று குறிப்போம்.

(2) வலையின் செயற் சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$e_i = \frac{1}{C} \int i \, dt + Ri$$

$$e_o = Ri$$

(3) முதல் நிலை சுழி (zero initial state) எனக் கொண்டு, இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$E_i = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} I + RI$$

$$E_o = RI$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

குறிப்பு: இங்கு Ei, Eo, I என்ற பெரிய எழுத்துக்கள் e_i, e_o, i, என்ற மாறிகளில் இலாப்லாசு மாற்றங்களைக் குறிக்கின்றன.

(4) செலுத்துச் சார்பு காண, ஈட்ட ஊட்ட விகிதத்தை எழுதுகிறோம்.

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{RI}{\left(\frac{1}{Cs} + R\right) I} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

இதுவே செலுத்துச் சார்பு ஆகும்.

குறிப்பு : இதில் RC என்பது கால மாறிலி **(time constant)** T என அழைக்கப்படுகிறது.

$$T = RC$$

எனவே,

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{Ts}{1+Ts}$$

மாறிய மறிப்பு முறை (Transformed Inpedance Method) :

மேற்கண்ட வழியில் அல்லாது 'இலாப்லாசு மாற்றம் அடைந்த மறிப்பு' க்களைக் கொண்டு சுருக்கமாக வெளியுள் சார்பு காணலாம். இலாப்லாசு மாறிய மறிப்புக்களையும், ஓர் எடுத்துக் காட்டையும் கீழே தருவோம்.

அட்டவணை **4.1** மாறிய மறிப்புக்கள் **(Transformed Impedances)**

மின் கூறு electrical element	உருவியல் உறவு Physical relation	மாறிய உறவு transformed relation	மாறிய மறிப்பு transformed impedance
மின் தடை Resistance	$e = Ri$	$E = R\,I$	R
தூண்டம் Inductance	$e = L\,\frac{di}{dt}$	$E = Ls\,I$	Ls
தேக்கம் Capacitance	$e = \frac{1}{C}\int idt$	$E = \frac{1}{Cs}\,I$	$\frac{1}{Cs}$

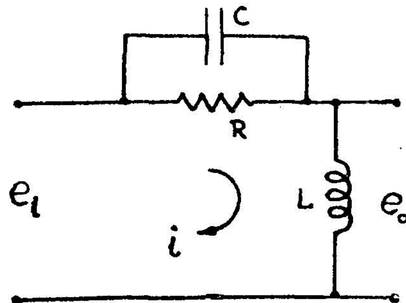
சிக்கலான மின் வலைகளில், பல்வேறு பாதை மின் ஓட்டங்களைக் குறித்து, வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை எழுதி, இலாப்லாசு மாற்றம் புரிந்து செலுத்துச் சார்பு காணல் கடினம்.

இதைத் தவிர்க்க, 'இலாப்லாசு மாறிய வலையை' (transformed network) வரைந்து, மின் ஓட்டங்களைக் குறித்து, இயற் கணிதச் சமன்பாடுகளை எழுதிச் செலுத்துச் சார்பு காணலாம்.

எடுத்துக் காட்டு :

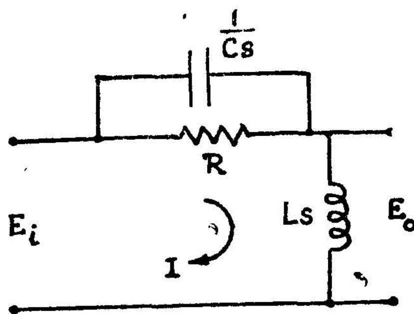
மாதிரி 4.2

படம் 4.4 இல் காணும் மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பை மாறிய மறிப்பு முறையில் காண்போம்.



படம் 4.4 மின் வலை

இதன் மாறிய வலை உருவை படம் 4·5 இல் காண்க. இதில் இருந்து செயற் சமன்பாடுகளை எளிதில் எழுதலாம்.



படம் 4.5 மாறிய மின் வலை

$$Ei = \frac{\frac{1}{Cs} \cdot R}{\frac{1}{Cs} + R} I + Ls\, I$$

$$E_o = L_s I$$

அதாவது,

$$Ei = \left(\frac{R}{1+RCs} + Ls \right) I$$

$$E_o = (Ls)\, I$$

எனவே,

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{Ls\ I}{\left(\frac{R}{1+RCs}+Ls\right) I}$$

$$= \frac{Ls\,(1+RCs)}{R+Ls\,(1+RCs)}$$

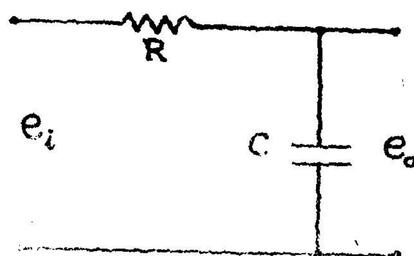
செலுத்துச் சார்பு

$$\boxed{\frac{Eo}{Ei} = \frac{L}{R} \cdot \frac{s\,(1+RCs)}{\left(1+\frac{L}{R}s+LCs^2\right)}}$$

மாதிரி 4.3

பருவந்தாழ் வலை (Phase Lag network)

ஒரு மின் வலையின் ஈட்ட மின் அழுத்தம், எந்த அலைவெண்ணி லும், ஊட்ட மின் அழுத்தத்திலும் பருவம் தாழ்ந்து வந்தால், அவ் வலை 'பருவந்தாழ் வலை' (phase lag network) எனப்படும்.



படம் 4.6 பருவம் தாழ் வலை

படம் 4.6 இல் உள்ள பருவந்தாழ் வலையின் செலுத்துச் சார் பைக் காண்போம்.

பெயர்க் காரணம் : e_i என்பது மாறுமின் அழுத்தம் ஆனல், மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின்படி,

$$e_i = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) i$$

$$e_o = \frac{1}{j\omega C}\ i$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. எனவே,

$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}\, i}{R + \frac{1}{j\omega C}\, i}$$

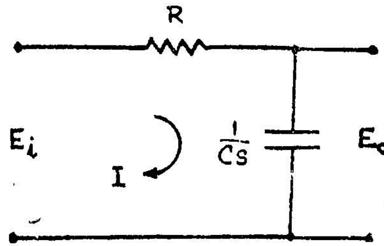
$$= \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\tan^{-1} \omega RC$$

இதில் இருந்து விளங்குவது என்ன ?

எந்த அலைவெண்ணுக்கும் (ω), ஈட்ட மின் அழுத்தத்தின் பருவப் பெயர்ச்சி எதிர்க் குறியீடு (**negative sign**) பெற்றுள்ளது. அதாவது, ஈட்ட மின் அழுத்தம், ஊட்ட மின் அழுத்தத்தினும் பருவம் தாழ்ந்து வருகிறது.

செலுத்துச் சார்பு : மாறிய வலையைப் படம் 4.7 இல் காண்க.



படம் 4.7 மாறிய வலை (4.6)

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$Ei = \left(R + \frac{1}{Cs} \right) I$$

$$Eo = \frac{1}{Cs}\, I$$

எனவே, $$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{1}{Cs}\, I}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right) I} = \frac{1}{1+RCs}$$

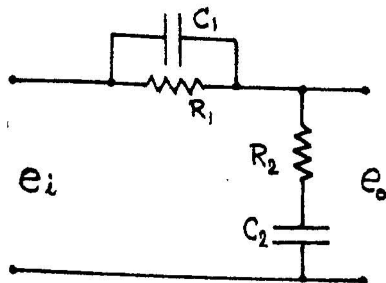
$\therefore$ செலுத்துச் சார்பு $\boxed{\dfrac{Eo}{Ei} = \dfrac{1}{1+Ts}}$ $: T = RC.$

மாதிரி **4.4**

பருவ முந்து-தாழ் வலை (phase lead–lag network)

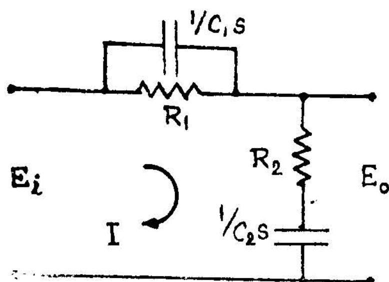
ஒரு மின் வலைக்கு மாறுமின் அழுத்தத்தை ஊட்டும்பொழுது, ஈட்ட மின் அழுத்தம் குறைந்த அலைவெண்களுக்குப் பருவம் தாழ்ந்தும் மிகுந்த அலைவெண்களுக்குப் பருவம் முந்தியும் வருமானல், அது பருவ முந்து-தாழ் வலை எனப்படும்.

படம் 4·8 இல் உள்ளது ஒரு பருவ முந்து-தாழ் வலை. இதன் செலுத்துச் சார்பை இப்பொழுது வருவிப்போம்.



படம் 4.8 பருவம் முந்து தாழ் வலை

மாறிய வலை படம் 4·9 இல் காட்டப் பட்டுள்ளது.



படம் 4.9 மாறிய வலை (4.8)

இதன் செயற் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$Ei = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} I + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I$$

$$Eo = \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I$$

அதாவது

$$Ei = \left[\frac{R_1}{1+R_1 C_1 s} + \frac{1+R_2 C_2 s}{C_2 s}\right] I$$

$$= \frac{R_1 C_2 s + (1+R_1 C_1 s)\ (1+R_2 C_2 s)}{C_2 s(1+R_1 C_1 s)} I$$

$$Eo = \frac{1+R_2 C_2 s}{C_2 s} I$$

எனவே,

$$\frac{Eo}{E_i} = \frac{1+R_2 C_2 s}{C_2 s} \times \frac{C_2 s(1+R_1 C_1 s)}{R_1 C_2 s + (1+R_1 C_1 s)\ (1+R_2 C_2 s)}$$

$$= \frac{(1+R_1 C_1 s)(1+R_2 C_2 s)}{(1+R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

$T_1 = R_1 C_1$

$T_2 = R_2 C_2$

$T_{12} = R_1 C_2$ என்க.

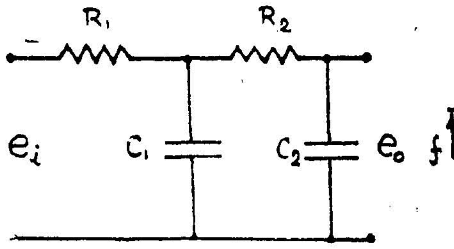
எனவே,

$$\frac{Eo}{E_i} = \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{1+(T_1+T_2+T_{12})s+T_1 T_2 s^2}$$

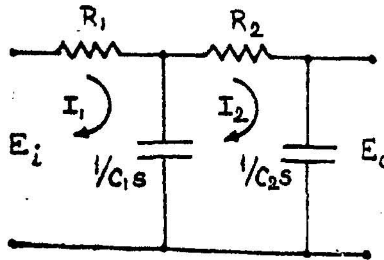
மாதிரி 4.5

ஏணி வலை (Ladder network)

படம் 4.10 இல் காணும் ஏணி வலையின் செலுத்துச்சார்பைக் காண்போம்.



படம் 4.10 ஏணி வலை



படம் 4.11 மாறிய வலை (4.10)

படம் 4.11 மாறிய வலையைக் (**tranformed network**) குறிக் கிறது.

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$Ei = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) I_1 - \frac{1}{C_2 s} I_2 \qquad (1)$$

$$O = \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2 - \frac{1}{C_1 s} I_1 \qquad (2)$$

$$Eo = \frac{1}{C_2 s} I_2 \qquad (3)$$

சமன்பாடு (2) இல் இருந்து,

$$I_1 = C_1 s \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2$$

இதைச் சமன்பாடு (1) இல் பதிக்க,

$$E_i = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) C_1 s \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2 - \frac{1}{C_1 s} I_2$$

$$= \left[(R_1C_1s+1)\left(\frac{C_2s+R_2C_1C_2s^2+C_1s}{C_1C_2s^2}\right) - \frac{1}{C_1s}\right]I_2$$

$$= \left[\frac{(R_1C_1s+1)(C_1s+C_2s+R_2C_1C_2s^2)-C_2s}{C_1C_2s^2}\right] I_2$$

$$= \left[\frac{1+R_1C_1s+R_2C_2s+R_1C_2s+R_1R_2C_1C_2s^2}{C_2s}\right] I_2$$

எனவே,

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{\frac{1}{C_2s}\, I_2}{\frac{1}{C_2 s}\left[1+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+R_1R_2C_1C_2s^2\right] I_2}$$

$$= \frac{1}{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+R_1R_2C_1C_2s^2}$$

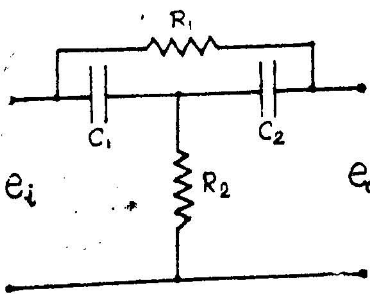
$T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$, $T_{12} = R_1C_2$ என்க.

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{1}{1+(T_1+T_2+T_{12})s+T_1T_2s^2}$$

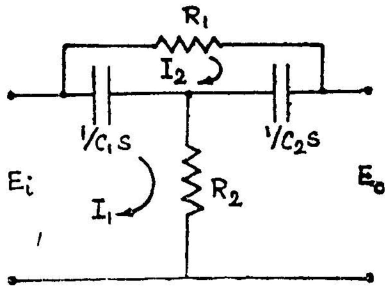
மாதிரி 4·8

பால T — வலை (Bridged T — network)

படம் 4·12 இல் காட்டி உள்ள பால T வலையின் செலுத்துச் சார்பைக் காண்போம்.



படம் 4.12 பால T-வலை



படம் 4.13 மாறிய வலை (4.12)

படம் 4.13-இல் உள்ள மாறிய வலையில் இருந்து, பின்வரும் செயற் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்,

$$Ei = \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2\right) I_1 - \frac{1}{C_1 s} I_2 \quad \ldots (1)$$

$$O = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}\right) I_1 - \frac{1}{C_1 s} I_1 \quad \ldots (2)$$

$$Eo = \frac{1}{C_2 s} I_2 + R_2 I_1 \quad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (2)இல் இருந்து,

$$I_1 = C_1 s \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2$$

எனவே,

$$Eo = \frac{1}{C_2 s} I_2 + R_2 C_1 s \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2$$

$$= \frac{C_1 s + R_2 C_1 s\,(R_1 C_1 C_2 s^2 + C_2 s + C_1 s)}{C_1 C_2 s^2} I_2$$

$$= \frac{1 + R_2 C_2 s + R_2 C_1 s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{C_2 s}$$

$$Ei = \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2\right) C_1 s \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}\right) I_2 - \frac{1}{C_1 s} I_3$$

$$= \frac{(1 + R_2 C_1 s)\,(R_1 C_1 C_2 s^2 + C_2 s + C_1 s) - C_2 s}{C_1 C_2 s^2} I_2$$

$$= \frac{1 + (R_1 C_2 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 I_2}{C_2 s}$$

$$\therefore \frac{Eo}{Ei} = \frac{1 + (R_2 C_2 + R_2 C_1)\, s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{1 + (R_1 C_2 + R_2 C_2 + R_2 C_1)\, s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

4.1.4 எளிய இயந்திரக் குவைகளின் செலுத்துச் சார்புகள் :

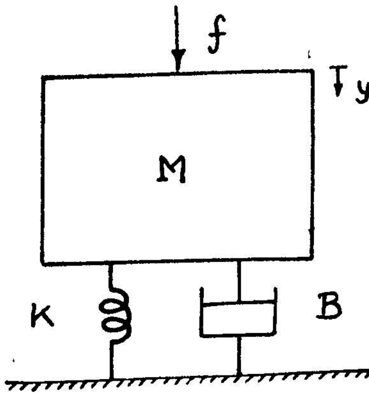
இனி, சில எளிய இயந்திரக் குவைகளின் செலுத்துச் சார்புகளைக் காண்போம்.

இயந்திரக் குவைகளின் செலுத்துச் சார்புகள் காண்பதில் நான்கு படிகள் உண்டு :

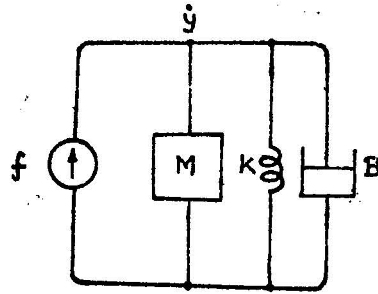
1. இயந்திர வலைப் படம் வரைதல்
2. செயற் சமன்பாடுகளை எழுதல்
3. முதல் நிலை சுழியாக, இலாப்லாசு மாற்றம் காணல்
4. ஈட்ட, ஊட்ட விகிதத்தை எழுதல்.

மாதிரி 4·7

பொருண்மை —உராய்தடை—சுருள்வில்குவை (**mass-damper spring system**)



படம் 4.14 M K B குவை



படம் 4.15 இயந்திர வலைப்படம் (4.14)

முதற்படி : கொடுத்துள்ள இயந்திரக் குவையின் (படம் 4.14) இயந்திர வலைப் படம் (படம் 4·15) வரையப்படுகிறது.

இரண்டாம் படி : இதன் செயற் சமன்பாடு,

$$f(t) = M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky$$

மூன்றும் படி : முதல் நிலை சுழி எனக் கொண்டு, இலாப்லாசு மாறுதல் செய்யவும்.

$$F(s) = Ms^2Y(s) + Bs\,Y(s) + KY(s)$$
$$= (Ms^2 + Bs + K)\,Y(s)$$

நான்காம் படி : ஈட்ட ஊட்ட விகிதம் :

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2+Bs+K}$$

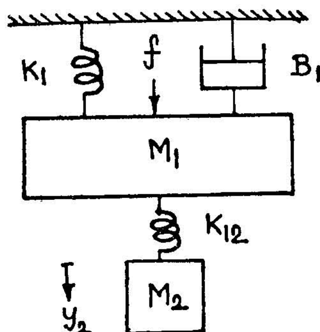
இதுவே தேவையான செலுத்துச் சார்பு ஆகும்.

மாதிரி 4·8

இயந்திர அதிர்ச்சித் தாங்கி (Mechanical shock absorber)

இயந்திர அதிர்ச்சிகளின் விளைவைக் குறைக்கப் பலவகைக் கருவிகள் பயன்படுகின்றன. அவற்றுள் ஒன்றைப் படம் 4.16 விளக்குகிறது.

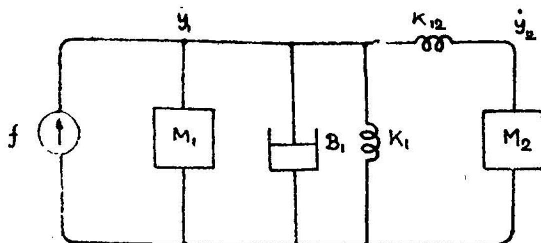
M_1 என்ற பொருளின் அதிர்வைக் குறைக்க இக் குலை பயன்படுகிறது. M_2, K_{12} இவற்றின் அளவுகளைத் தக்கவாறு கணித்து, $f(t)$ அலையூட்டமாக இருப்பினும், M_2 வில் அதிர்வுகள் இல்லாதவாறு செய்யலாம்.



படம் 4.16
இயந்திர அதிர்ச்சித் தாங்கி

இக் குலையின் செலுத்துச் சார்பை இங்கு வருவிப்போம்.

முதற் படி : இயந்திர வலைப்படம் :



படம் 4.17. இயந்திர வலைப் படம் (4.16)

இரண்டாம் படி : செயற் சமன்பாடுகள்.

$$M_1\ddot{y}_1 + B_1\dot{y}_1 + K_1 y_1 + K_{12}(y_1 - y_2) = f(t) \quad \cdots (1)$$

$$M_2\ddot{y}_2 + K_{12}(y_2 - y_1) = 0 \quad \cdots (2)$$

மூன்றும் படி : முதல் நிலை சுழியாக, இலாப்லாசு மாற்றம் அடைந்த சமன்பாடுகள் :

$$(M_1s^2 + B_1s+K_1+K_2)\ Y_1(s) - K_{12}\ Y_2(s) = F(s)$$
$$-K_{12}\ Y_1(s) + (M_2s^2+K_{12})\ Y_2(s) = 0$$

நான்காம் படி : செலுத்துச் சார்பு :

$$(M_1s^2 + B_1s + K_1 + K_{12})\ Y_1(s) - K_{12}\cdot\frac{K_{12}}{M_2s^2+K_{12}}\ Y_1(s) = F(s)$$

அதாவது,

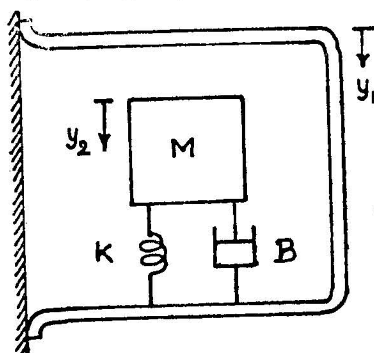
$$[(M_2s^2+K_{12})\ (M_1s^2+B_1s+K_1+K_{12}) - K_{12}^2]\ y_1(s) = (M_2s^2+K_{12})\ F(s)$$

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2s^2+K_{12}}{(M_2s^2+K_{12})\ (M_1s^2+B_1s+K_1) + K_{12}M_2s^2}$$

மாதிரி 4.9

இயந்திர முடுக்கமானி (Mechanical accelerometer) :

அதிவேக வான ஊர்திகளிலும் (high speed aircrafts), ஏவு கணைகளிலும் (guided missiles) முடுக்கத்தைக் கணிக்க இயந்திர முடுக்கமானி பயன்படுகிறது. (படம் 4.18) M, B, K இவற்றின் அளவுகளைப் பொறுத்து இக் கருவி அதிர்வுக் கணிப்பி (seismic instrument) ஆகவோ, முடுக்கமானி (accelerometer) ஆகவோ பயன் படுகிறது.

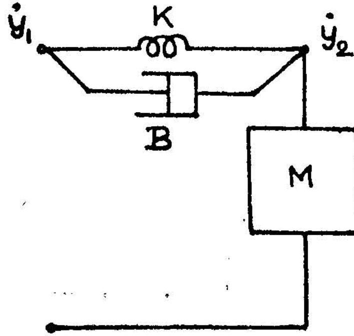


படம் 4.18 இயந்திர முடுக்கமானி

y_1, y_2 என்ற இருபெயர்ச்சிகளும் (displacements), அசைவிலா வெளியை (inertial space) ஆதாரமாகக் கொண்டு கணிக்கப் படுபவை.

$y = y_1 - y_2$ என்பது சார்புப் பெயர்ச்சி (relative displacement) ஆக இருக்கட்டும்.

முதற் படி : இயந்திர வலைப் படம் :



படம் 4.19. இயந்திர வலைப் படம் (4.18)

இரண்டாம் படி : செயற் சமன்பாடு :

$M\ddot{y}_2 + B(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + K(y_2 - y_1) = 0$

மூன்றும் படி : முதல் நிலை சுழி ஆக இலாப்லாசு மாற்றம் அடைந்த சமன்பாடு :

$(Ms^2 + Bs + K)\ Y_2(s) - (Bs + K)\ Y_1(s) = 0$

அதாவது,

$$(Ms^2 + Bs + K)\ [Y(s) + Y_1(s)] - (Bs + K)\ Y_1(s) = 0$$
$$(Ms^2 + Bs + K)\ Y(s) + Ms^2\ Y_1(s) = 0$$

நான்காம் படி : செலுத்துச் சார்பு:

$$\frac{Y(s)}{s^2 Y_1(s)} = -\frac{M}{Ms^2 + Bs + K}$$

குறிப்பு : இங்கு,

சார்புப் பெயர்ச்சி $Y(s)$ ஈட்டமாகவும்

முடுக்கம் $S^2 Y_1(s)$ ஊட்டமாகவும் கொள்ளப் பட்டன.

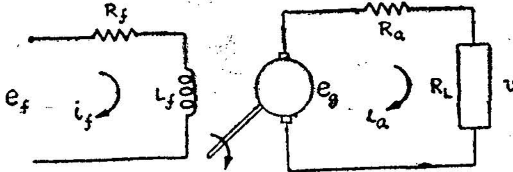
4.1.5 ஆள் குலைகளின் செலுத்துச் சார்புகள் (Transfer functions of control systems)

முதற்கண், சில ஆள்குலை உறுப்புக்களின் செலுத்துச் சார்புகளைக் காண்போம். இங்கு சிறப்பாகப் பெருக்கிகளும்,

இயக்கிகளும், விளக்கப்படும். திறன் பெருக்கிகள், மின் இயல், இயந்திர இயல், பாய்ம இயல் போன்றவற்றுள் எத்துறையினதாக வும் இருக்கலாம். சில எடுத்துக் காட்டுக்களைக்கீழே காணலாம்.

மாதிரி 4·10

நேர் மின் ஆக்கி (DC Generator)



படம் 4.20. நேர்மின் ஆக்கி

செயல் : மின் அகம் (armature) மாறு வேகத்தில் ஒரு முதல் இயக்கியால் சுழற்றப் படுகிறது. அப்பொழுது காந்தச் சுருளுக்குச் செலுத்தப் படும் மின் அழுத்தத்திற்கு ஏற்ப, மின்னகத்தில் ஒரு மின் அழுத்தம் தூண்டப் படுகிறது. இதுவே தொடுவைகளின் (brushes) வழி மின் சுமைக்குச் செல்கிறது.

தற்புனைவுகள் (assumptions) :

1. மின்னகத் தண்டு (armature shaft) மாறு வேகத்தில் சுழல்கிறது.
2. காந்தத் தாரை (magnetic flux) காந்தச் சுருளின் மின்னோட்டத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையது.
3. மின்னக எதிர் வினையின் (armature reaction) விளைவு மிகச் சிறிது.

செயற் சமன்பாடுகள்:

$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

$$e_g = K_g i_f$$

மாறி சமன்பாடுகள் (சுழி முதல் நிலை) :

$$E_f = (R_f + L_f s)\, I_f$$

$$E_g = K_g\, I_f$$

செலுத்துச் சார்பு :

$$\frac{E_g}{E_f} = \frac{K^g}{R_f + L_f s}$$

$$= \frac{K_g / K_f}{1 + \frac{L_f}{R_f} s}$$

$$\boxed{\frac{E_g}{E_f} = \frac{K}{1 + Ts}}$$

இங்கு, $K = \frac{K_g}{R_f}$; $T = \frac{L_f}{R_f}$.

குறிப்பு : மின் சுமை ஒன்று இணைக்கப் படும் பொழுது ஈட்ட மின் அழுத்தம், e_g இல் இருந்து v எனக் குறைந்து விடுகிறது.

அப்பொழுது,

$$e_g = v + R_a\, i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$$

$$v = R_L\, i_a$$

எனவே, இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்

$$E_g = V + R_a I_a + L_a s\, I_a$$

$$V = R_L\, I_a$$

$$\therefore\ E_g = R_L I_a + R_a I_a + L_a s\, I_a$$

$$= (R_a + R_L + L_a s)\, I_a$$

$$= (R_a + R_L + L_a s)\, \frac{V}{R_L}$$

$$\frac{V}{Eg} = \frac{R_L}{R_L + R_a + L_a s}$$

$$= \frac{R_L}{R_L + R_a} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{L_a}{R_L + R_a} s\right)}$$

$$\alpha = \frac{R_i}{R_L + R_a} \cdot T_a = \frac{L_a}{R_L + R_a} \text{ என்க.}$$

$$\frac{V}{E_g} = \frac{\alpha}{1 + T_a s}$$

எனவே,

$$\frac{V}{E_f} = \frac{V}{E_g} \cdot \frac{E_g}{E_f}$$

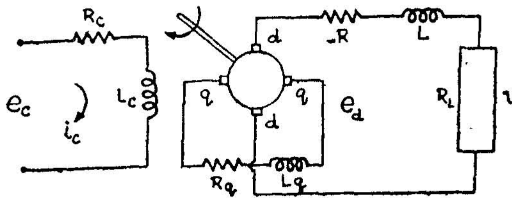
$$= \frac{K\alpha}{(1 + Ts\,(1 + T_a s)}$$

$L_a = 0$ எனில்,

$$\boxed{\frac{V}{E_f} = \frac{K\alpha}{(1 + Ts)}}$$

மாதிரி 4.11

ஆம்பிளிடைன் (Amplidyne)



படம் 4.21. ஆம்பிளிடைன்

செயல்: ஆம்பிளிடைன் ஓர் இரண்டு-அடுக்கு நேர்மின் ஆக்கி.

கட்டுச் சுருள் மின்னோட்டம் i_c நிலையச்சு (quadrature) மின் அழுத்தம் e_q வைத் தோற்றுவிக்கிறது. நிலைச் சுருள் (quadrature winding) மின்னோட்டம், கிடை அச்சு (direct axis) மின் அழுத்தம் e_dஐ உண்டாக்குகிறது. இது தொடுவைகளின் வழி மின் சுமைக்குச் (load) செல்கிறது.

தற்புனைவுகள் :

(1) மின்னகம் மாறா வேகத்தில் முதல் இயக்கி ஒன்றால் சுழற்றப்படுகிறது.

(2) காந்தத் தாரை, கட்டுச் சுருளின் (control winding) மின்னோட்டத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையது.

(3) பொறியில் தொடக்கத்தில் தேக்கிய ஆற்றல் இல்லை.

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$e_c = R_c i_c + L_c \frac{di_c}{dt}$$

$$e_q = K_1 i_c$$

$$e_q = R_q i_q + L_q \frac{di_q}{dt}$$

$$e_d = K_2 i_q$$

இலாப்லாசு மாறிய சமன்பாடுகள் : (சுழி முதல் நிலை)

$$E_c = (R_c + L_c s)\, I_c$$

$$E_q = K_1 I_c$$

$$E_q = (R_q + L_q s)\, I_q$$

$$E_d = K_2 I_q$$

செலுத்துச் சார்பு :

$$E_c = (R_c + L_c s)\,.\,\frac{E_q}{K_1}$$

$$= (R_c + L_c s)\frac{1}{K_1}\,.\,(R_q + L_q s)\, I_q$$

$$= (R_c + L_c s)\frac{1}{K_1}(R_q + L_q s)\frac{E_d}{K_2}$$

$$\therefore \frac{E_d}{E_c} = \frac{K_1 K_2}{(R_c + L_c s)\,(R_q + L_q s)}$$

$$K = \frac{K_1\, K_2}{R_c\, R_q},\; T_1 = \frac{L_c}{R_c},\; T_2 = \frac{L_q}{R_q},$$ என்க,

$$\frac{E_d}{E_c} = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

குறிப்பு : மின்சுமை இணைப்பு :

$$e_d = v + Ri_d + L\frac{di_d}{dt}$$

$$v = R_L\, i_d$$

இலாப்லாசு மாற்றம் புரிய,

$$E_d = V + R\, I_d + L_s\, I_d$$

$$V = R_c\, I_d$$

எனவே, $E_d = V + (R + Ls)\dfrac{V}{R_L}$

$$= \frac{R_L + R + Ls}{R_L} \cdot V$$

$$\frac{V}{Ed} = \frac{R_L}{R_L + R + Ls}$$

$$= \frac{R_L}{R_L + R} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{R_L + R}s\right)}$$

$\alpha = \dfrac{R_L}{R_L + R}$, $T_n = \dfrac{L}{R_L + R}$, என்க.

$$\therefore \frac{V}{Ed} = \frac{\alpha}{(1 + T_a s)}$$

$$\frac{V}{E_c} = \frac{V}{E_d} \cdot \frac{E_d}{E_c}$$

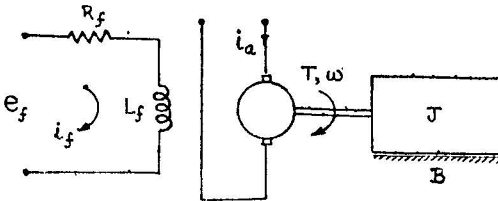
$$= \frac{K\alpha}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_a s)}$$

$L = 0$ எனில்,

$$\frac{V}{E_c} = \frac{K\alpha}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

மாதிரி 4.12

காந்தச் சுருள் கட்டுப்பாட்டு நேர்மின் அடிமை இயக்கி (Field controlled DC servomotor)



படம் 4.22. காந்தச் சுருள் கட்டுப் பாட்டு அடிமை இயக்கி

செயல் : மின்னகம் மாறா மின்னோட்ட வழங்கி ஒன்றுடன் மின் இணைப்புண்டு உள்ளது. காந்தச் சுருள் மின்னோட்டத்திற்கு ஏற்ப, ஒரு சுழற் திறன் தோற்றுவிக்கப் படுகிறது. இது சுமைத் தண்டைச் (load shaft) சுழற்றுகிறது.

தற்புனைவுகள் :

(1) மின்னக மின்னோட்டம் மாறாதது.

(2) காந்தத் தாரை காந்தச் சுருள் மின்னோட்டத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையது.

(3) மின்னக எதிர்வினையின் விளைவு மிகக் குறைவு.

(4) தொடக்கத்தில் தேக்கிய ஆற்றல் இல்லை.

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

$$T = K_t i_f$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

இலாப்லாசு மாறிய சமன்பாடுகள் (சுழி முதல் நிலை)

$$E_f = (R_f + L_f s) I_f$$
$$T = K_t I_f$$
$$T = (Js + B)\,\Omega$$

செலுத்துச் சார்பு :

$$E_f = (R_f + L_f s).\frac{T}{K_t}$$
$$= (R_f+L_f s)\,.\,\frac{1}{K_t}\,.\,(Js+B)\Omega$$

எனவே,

$$\frac{\Omega}{E_f} = \frac{K_t}{(R_f + L_f s)\,(Js + B)}$$

$B = 0$ எனில்,

$$\frac{\Omega}{E_f} = \frac{K_t}{Js\,(R_f + L_f s)}$$

$$K = \frac{K_t}{JR_f}\,,\ T = \frac{L_f}{R_f}$$. என்க.

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\Omega}{E_f} = \frac{K}{s\,(1+Ts)}}$$

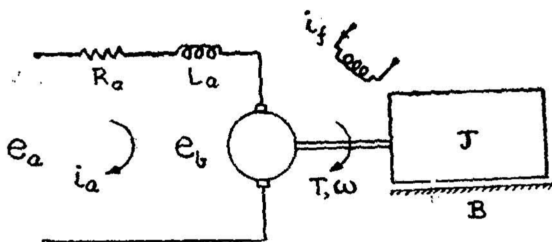
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \quad \Omega = s\,\Theta$$

$$\boxed{\frac{\Theta}{E_f} = \frac{K}{s^2\,(1+Ts)}}$$

மாதிரி 4.13

மின்னகக் கட்டுப்பாட்டு நேர்மின் அடிமை இயக்கி (Armature—controlled DC servomoter)

செயல் : ஒரு நேர்மின் இயக்கியின் காந்தச் சுருள் மாறு மின்னோட்ட வழங்கி ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மின்னக மின்னோட்டத்திற்கு ஏற்ப ஒரு சுழற்திறன் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. இதனால் சுமைத் தண்டு சுழல்கிறது.



படம் 4.23. மின்னகக் கட்டு அடிமை இயக்கி

தற்புனைவுகள் :

1. காந்தச் சுருள் மின்னோட்டம் மாறுதது.
2. காந்தத் தாரை, காந்தச் சுருள் மின்னோட்டத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையது.
3. மின்னக எதிர்வினை விளைவு மிகச் சிறிது.
4. மின்னகப் பின் அழுத்தம் (back emf), சுழல் வேகத்திற்கு நேர்ப் பொருத்தம் உடையது.
5. தொடக்கத்தில் தேக்கிய ஆற்றல் இல்லை.

செயற் சமன்பாடுகள் :

$$e_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b$$

$$e_b = K_b \omega$$

$$T = K_t i_a$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

இலாப்லாசு மாறிய சமன்பாடுகள் : (சுழி முதல் நிலை)

$$E_a = (R_a + L_a s) I_a + E_b$$

$$E_b = K_b \Omega$$

$$T = K_t I_a$$

$$T = (Ts + B) \Omega$$

செலுத்துச் சார்பு :

$$E_a = (R_a + L_a s) \frac{T}{K_t} + K_b \Omega$$

$$= (R_a + L_a s)\frac{1}{K_t}(Js + B)\,\Omega + K_b\,\Omega$$

$$= \frac{1}{K_t}\left[(R_a + L_a s)(Js + B) + K_b K_t\right]\Omega$$

எனவே,

$$\frac{\Omega}{E_a} = \frac{K_t}{(R_a + L_c s)(Js + B) + K_b K_t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\,; \quad \therefore\ \Omega = s\,\Theta$$

$$\frac{\Theta}{E_a} = \frac{K_t}{s\left[(R_a + L_a s)(Js + B) + K_b K_t\right]}$$

$L_a = 0$, எனில்

$$\frac{\Omega}{E_a} = \frac{K_t}{R_a J_s + R_a B + K_b K_t}$$

$$= \frac{K_t}{R_a B + K_b K_t}\;\frac{1}{\left(1 + \frac{R_a J}{R_a B + K_b K_t}\,s\right)}$$

$$K = \frac{K_t}{R_a B + K_b K_t}, \quad T = \frac{R_a J}{R_a B + K_b K_t}$$ என்க.

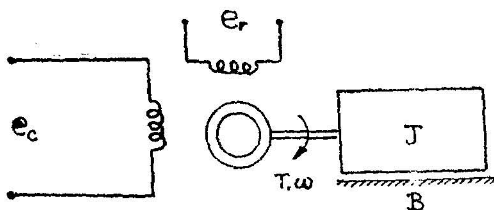
எனவே,

$$\boxed{\frac{\Omega}{E_a} = \frac{K}{(1+T_s)}} \qquad \boxed{\frac{\Theta}{E_a} = \frac{K}{S(1+T_s)}}$$

மாதிரி 4.14

மாறு மின் அடிமை இயக்கி (AC Servomotor)

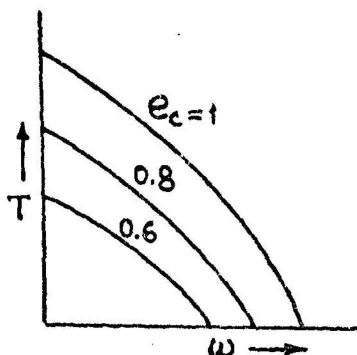
செயல்: ஆதாரச் சுருளுக்கு (reference winding) மாறு வீச்சு, மாறு அலைவெண் மின் அழுத்தம் ஒன்று கொடுக்கப்படுகிறது. கட்டுச் சுருளின் (control winding) மின் அழுத்த அளவிற்கு ஏற்ப, ஒரு சுழற் திறன் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. இதனால் தண்டுடன் சுமையும் சுழல்கிறது.



படம் 4.24. இரு பருவ மாறுமின் அடிமை இயக்கி

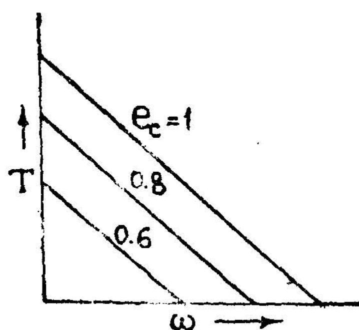
இந்த இரு பருவ மாறுமின் அடிமை இயக்கியின் (two phase AC servomotor) பகுப்பாய்வு கடினம். எனவே சோதனை முடிவுகளின் துணை கொண்டு செலுத்துச் சார்பு காண்கிறோம்.

படம் 4.25 இல் மாறுமின் அடிமை இயக்கியின் திருப்புவிசை சுழல் வேக (T–ω) சிறப்புறவுக் கோடுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் திருத்தப்பட்ட வடிவத்தைப் படம் 4.26 இல் காணலாம்.



படம் 4-25 மாறுமின் அடிமை இயக்கியின் T-ω சிறப்பு உறவுக் கோடுகள்

T : திருப்பு விசை
ω : சுழல் வேகம்
e_c : ஆள் சுருள் மின் அழுத்தம்



படம் 4-26 திருத்தப்பட்ட சிறப்பு உறவுக் கோடுகள்

T : திருப்பு விசை
ω : சுழல் வேகம்
e_c : ஆள் சுருள் மின் அழுத்தம்

இதற்கு இரு தற்புனைவுகள் உதவுகின்றன.

1. T-ω சிறப்பு உறவுக் கோடுகள் குறைவான வேகங்களுக்கு நேராக இருக்கின்றன. ஆள்குவைகளில் பொதுவாகச் சுழல் வேகம் குறைவு. T-ω சிறப்பு உறவுக் கோடுகள் நேர் இணை கோடுகளாக (parallel straight lines) அமையும்.

2. T-ω சிறப்பு உறவுக் கோடுகள், ஒத்த அளவு ஊட்ட மின் அழுத்த உயர்வுகளுக்கு, ஒத்த அளவு விலகி இருக்கும்.

செயற் சமன்பாடுகள் :

திருத்திய $T-\omega$ சிறப்பு உறவுக் கோடுகளின் சமன்பாட்டைப் பின் வருமாறு எழுதலாம் :

$$T= -A\omega+K_cE_c$$

மேலும்,

$$T= J\frac{d\omega}{dt}+B\omega$$

இலாப்லாசு மாறிய சமன்பாடுகள் : (சுழி முதல் நிலை)

$$T= -A\Omega+K_cE_c$$

$$T= (Js+B)\Omega$$

செலுத்துச் சார்பு :

$$(Js+B)\Omega = -A\Omega+K_cE_c$$

$$(Js+B+A)\Omega = K_cE_c$$

$$\therefore \frac{\Omega}{E_c} = \frac{K_c}{A+B+Js}$$

$$= \frac{K_s}{A+B}\frac{1}{\left(1+\frac{J}{A+B}s\right)}$$

$$K=\frac{K_c}{A+B} \quad T=\frac{J}{A+B}$$ என்க.

அப்பொழுது, $$\boxed{\frac{\Omega}{E_c} = \frac{K}{(1+Ts)}}$$

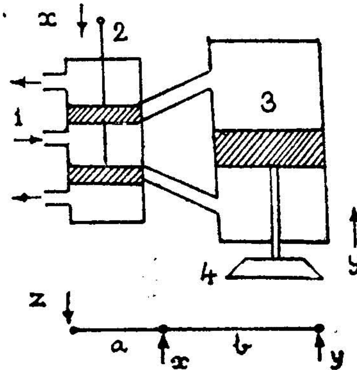
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\ ;\ \therefore\ \Omega = s\Theta$$

எனவே, $$\boxed{\frac{\Theta}{E_c} = \frac{K}{s(1+Ts)}}$$

மாதிரி 4.15 :

நீர்ம இயக்கி (Hydraulic actuator)

நீர்ம இயக்கி ஒன்றின் எளி வடிவத்தைப் படம் 4.27 இல் காண்க.



படம் 4.27. நீர்ம இயக்கி

1. மிகை அழுத்த நீரமம் 2. ஓரதர் 3. திறன் உருளை 4. சுமை

செயல் :

ஓரதர்த் தண்டை இலேசாகக் கீழ்ப் புறம் நகர்த்தினால் (x), மிகை அழுத்த நீர்மம், திறன் உருளையின் கீழ்ப்புறம் சென்று, உந்து வில்லையை (piston) மேற்புறம் நகர்த்துகிறது. இதனால் சுமை மேல் நோக்கி நகர்கிறது. (y).

செயற் சமன்பாடுகள் :

பாயும் நீர்மத்தின் கன அளவு Q, ஓரதரின் பெயர்ச்சி x, அழுத்த வேறுபாடு P இவ் இரண்டையும் பொருத்தது. இவ் உறவு முறையைப் பின் வருமாறு எழுதலாம் :

$$Q = K_1 x - K_2 P$$

மேலும், விசை $F = PA$ (*A*, உந்து வில்லைப் பரப்பு)

$$Q = A\frac{dy}{dt}$$

$$F = M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt}$$

இச் சமன்பாடுகளை இணைக்க,

$$PA = M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{1}{K_2}(K_1x-Q)A = M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{1}{K_2}\left(K_1x - A\frac{dy}{dt}\right)A = M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt}$$

அதாவது

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + \left(B+\frac{A^2}{K_2}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{K_1A}{K_2}x$$

இதற்கு இலாப்லாசு மாற்றம் கண்டால், (முதல் நிலை சுழி ஆக)

$$\left[Ms^2+\left(B+\frac{A^2}{K_2}\right)s\right]Y = \frac{K_1A}{K_2}X$$

செலுத்தற் சார்பு :

எனவே,

$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{K_1A}{K_3}}{s\left(\left(B+\frac{A^2}{K_2}\right)+Ms\right)}$$

$$= \frac{K_1A}{(BK_2+A^2)} \cdot \frac{1}{s\left[1+\frac{MK_2}{BK_2+A^2}s\right]}$$

$$K = \frac{K_1A}{BK_2+A^2}, \quad T = \frac{MK_2}{BK_2+A^2}$$ என்க.

எனவே,

$$\boxed{\frac{Y}{X} = \frac{K}{s(1+Ts)}}$$

குறிப்பு : பின்னூட்டுத் தண்டு இருப்பின்

$$\frac{x_i}{z} = \frac{b}{a+b} \qquad \text{எனவே } x_i = \frac{b}{a+b}\, z$$

$$\frac{x_0}{y} = \frac{a}{a+b} \qquad \text{எனவே } x_0 = \frac{a}{a+b}\, y$$

$$x = x_i - x_0$$

$$= \frac{bx-ay}{a+b}$$

அல்லது, $$X = \frac{bz-ay}{a+b}$$

மேலும் $$\frac{Y}{X} = \frac{K}{s(1+Ts)}$$

$$KX = Ys(1+Ts)$$

$$K\left(\frac{bz-ay}{a+b}\right) = Ys(1+Ts)$$

$$\frac{Kb}{a+b}\, Z = \left(s(1+Ts) + \frac{Ka}{a+b}\right) Y$$

எனவே,

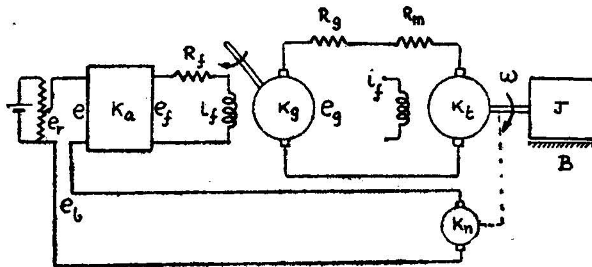
$$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{Kb}{a+b}}{\frac{Ka}{a+b} + 1(s+Ts)}$$

அல்லது, $$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{a+b}{a}\right)s + \left(\frac{a+b}{a}\right)Ts^2}$$

மாதிரி 4.16

ஓர் ஆள்குவையின் முழுச் செலுத்துச் சார்பு. (Overall Transfer function of a control system).

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வேக ஒழுங்கமை குலையின் குறை சுற்று, நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்புகளை வருவிக்க.



4.28. நேர்மின் இயக்கி வேக ஒழுங்கமை குலை

தீர்வு : செயற் சமன்பாடுகள்.

$$e = e_r - e_{fb}$$
$$e_{fb} = K_n \omega$$
$$e_f = K_a e$$
$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$
$$e_g = K_g i_g$$
$$e_g = (R_g + R_m) i_a + e_b$$
$$e_b = K_b \omega$$
$$T = K_t i_a$$
$$T = J\frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

முதல் நிலை சுழியாக, இலாப்லாசு மாற்றம் புரிந்து இணைத்த தால் கிடைப்பன.

$$E = E_r - K_n \Omega$$
$$K_a E = (R_f + L_f s)\, I_f$$
$$R_g I_f = (R_g + R_m) I_a + K_b \Omega$$
$$K_t I_a = (Js + B)\, \Omega$$

எனவே,

$$K_a E = (R_f + L_f s)\, \frac{1}{K_g}\, [(R_g + R_m)\, I_a + K_b \Omega]$$

$$= (R_f + L_f s)\frac{1}{K_g}\left[(R_g + R_m)\frac{1}{K_t}(Js+B)\Omega + K_b\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{K_g K_t}(R_f+L_f s)\,[(R_g+R_m)(Js+B)+K_bK_t]\Omega$$

$$\therefore \frac{\Omega}{E} = \frac{K_aK_gK_t}{(R^f+L^f s)\,[(R_g+R_m)(Js+B)+K_bK_t]}$$

இதுவே குறை சுற்று-செலுத்துச் சார்பு (open loop transfer function)

$$K_aK_gK_t\,[E_r - K_n\Omega] = (R_f+L_f s)\,[(R_g+R_m)(Js+B)+K_bK_t]\Omega$$

$$K_aK_gK_t\,E_r = [R_f+L_f s)(R_g+R_m)(Js+B)$$
$$+(R_f+L_f s)\,K_sK_t + K_aK_gK_tK_n]\Omega$$

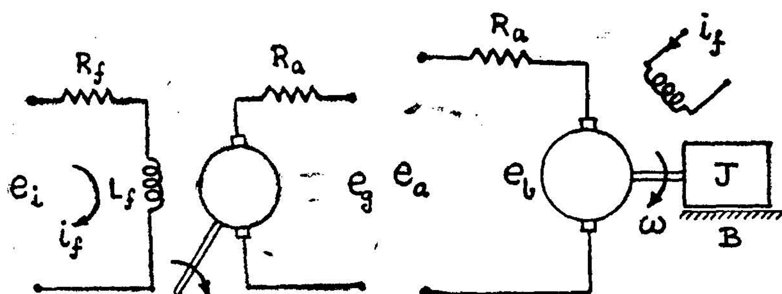
எனவே,

$$\frac{\Omega}{E_r} = \frac{K_aK_gK_t}{[(R_f+L_f s)\{(R_g+R_m)(J_s+B)+K_bK_t\}+K_aK_gK_tK_n]}$$

இது நிறை சுற்று-செலுத்துச் சார்பு (closed-loop transfer function) ஆகும்.

மாதிரி 4·17 :

தொடர் இணைப்பு உறுப்புக்களின் செலுத்துச் சார்பு (Transfer function of components in series)



படம் 4.29. மின் ஆக்கி

படம் 4.30. மின் இயக்கி

படத்திற் காணும் மின் ஆக்கியில், e_1, ஒருமைப்படி ஊட்டமாக (unit step input) இருப்பின், சுமை இல்லா மின்னக மின் அழுத்தம் $e_g = 15\,(1-e^{-20t})$; $t>0$,

இதுபோல் மின் இயக்கியில், e_2, ஒருமைப்படி ஊட்டமாக (unit step input) இருப்பின், இயக்கியின் சுழல்வேகம்

$$\omega = 10(1-e^{-10t})\ ;\ t>0.$$

இவ் இரண்டு உறுப்புக்களும் ஒன்றாய் இணைக்கப்படுகின்றன. இப்பொழுது, e_1, ஒருமைப் படி ஊட்டமாக இருப்பின், இயக்கியின் சுழல வேகத்தை (ω) ஒரு காலச் சார்பாக **(time function)** எழுதவும்.

தீர்வு :

$$e_1 = 1$$
$$e_g = 15\,(1-e^{-20t})$$

இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$E_1 = \frac{1}{s}$$

$$E_g = 15\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+20}\right)$$

$$= \frac{300}{s(s+20)}$$

எனவே,

$$\frac{E_g}{E_1} = \frac{300}{(s+20)} \text{ அல்லது } \frac{15}{(1+0{\cdot}05s)}$$

இதுவே மின் ஆக்கியின் செலுத்துச் சார்பு.

$$e_2 = 1$$
$$\omega = 10(1-e^{-10t})$$

இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்

$$E_2 = 1/s$$

$$\Omega = 10\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right)$$

$$= \frac{100}{s(s+10)}$$

எனவே, $\frac{\Omega}{E_2} = \frac{100}{(s+10)}$ அல்லது $\frac{10}{(1+0{\cdot}1s)}$

கவனிக்க : மின் ஆக்கியின் செலுத்துச் சார்பில் அதன் R_a சேரவில்லை. மின் இயக்கியின் செலுத்துச் சார்பில் அதன் R_a சேர்ந்துள்ளது.

இரு உறுப்புக்களையும் இணைக்கும்பொழுது, திறந்திருந்த மின் ஆக்கியின் மின்னகச் சுற்று (armature circuit) மூடிய சுற்று ஆகிறது. அப்பொழுது இரண்டு மின் தடைகளும் (R_a) தொடர் இணைப்பாக உள்ளன.

எனவே, தனியாக இயக்கியின் செலுத்துச் சார்பில் R_a வந்த இடத்தில், இப்பொழுது $2R_a$ வரவேண்டும். இயக்கியின் பொதுச் செலுத்துச் சார்பு $\frac{\Omega}{E_2} = \frac{K}{(1+Ts)}$; $K = \frac{1}{K_t}$; $T = \frac{JR_a}{K_f K_t}$ $(B=0)$.
$2R_a$ என மாறும்பொழுது, $\frac{\Omega}{E_2} = \frac{K}{(1+2Ts)}$

மின் ஆக்கியுடன் இணைந்தபின், இயக்கியின் செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{\Omega}{E_g} = \frac{10}{(1+2\times 0{\cdot}1s)}$$

என மாறுகிறது.

எனவே முழுச் செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{\Omega}{E_1} = \frac{\Omega}{E_g} \cdot \frac{E_g}{E_1}$$

$$= \frac{10}{(1+0{\cdot}2s)} \times \frac{15}{(1+0{\cdot}05s)}$$

$$= \frac{1500}{(s+5)(s+20)}$$

$e_1 = 1$ எனில் $E_1 = \frac{1}{s}$

எனவே $\Omega = \frac{1500}{s(s+5)(s+20)}$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+20},$$ என்க.

$$A = \frac{1500}{(s+5)(s+20)}\bigg|_{s=0}$$
$$= 15$$

$$B = \frac{1500}{s(s+20)}\bigg|_{s+5=0}$$
$$= -20$$

$$C = \frac{1500}{s(s+5)}\bigg|_{s+20=0}$$
$$= 5$$

$$\therefore \quad \Omega = \frac{15}{s} - \frac{20}{s+5} + \frac{5}{s+20}$$

எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் புரிந்தால்,

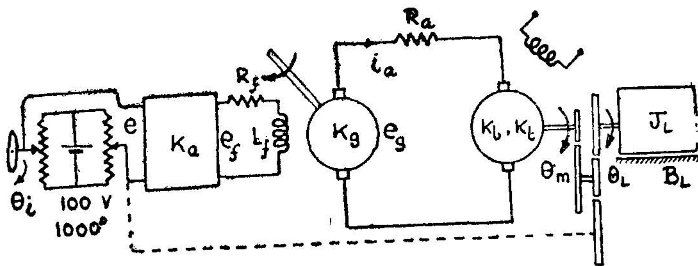
$$\omega = 15 - 20e^{-5t} + 5e^{-20t}$$

இதுவே தேவையான சுழல் வேகத்தின் காலச் சார்பு ஆகும்.

மாதிரி 4.18

திருப்பு அடிமைக் குவையின் செலுத்துச் சார்பு **(Transfer function of a position servo mechanism)**

கீழே படத்திற் காணும் திருப்பு அடிமைக் குவையின் விவரங்கள் வருமாறு :



படம் 4.31. ஒரு திருப்பு அடிமைக் குவை

பெருக்கியின் பெருக்கவெண் $\quad K_a = 100 \frac{\text{வோல்ட்}}{\text{வோல்ட்}}$

மின் ஆக்கியின் காந்தச் சுருள்
தடை $R_f = 50$ ஓம்

மின் ஆக்கியின் காந்தச்சுருள்
தூண்டம் $L_f = 5$ ஹென்ரி

மின் ஆக்கியின் பெருக்கவெண் $K_g = 200 \frac{\text{வோல்ட்}}{\text{ஆம்ப்பியர்}}$

மொத்த மின்னகத் தடை $R_a = 48{\cdot}8$ ஓம்

இயக்கியின் சுழற்திறன்
பெருக்கவெண் $K_t = 1{\cdot}1 \frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ஆம்ப்பியர்}}$

இயக்கியின் நிலைமச் சுழல் திறன் $J_m = 10{\cdot}85 \times 10^{-4}$ கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}

சுமையின் நிலைமச் சுழல் திறன் $J_L = 1{\cdot}356$,, ,,

சுமையின் உராய் தடை
$B_L = 19{\cdot}4 \times 10^{-4} \frac{\text{நியூட்டர்-மீ.-நொடி}}{\text{ரேடியன்}}$

பல்லிணைக் குறை விகிதம்
(இயக்கியில் இருந்து சுமை) $n = \frac{1}{50}$

பல்லிணை விகிதம்
(சுமையில் இருந்து மின் பிரித்தி) = 1:1

குவையின் நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பைக் காண்க.

தீர்வு :

மின் பிரித்தியின் பெருக்கவெண்

$$K_\phi = \frac{100}{1000} = 0{\cdot}1 \frac{\text{வோல்ட்}}{\text{பாகை}}$$

$$= 0{\cdot}1 \times 57{\cdot}3 = 5{\cdot}73 \frac{\text{வோல்ட்}}{\text{ரேடியன்}}$$

பின் அழுத்தப் பெருக்கவெண் (**Back emf constant**) :

ஓர் இயக்கியில்,

தோற்றுவிக்கப்படும் இயந்திரத் திறன் = மாற்றப்படும் மின் திறன்

அதாவது; $T_w = e_b\, i_a$

ஆனால், $T = k_t\, i_a$

$e_b = k_b\, \omega$

எனவே, $k_b\, i_a\, \omega = k_b\, \omega\, i_a$

அல்லது $\boxed{K_t = K_b}$

அதாவது, K_b, K_t இரண்டும் ஒரே எண்மதிப்புக்களை உடையன.

$$K_t = 1{\cdot}1 \ \frac{\text{நியூட்டன்-மீட்டர்}}{\text{ஆம்ப்பியர்}}$$

எனவே, $K_b = 1{\cdot}1 \ \frac{\text{வோல்ட்}}{\text{ரேடியன்}}$

மின்னகத் தூண்டமும் (L_a), இயக்கியின் உராய் தடையும் (B_m) கொடுக்கப் படாததால் விட்டுவிடப் படுகின்றன.

செயற் சமன்பாடுகள் :

வசதிக்காக இலாப்லாசு மாறிய சமன்பாடுகளையே நேராக எழுதி விடுவோம். (முதல் நிலை சுழி ஆக)

$$E = K_p\,(\Theta_r - \Theta L)$$

$$E_f = K_a\, E$$

$$E_f = (R_f + L_f s)\, I_f$$

$$E_g = K_g\, I_f$$

$$E_g = R_a\, I_a + E_b$$

$$E_b = K_b\, s\Theta_m$$

$$T_m = K_t\, I_a$$

$$T_m = J_m\, s^2\Theta_m + T_L{}^1$$

$$T^1{}_L = n\, T_L$$

$$T_L = J_L\, s^2\Theta_L + B_L\, s\Theta_L$$

$$\Theta_L = n\,\Theta_m$$

இனி, இச் சமன்பாடுகளை இணைப்போம்.

$$E_g = K_g I_f$$

$$= K_g \cdot \frac{E_f}{(R_f + L_f s)}$$

$$= K_g \cdot \frac{1}{R_f + L_f s} \cdot K_a E$$

$$E_g = R_a \cdot \frac{T_m}{K_t} + K_b s \cdot \Theta_m$$

$$= \frac{R_a}{K_t} \cdot \left[J_m s^2 \Theta_m + n (J_L s^2 \Theta_L + B_L s \Theta_L) \right] + K_b s \Theta_m$$

$$= \frac{R_a}{K_t} \left[(J_m + n^2 J_L) s^2 \Theta_m + n^2 B_L s \Theta_m \right] + K_b s \Theta_m$$

$$= \left[\frac{R_a}{K_t} (J_m + n^2 J_L) s^2 + \left(n^2 B_L \frac{R_a}{K_t} + K_b \right) s \right] \Theta_m$$

$$\frac{K_a K_g}{(R_f + L_f s)} E = \left[\frac{R_a}{K_t} (J_m + n^2 J_L) s^2 + (n^2 B_L \frac{R_a}{K_t} + K_b) s \right] \frac{1}{n} \Theta_L$$

$$\frac{\Theta_L}{E} = \frac{K_a K_g n}{s(R_f + L_f s) \left[(n^2 B_L \frac{R_a}{K_t} + K_b) + \frac{R_a}{K_t} J_m + n^2 J_L) s \right]}$$

$$K_a K_g n = 100 \times 200 \times \frac{1}{50} = 10^4$$

$$n^2 B_L \frac{R_a}{K_t} + K_b = \frac{1}{50^2} \times 19 \cdot 4 \times 10^{-4} \times \frac{48 \cdot 8}{1 \cdot 1} + 1 \cdot 1$$

$$= 0 \cdot 345 \times 10^{-4} + 1 \cdot 1$$

$$\simeq 1 \cdot 1$$

$$\frac{R_a}{K_t} (J_m + n^2 J_L) = \frac{48 \cdot 8}{1 \cdot 1} (10 \cdot 85 \times 10^{-4} + \frac{1}{50^2} \times 1 \cdot 356)$$

$$= 0 \cdot 0721$$

$$\therefore \quad \frac{\Theta_L}{E} = \frac{10^4}{s(50+5s)\ (1\cdot1+0\cdot0721s)}$$

$$= \frac{182}{s(1+0\cdot1s)\ (1+0\cdot066s)}$$

$$E = 5\cdot73\ (\Theta_r - \Theta_L)$$

$$\Theta_L = \frac{182}{s(1+0\cdot1s)\ (1+0\cdot066s)}\ 5\cdot73\ (\Theta_r - \Theta_L)$$

$$\Theta_L\ [s(1+0\cdot1s)\ (1+0\cdot066s) + 1042] = 1042\ \Theta r$$

எனவே,

$$\frac{\Theta_L}{\Theta_r} = \frac{1042}{s(1+0\cdot1s)\ (1+0\cdot066s) + 1042}$$

4.2 பெட்டிப் படம் (Block Diagram)

4.2.1. அறிமுகம் :

ஆள்குவைகளின் அமைப்பையும் செயலையும் எளிதில் உணர உதவுவது பெட்டிப் படம் (block diagram). ஒன்றோடு ஒன்று இணைக்கப்பட்ட செயல்முறைப் பெட்டிகளால் (functional blocks) ஆள்குவை விளக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு பெட்டியின் உள்ளும் அவ்வவ் வுறுப்பின் செலுத்துச் சார்பு குறிக்கப் படுகிறது. அம்புக் குறிகள் அறிகுறி ஒழுக்கைக் காட்டுகின்றன. பெட்டிப் படத்தின் அமைப்பு வருமாறு :

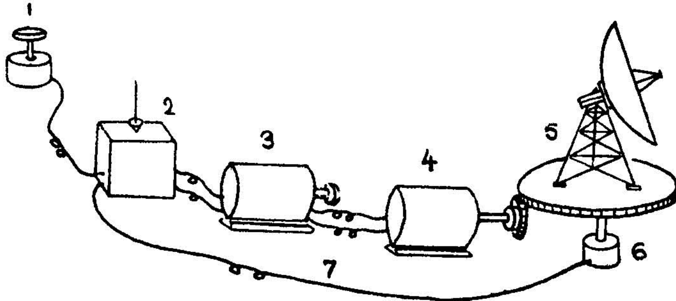
(1) பெட்டிகள் (blocks): இவை ஆள்குவைகளின் உறுப்புக் களையோ, செயல்முறைக் கூறுகளையோ (functional elements) செலுத்துச் சார்புகளோடு குறிக்கின்றன.

(2) திசைக் கோடுகள் (directed lines) : இவை உறுப்புக் களின் இடைத் தொடர்புகளையும் அறிகுறி ஒழுக்கையும் (signal flow) குறிக்கின்றன.

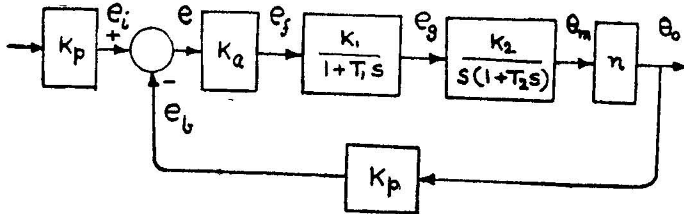
(3) கூட்டுப் புள்ளிகள் (Summing points) : குறியீடுகளுடன் கூடிய வட்டங்கள் கூட்டுப் புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அறிகுறிகள் இயல் முறையில் கூடி (algebraic addition) ஓர் அறிகுறியை வெளியே அனுப்பும் இடங்கள் இவை.

(4) பிரிவுப் புள்ளிகள் (pick-off points) : அறிகுறிகள் அளவில் மாறுபடாது பிரியும் இடங்களைப் பருத்த புள்ளிகள் குறிக்கின்றன. ஓர் இடத்தில் இருந்து ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அறிகுறிகள் அளவில் மாறுபடாது பிரியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :



4.32. அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள்குவை
(antenna position contol system)



படம் 4.33. அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள்குவை : பெட்டிப் படம்

4.2.2 பெட்டிப் படங்களின் நிறைகுறைகள் (Merits and Demerits of Block diagrams)

பெட்டிப் படங்களின் சிறப்புக்களாவன :

1. சிக்கலான ஆள்குவைகளின் அமைப்பையும், செயலையும் பெட்டிப் படத்தின் வாயிலாகத் தெளிவாகவும் எளிதாகவும் உணரலாம்.

2. ஆள்குவை வகைகளின் வேறுபட்ட அமைப்புகளையும் உணர்த்துவதோடு, அவற்றில் ஒரே மாதிரியான பகுப்பாய்வு உத்திகளைக் (analytical techniques) கையாளல் முடியும் என்று பெட்டிப் படம் காட்டுகிறது.

3. பல்வகை உறுப்புக்களின் உருவியல் அமைப்பை ஒட்டிய தனி இயல்புகளை அல்லாது, அவற்றின் செயல்முறைச் சிறப்பு

இயல்புகளையே காட்டுவது பெட்டிப் படம். இதனுல் தேவை அற்ற உருவியல் தொடர்புகளை (physical relations) விடுத்து, செயல்முறைத் தொடர்புகளில் (functional relations) மட்டும் கவனம் செலுத்த முடிகிறது.

பெட்டிப் படங்களைப் பயன்படுத்துவதிலும் சில வரம்புகள் உண்டு.

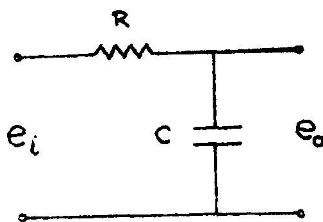
(1) ஆள்குவைக் கூறுகள் நேர்த் தொடர்பு (linear relation) உடையனவாய் இருத்தல் வேண்டும். அதாவது, ஒவ்வொரு உறுப்பின் ஈட்டமும், அதன் ஊட்டத்துடன் நேர் உறவு கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

(2) ஆள்குவைக் கூறுகள் ஒரு வழியினதாக (unilateral) இருத்தல் வேண்டும். அறிகுறி ஒரு வழிப் பயணத்தையே மேற் கொள்ள வேண்டும். அதாவது, ஒரு பகுதியின் ஈட்டம் அப் பகுதியின் ஊட்டத்தை மாற்றும் திறன் உடையதாக இருத்தல் கூடாது.

4.2.3 ஆள்குவை உறுப்புக்களின் பெட்டிப் படங்கள் :

மாதிரி 4.19

கீழே காணும் *RC* சுற்றின் பெட்டிப் படத்தை வரைக. இதையே ஒரு நிறை சுற்றுக் குவையின் மாதிரியாக *G*, *H* இவற்றின் மதிப்புடன் காட்டுக.



படம் 4.34. பருவம் தாழ் வலை

தீர்வு :

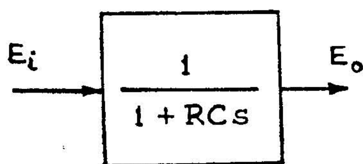
RC சுற்றின் மாறிய சமன்பாடுகள் :

$$E_i = (R + \frac{1}{Cs})\ I$$

$$E_0 = \frac{1}{Cs}\ I$$

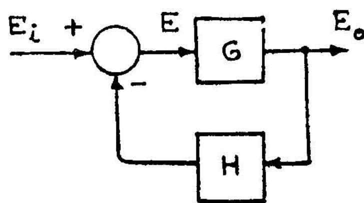
செலுத்துச் சார்பு : $\frac{E_0}{E_i} = \frac{\frac{1}{Cs} I}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right) I} = \frac{1}{1+RCs}$

பெட்டிப் படம் :



படம் 4.35. பெட்டிப் படம் (4.34)

நிறை சுற்றுக்குவை மாதிரி :



படம் 4.36. நிறை சுற்றுக் குவை—பெட்டிப் படம்

$$E_0 = GE$$
$$= G(E_i - HE_0)$$
$$= GE_i - GHE_o$$
$$E_o(1+GH) = GE_i$$
$$\therefore \quad \frac{E_o}{E_i} = \frac{G}{1+GH}$$

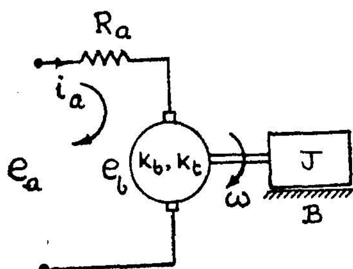
$$\frac{1}{1+RCs} = \frac{\frac{1}{RCs}}{1 + \frac{1}{RCs}}$$

எனவே,

$$G = \frac{1}{RCs}, \quad H = 1$$

மாதிரி 4.20

ஒரு மின்னகக் கட்டு நேர்மின் அடிமை இயக்கியின் (armature-controlled dc servomotor) பெட்டியின் படத்தை வருவிக்க.



படம் 4.37. நேர்மின் அடிமை இயக்கி

தீர்வு :

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள மின்னகக்கட்டு நேர்மின் இயக்கியின் மாறிய சமன்பாடுகள் (Transformed equations) வருமாறு :

$$E_a = R_a I_a + E_b$$

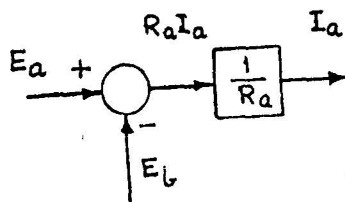
$$E_b = K_b \Omega$$

$$T = K_t I_a$$

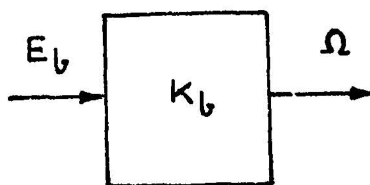
$$T = (Js+B)\Omega$$

இவற்றின் பெட்டிப் படங்கள் :

$E_a = R_a I_a + E_b$ $\qquad$ $E_b = K_b \Omega$

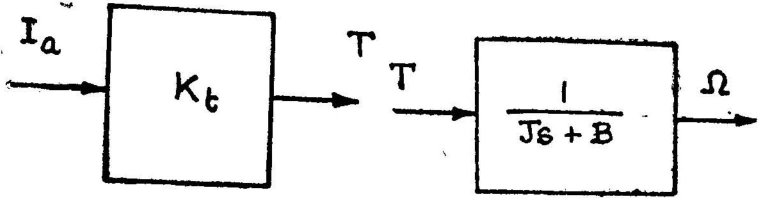


படம் 4.38.



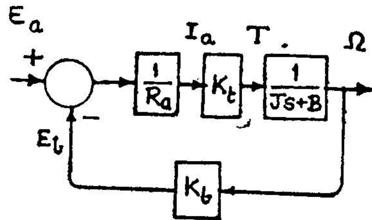
படம் 4.39.

$T = K_t I_a$ $T = (Js+B)\ \Omega$



படம் 4.40. படம் 4.41.

இவற்றை ஒன்றாய் இணைக்க, முழுப் பெட்டிப் படம் கிடைக்கிறது.

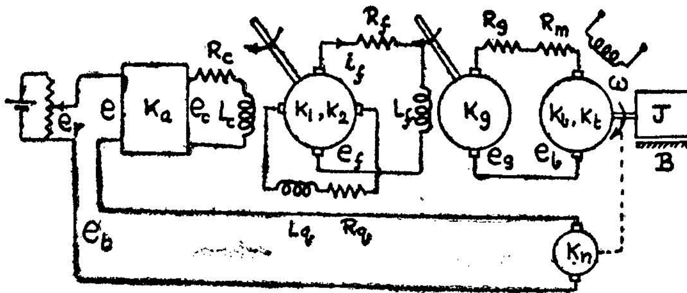


படம் 4.42. மின்னகக் கட்டு இயக்கியின் பெட்டிப் படம்

4.2.4 ஆள்குவைகளின் முழுப் பெட்டிப் படங்கள் :

மாதிரி 4.21

கீழ்க் காணும் வேகக் கட்டுப்பாட்டுக் குவையின் பெட்டிப் படத்தை வரைந்து, உறுப்புக்களின் செலுத்துச் சார்புகளைப் பொருத்துக.



படம் 4.43. வேக ஒழுங்கமைக் குவை

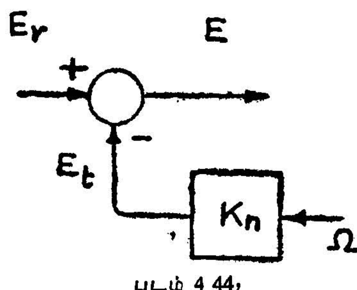
தீர்வு :

குலையின் மாறிய செயற் சமன்பாடுகள் :

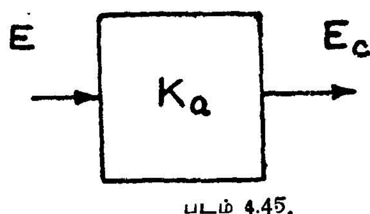
$$E_r = E + E_t$$
$$E_t = K_n\Omega$$
$$E_c = K_a E$$
$$E_c = (R_c + L_c s)\, I_c$$
$$E_q = K_1 I_c$$
$$E_q = (R_q + L_q s)\, I_q$$
$$E_f = K_2 I_q$$
$$E_f = (R + L_f s)\, I_f$$
$$E_g = K_g I_f \qquad R_a = R_g + R_m \text{ என்க.}$$
$$E_g = R_a I_a + E_b$$
$$E_b = K_b\Omega$$
$$T = K_t I_a$$
$$T = (Js + B)\Omega$$

இவற்றின் பெட்டிப் படங்கள் வருமாறு :

$$E_r = E + K_n\Omega \qquad\qquad E_c = K_a E$$

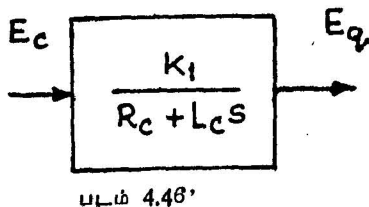


படம் 4.44.

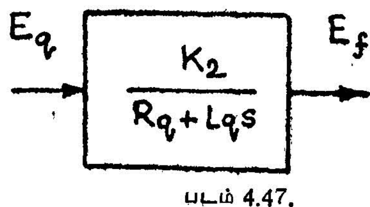


படம் 4.45.

$$E_c = (R_c + L_c s)\,\frac{E_q}{K_1} \qquad\qquad E_q = (R_q + L_q s)\,\frac{E_f}{K_2}$$

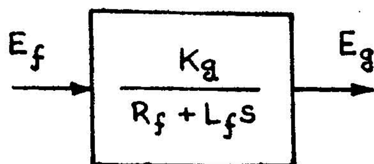


படம் 4.46.



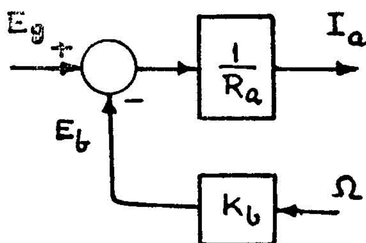
படம் 4.47.

$$E_f = (R_f + L_f s)\frac{E_g}{K_g}$$



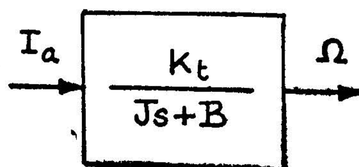
படம் 4.48

$$E_g = R_a I_a + K_b \Omega$$



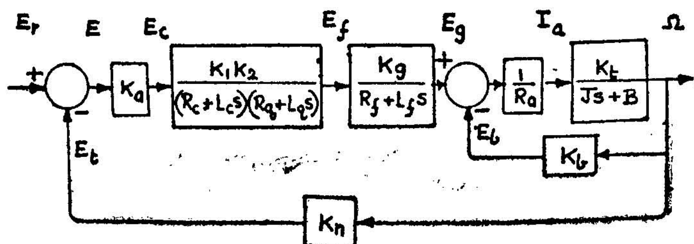
படம் 4·49.

$$K_t I_a = (Js + B)\Omega$$



படம் 4.50.

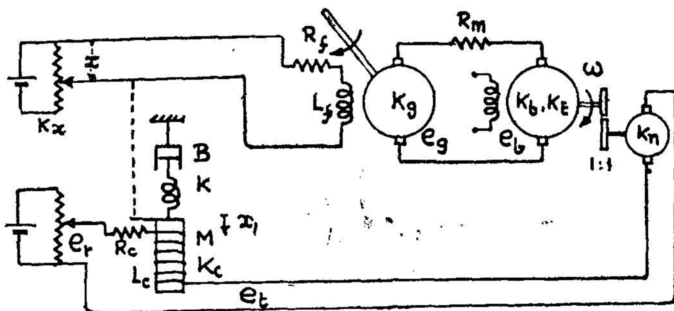
இவை அனைத்தையும் ஒன்று சேர்க்க, முழுப் பெட்டிப் படம் கிடைக்கிறது.



படம் 4·51 முழுப் பெட்டிப்படம்-வேக ஒழுங்கமை குவை

மாதிரி 4.22.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆள்குவையில் $f_c=k_c i_c$, $e_f=k_f x$, காந்தச் சுருள் இயக்கியில் மின்னோட்டம் சுழியாக இருக்கையில் $x=0$.



4.52. ஓர் இயந்திர-மின் இயல் ஆள்குவை

இக் குவையின் எல்லா செயற் சமன்பாடுகளையும் எழுதுக. பிறகு இதன் முழுப் பெட்டிப் படத்தை வரைந்து, பெட்டிகளுள் உறுப்புக்களின் செலுத்துச் சார்புகளைக் குறிக்க.

தீர்வு :

$$e_c = e_r - e_t$$

$$e_t = K_n \omega$$

$$e_c = R_c i_c + L_c \frac{di_c}{dt}$$

$$f_c = K_c i_c$$

$$f_c = M\ddot{x} + K(x-x_1)$$

$$B\dot{x}_1 + K(x_1 - x) = 0$$

$$e_f = K_x . x$$

$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

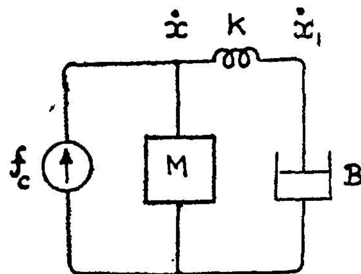
$$e_g = K_g i_g$$

$$e_g = R_m i_g + e_b$$

$$e_b = K_b \omega$$

$$T = K_t i_g$$

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$



படம் 4.53. இயந்திரப் பகுதி (4.52)

முதல் நிலை சுழியாக, இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில் கிடைக்கும் சமன்பாடுகள் :

$$E_c = E_r - E_t$$

$$E_t = K_n e$$

$$E_c = (R_c + L_c s)\, I_c$$

$$F_c = K_c\, I_c$$

$$F_c = (Ms^2 + K)\, X - KX_1$$

$$(Bs + K)X_1 = KX$$

$$E_f = K_x\, X$$

$$E_f = (R_f + L_f s)\, I_f$$

$$E_g = K_g\, I_f$$

$$E_g = R_m\, I_g + K_b \Omega$$

$$T = K_t\, I_g$$

$$T = (Js + B)\Omega$$

இவற்றை இணைக்க,

$$E_c = E_r - K_n \Omega$$

$$E_c = (R_c + L_c s)\, I_c$$

$$K_c\, I_c = \left[(Ms^2 + K) - \frac{K^2}{Bs + K} \right] X$$

அதாவது,

$$(Bs + K)\, K_c I_c = [(Ms^2 + K)(Bs + K) - K^2]\, X$$
$$= [MBs^3 + MKs^2 + KBs]\, X$$

அதாவது,

$$X = \frac{K_c\,(Bs + K)}{s(MBs^2 + MKs + BK)}\, I_c$$

$$K_x\, X = (R_f + L_f s)\, \frac{E_g}{K_g}$$

அதாவது,

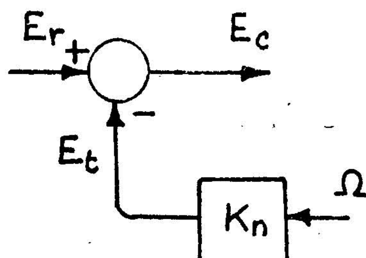
$$E_g = \frac{K_g K_x}{(R_f + L_f s)} X$$

$$E_g - K_b \Omega = R_m I_g$$

$$K_t I_g = (Js + B) \Omega$$

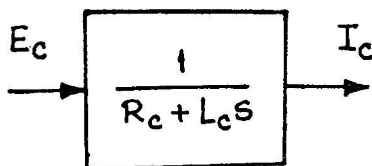
இவற்றின் பெட்டிப் படங்கள் :

$E_e = E_r - E_t$; $E_b = K_n \Omega$



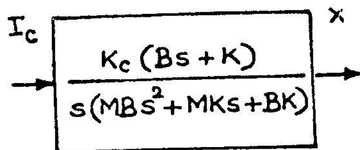
படம் 4.54

$$E_c = (R_c + L_c s) I_c$$



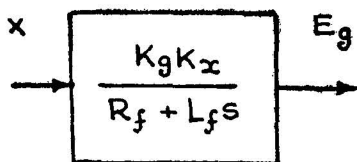
படம் 4.55

$$X = \frac{K_c (Bs + K)}{s (MBs^2 + MKs + BK)} I_c$$



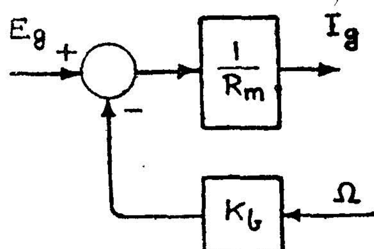
படம் 4.56

$$E_g = \frac{K_g K_x}{(R_f + L_f s)}\ X$$



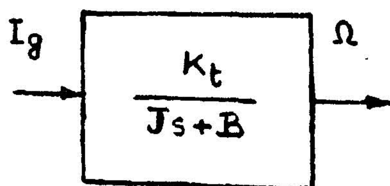
படம் 4.57

$$E_g - K_b\ \Omega = R_m\ I_g$$



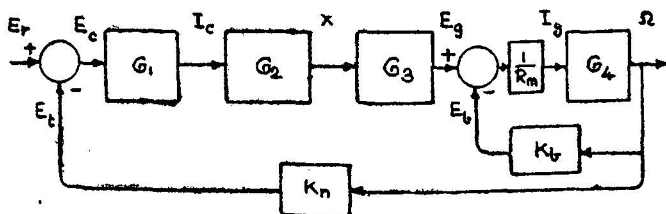
படம் 4.58

$$K_t\ I_g = (Js+B)\ \Omega$$



படம் 4.59

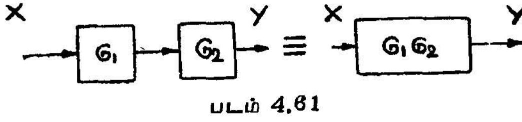
இவற்றை ஒன்று சேர்க்க முழுப் பெட்டிப் படம் கிடைக்கிறது.



படம் 4.60. ஆள் குலையின் முழுப் பெட்டிப் படம்

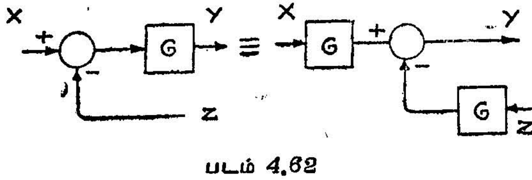
4.2.5 : பெட்டிப் பட ஒடுக்கம் (Block diagram reduction)

1. இரு தொடர்ப் பெட்டிகளை இணைத்தல் :



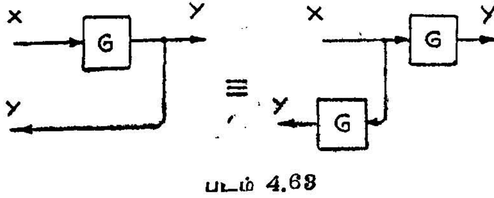
படம் 4.61

2. ஒரு கூட்டுப் புள்ளியை ஒரு பெட்டிக்கு முன் கொணரல்.



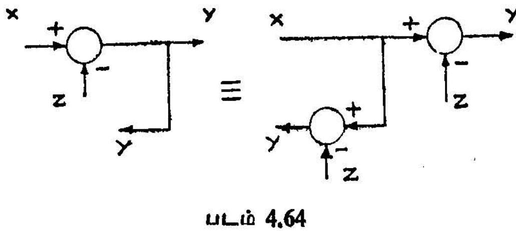
படம் 4.62

3. ஒரு பிரிவுப் புள்ளியை ஒரு பெட்டிக்கு முன் கொணரல் :



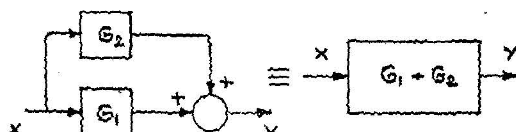
படம் 4.63

4. ஒரு பிரிவுப் புள்ளியை ஒரு கூட்டுப் புள்ளிக்கு முன் கொணரல் :



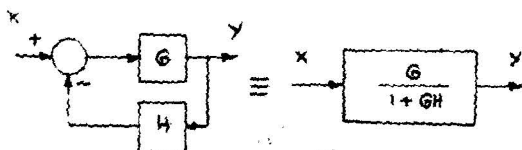
படம் 4.64

5. ஒரு முன்செல் சுற்றை நீக்கல் :



படம் 4.65

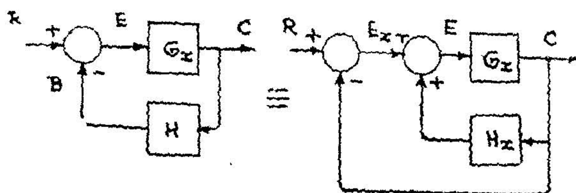
6. ஒரு பின்னூட்டுப் பாதையை நீக்கல் :



படம் 4.66

மாதிரி 4·23

இரண்டு பெட்டிப் படங்கள் கீழே காட்டப் பட்டுள்ளன. படம் 4.66 அ இன் முழுச் செலுத்துச் சார்பைக் காண்க. படம் 4·66ஆ, 4·66 அ இன் முற்றொருமை (equivalent) எனில், H_x இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 4.66 அ. படம் 4.66 ஆ.

படம் 4.66 அ. ஆ: முற்றொருமைப் பெட்டிப் படங்கள்

$$G_x = \frac{15000}{s(s+5)(1+0{\cdot}01s)}; \quad H = \frac{1}{1+0{\cdot}1s}$$

தீர்வு :

4.88. அ.

$$\frac{C}{R} = \frac{Gx}{1+G_xH} \qquad \cdots \quad (1)$$

4.66. ஆ.

$$\frac{C}{E_x} = \frac{G_x}{1-G_xH_x}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\dfrac{G_x}{1-G_xH_x}}{1+\dfrac{G_x}{1-G_xH_x}}$$

$$= \frac{G_x}{1+G_x-G_xH_x}$$

$$= \frac{G_x}{1+G_x(1-H_x)} \quad \cdots \quad (2)$$

(1), (2) இரண்டையும் ஒப்பிட,

$H = 1 - H_x$ என்று கிடைக்கிறது.

$$H_x = 1 - H$$

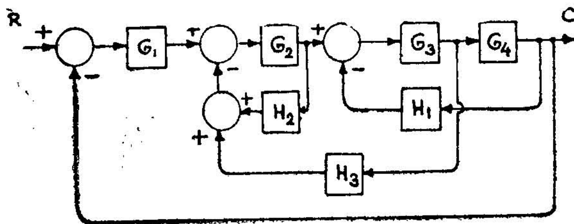
$$= 1 - \frac{1}{1+0{\cdot}1s} = \frac{0{\cdot}1s}{1+0{\cdot}1s}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\dfrac{15000}{s(s+5)\,(1+0{\cdot}01s)}}{1-\dfrac{15000}{s(s+5)\,(1+0{\cdot}01s)} \times \dfrac{1}{(1+0{\cdot}1s)}}$$

$$= \frac{15000\,(1+0{\cdot}1s)}{s(s+5)\,(1+0{\cdot}01s)\,(1+0{\cdot}1s)-15000}$$

மாதிரி : 4·24

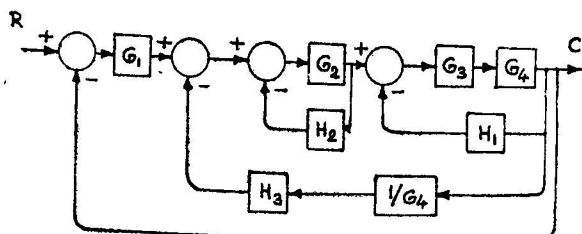
சுருக்குக !



படம் 4.67

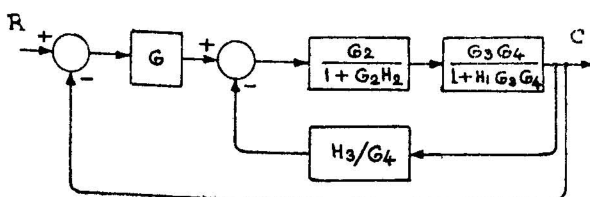
தீர்வு :

படி 1 :



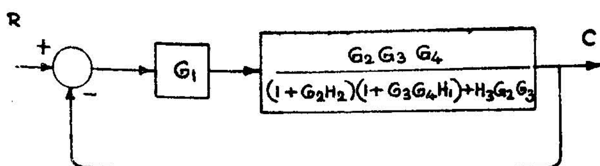
படம் 4.68

படி 2 :



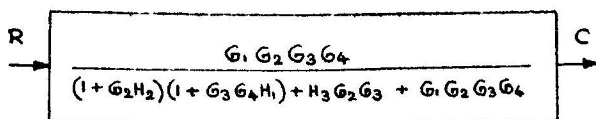
படம் 4.69

படி 3 :



படம் 4.70

படி 4 :



படம் 4.71

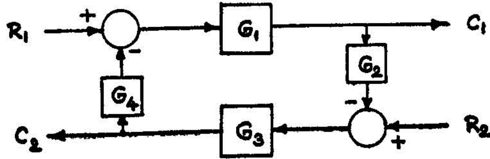
அடுத்து, பெட்டிப் பட முறையின் குறையைக் காட்ட ஒரு சிக்கலான ஆள்குவையை எடுத்துக் கொண்டு, ஒடுக்க முறையில் அதன் செலுத்துச் சார்பைக் காண்போம்.

மாதிரி : 4·25

படத்திற் காணும் பல் ஊட்ட-ஈட்டக் குவையில் (**multiple input-multiple output system**)

$$\left.\frac{C_1}{R_1}\right| R_2=0, \quad \left.\frac{C_2}{R_1}\right| R_2=0, \quad \left.\frac{C_2}{R_2}\right| R_1=0, \quad \left.\frac{C_1}{R_2}\right| R_1=0$$

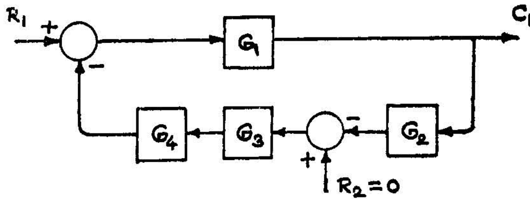
என்னும் செலுத்துச் சார்புகளைக் கண்டு பிடிக்க.



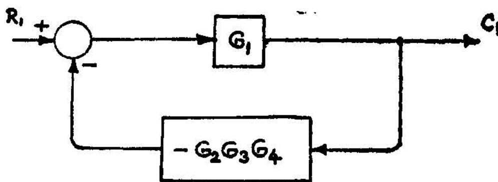
படம் 4.72

தீர்வு :

(அ) $\left.\frac{C_1}{R_1}\right| R_2=0$ காணல் :



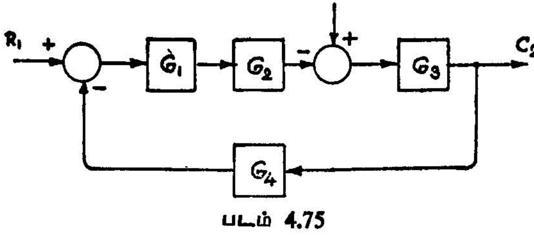
படம் 4.73



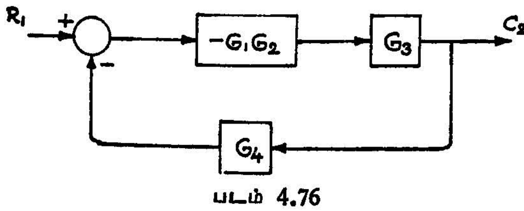
படம் 4.74

எனவே $\left.\frac{C_1}{R_1}\right|_{R_2=0} = \frac{G_1}{(1-G_1G_2G_3G_4)}$

(ஆ) $\left.\frac{C_2}{R_1}\right|_{R_2=0}$ காணல் :



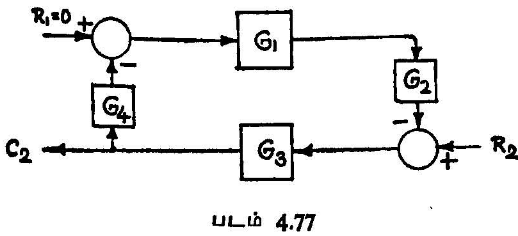
படம் 4.75



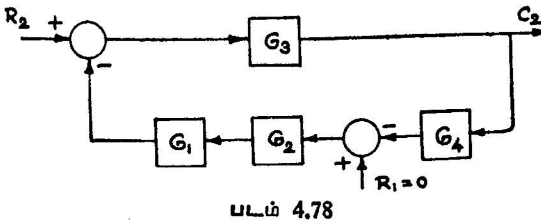
படம் 4.76

எனவே $\left.\frac{C_2}{R_1}\right|_{R_2=0} = \frac{-G_1G_2G_3}{(1-G_1G_2G_3G_4)}$

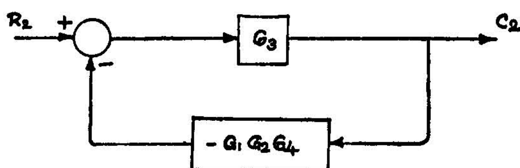
(இ) $\left.\frac{C_2'}{R_2}\right|_{R_1=0}$ காணல் :



படம் 4.77



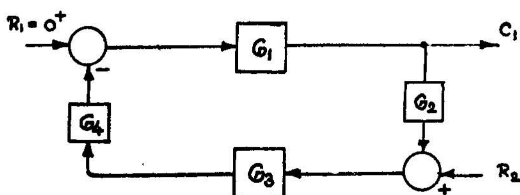
படம் 4.78



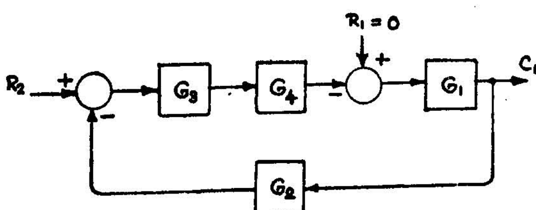
படம் 4.79

$$\left.\frac{C_2}{R_2}\right|_{R_1=0} = \frac{G_3}{(1-G_1G_2G_3G_4)}$$

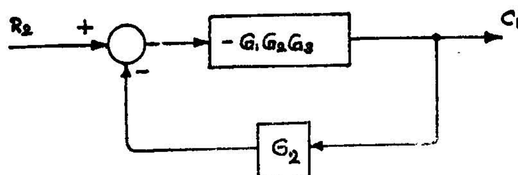
(ஈ) $\left.\frac{C_1}{R_2}\right|_{R_1=0}$ காணல் !



படம் 4'80



படம் 4'81



படம் 4'82

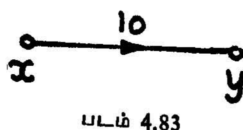
எனவே $\frac{C_1}{R_2}\Big|_{R_1=0} = \frac{-G_1G_3G_4}{(1-G_1G_2G_3G_4)}$

4.3 அறிகுறி பாய் படம் (Signal flow graph).

4.3·1 அறிமுகம் :

பெட்டிப் படத்தின் எளிதாக்கப் பட்ட ஒரு வடிவமே அறிகுறி பாய் படம் (signal flow graph) ஆகும்.

ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் கூட்டம் (a set of simultaneous equations) ஒன்றைப் பட வடிவில் காட்டுவது அறிகுறி பாய் படம். இது ஒரு வலை உருவினது. இதில் சந்திகள் (nodes), திசைக் கோடுகளால் (directed branches) இணைக்கப்பட்டு உள்ளன. 'சந்திகள்' மாறிகளைக் (variables) குறிக்கின்றன; திசைக் கோடுகள் ஒரு திசை அறிகுறிப் பெருக்கிகளாகச் (one way signal multipliers) செயல் புரிகின்றன.

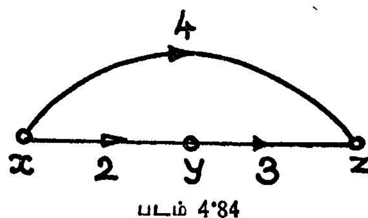


படம் 4.83

அறிகுறி செல் வழி ஓர் அம்புக்குறியால் உணர்த்தப்படுகிறது. பெருக்கற் சார்பு அல்லது செலுத்துச்சார்பு அம்புக் குறியின் அருகே காட்டப்படுகிறது.

படம் 4·83 இல் x — என்ற அறிகுறி இடமிருந்து வலமாகச் செலுத்தப்படுகிறது. வழியில் 10 ஆல் பெருக்கப்படுகிறது. ஊட்டம் : x என்னும் அறிகுறி. ஈட்டம் y என்ற அறிகுறி—எனில் $y = 10\,x$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இதில் '10' என்பது பெருக்கற் சார்பு அல்லது செலுத்துச் சார்பு.



படம் 4·84

படம் 4·84 இல் இரண்டு முன்செல் பாதைகள் உள்ளன. பாதையில் x-என்ற அறிகுறி முதலில் இரண்டாலும், பிறகு மூன்றாலும் பெருக்கப்பட்டு வெளியே வருகிறது. மேல் பாதையில் x-என்ற அறிகுறி நான்கால் பெருக்கப்பட்டு வெளியிடு பகுதிக்கு வருகிறது. இவ் ஈட்ட அறிகுறி z என்று குறிக்கப்பட்டால்,

$$z = 3\times 2x + 4x$$

அல்லது $z = 3y + 4x$ ... (1)

இங்கு $y = 2x$ ... (2)

சமன்பாடுகள் (1), (2) இவற்றின் அறிகுறி பாய் படம் 4.84

அறிகுறி பாய் படத்தின் பயன் யாது எனில், ஒன்றற்கு மேற்பட்ட ஊட்டங்களை உடைய ஆள் குவைகளிலும், ஒன்றற்கு ஒன்று பின்னிய சுற்றுக்களை உடைய ஆள்குவைகளிலும் பெட்டிப் படத்தைக் கொண்டு செலுத்துச் சார்பு காணல் மிகக் கடினம். அப்பொழுது எல்லாம் அறிகுறி பாய் படத்தின் வாயிலாக எளிதில் செலுத்துச் சார்புகளை (பார்வை அளவிலேயே) எழுத இயலும்.

4.3.2 அறிகுறி பாய் படம் வரைதல் :

மாதிரி 4.26. சமன்பாடுகள் :

$$x_2 = ax_1 - kx_5$$
$$x_3 = bx_2 - fx_3 - 8\,x_4$$
$$x_4 = cx_3 - hx_5$$
$$x_5 = dx_4 + mx_1$$
$$x_6 = ex_5$$

தீர்வு :

படி 1. 6 மாறிகளையும் 6 சந்திகளால் படத்தில் குறிக்கவும்.

o x_1 o x_2 o x_3 o x_4 o x_5 o x_6

படம் 4.85

படி 2 : $x_2 = ax_1 - kx_5$ என்ற சமன்பாட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு படத்தில் குறிக்கவும்.

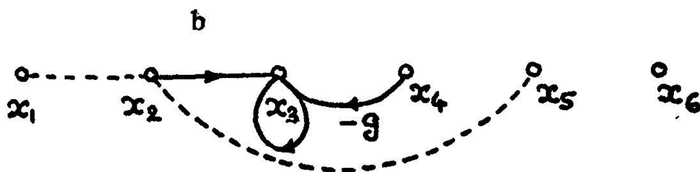


படம் 4.86

அதாவது, x_2 என்ற சந்தியில் $a \times x_1$ என்ற அறிகுறியும் $-k \times x_5$ என்ற அறிகுறியும் வந்து கூடுகின்றன.

படி 3 :

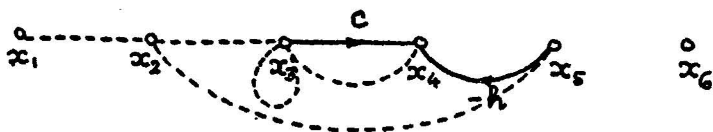
x_3 என்ற சந்தியில் இது போல் கூடும் அறிகுறிகள் வருமாறு. $b \times x_2$, $-f \times x_3$, $-g \times x_4$. இச் செயலைக் கீழ்க் கண்டவாறு படத்தில் காட்டலாம்.



படம் 4.87

படி 4 :

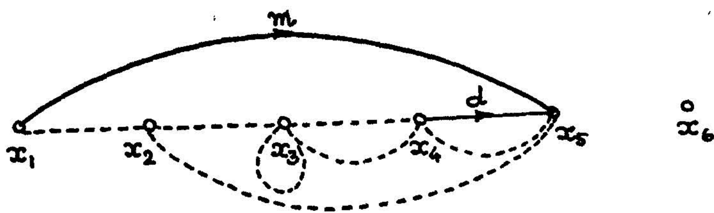
$x_4 = c \times x_3 + (^-h) \times x_5$ என்னும் சமன்பாட்டில் இருந்து கிடைப்பது.



படம் 4.88

படி 5 :

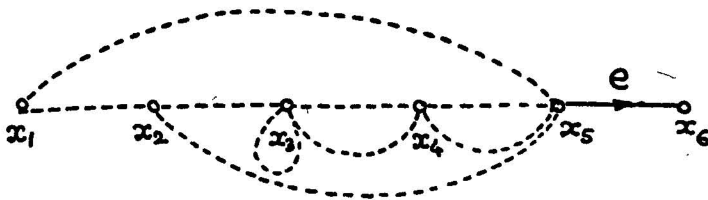
x_5 என்ற சந்தியில் $d \times x_4$, $m \times x_1$ என்ற அறிகுறிகள் ஒன்று சேர்கின்றன. இதன் பட வடிவம் வருமாறு:



படம் 4.89

படி 6 :

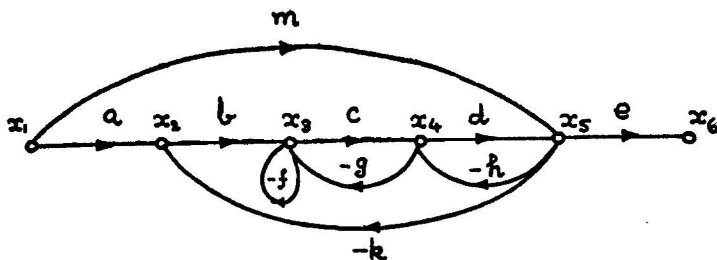
$x_6 = e \times x_5$ என்ற சமன்பாட்டின் படம் :



படம் 4.90

படி 7 :

மேற்கண்ட பகுதிகள் எல்லாவற்றையும் ஒன்ருய் இணைக்கவும். ஆள்குவையின் அறிகுறி பாய் படம் கீழ் உள்ளவாறு கிடைக்கிறது.



படம் 4.91

குறிப்புக்கள் :

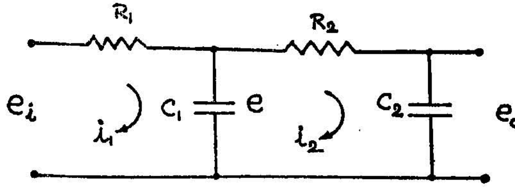
1. சந்திகளில் அறி குறிகளின் கூடுதல் மட்டுமே அனுமதிக்கப் படுகிறது. ஓர் அறிகுறி கழிக்கப்பட வேண்டுமானுல் எதிர்க் குறியீடு (**—ve sign**) பெருக்கற் சார்போடு இணைக்கப் படுகிறது. சான்று : $x_2 = ax_1 - kx_5$ என்பது $x_2 = ax_1 + (-k)\ x_5$ என மாற்றி எழுதப்படுகிறது.

2. வசதி கருதி, முன் செல் திசைக் கோடுகள், கிடைக் கோட்டிலும் அதற்கு மேலாகவும், பின்னூட்டுத் திசைக்கோடுகள் கிடைக்கோட்டிற்குக் கீழாகவும் வரையப் படுகின்றன. இதனுல் முன் செல் பாதைகள் (**forward paths**), பின்னூட்டுச் சுற்றுக்கள் (**feedback loops**) இவற்வறக் கணித்தல் எளிதாகிறது.

அறிகுறி பாய் படம் வரை முறையை மேலும் சில எடுத்துக் காட்டுக்களால் விளக்குவோம்,

மாதிரி 4.27 :

கீழ்க்காணும் ஏணி மின்வலையின் (**electrical ladder network**) அறிகுறி ஒழுக்குப் படத்தை வரைக.



படம் 4.92. ஏணி மின் வலை

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள மின்வலையில் இலாப்லாசு மாறிய செயற் சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$E_i = R_1 I_1 + E$$

$$E = \frac{1}{C_1 s} I_1 - \frac{1}{C_1 s} I_2$$

$$E = R_2 I_2 + E_0$$

$$E_0 = \frac{1}{C_2 s} I_2$$

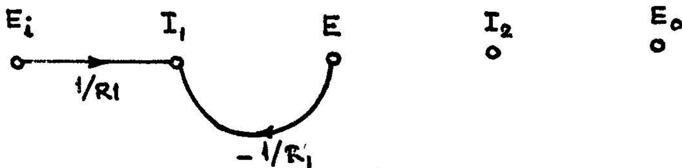
இவற்றைக் கொண்டு அறிகுறி பாய் படத்தை வரையலாம்.

படி 1 : மாறிகள் 5 : E_i, I_1, E, I_2, E_0. இவற்றை 5 சந்திகளால் குறிக்கின்றோம்.



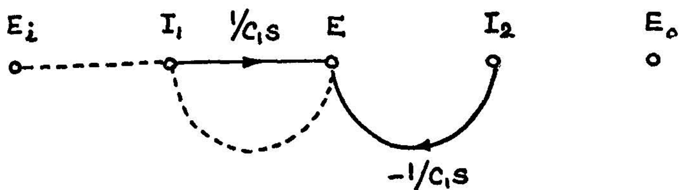
படம் 4·93

படி 2 : $E_i = R_1 I_1 + E \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{1}{R_1} E_i - \frac{1}{R_1} E$



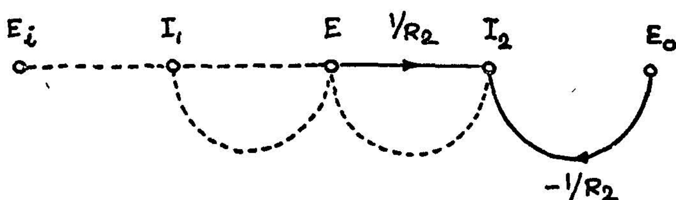
படம் 4,94

படி 3 : $E = \frac{1}{C_1 s} I - \frac{1}{C_1 s} I_2$



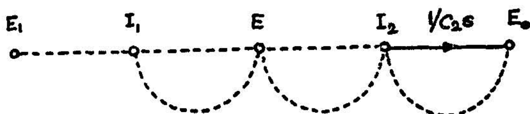
படம் 4·95

படி 4 : $E = R_2 I_2 + E_0 \Longrightarrow I_2 = \frac{1}{R_2} E - \frac{1}{R_2} E_0$



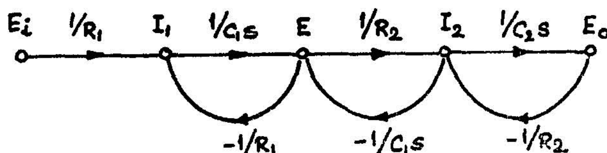
படம் 4·96

படி 5 : $E_0 = \frac{1}{C_2 s} I_2$



படம் 4.97

படி 6 : இவற்றை ஒன்று சேர்க்க முழுப் படம் கிடைக்கிறது.

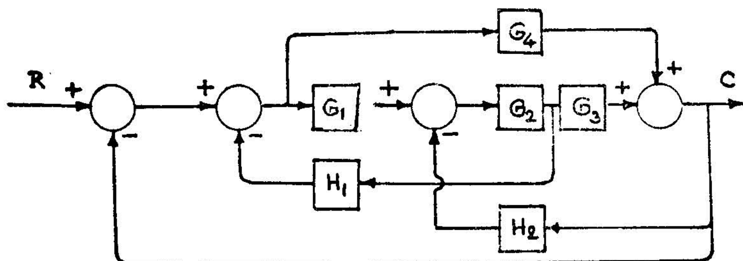


படம் 4.98 ஒளி மின் வலையின் அறிகுறி பாய் படம்

4.3.3 பெட்டிப் படத்தில் இருந்து அறிகுறி பாய் படம் வரைதல்

மாதிரி 4.28

படம் 4.99 இல் உள்ள பல சுற்று ஆள்குவையின் அறிகுறி ஒழுக்குப் படத்தை வரைக.



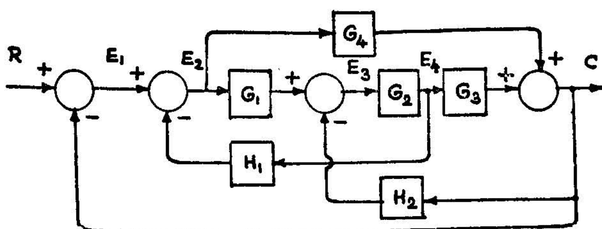
படம் 4·99. ஒரு பல சுற்று ஆள்குவை

தீர்வு :

முதற்படியாகக் குறைந்த அளவு மாறிகள் எவ்வளவு தேவை என அறிந்து, அவற்றிற்குப் பெயர் இடுகிறோம். இதைக் கணிக்க ஒரு குறிப்பு :

ஒவ்வொரு கூட்டுப் புள்ளிக்குப் பிறகும் ஒரு மாறியைப் பெயர் இடவேண்டும். பெட்டிகளுக்குப் பின் பிரியும் புள்ளி இருந்தால் அன்றி மாறியைக் குறிப்பிடத் தேவை இல்லை.

இக் குறிப்பின்படி, E_1, E_2, E_3, E_4 என்ற 4 மாறிகளைக் கீழ் வருமாறு தேர்ந்தெடுக்கிறோம.



படம் 4.100

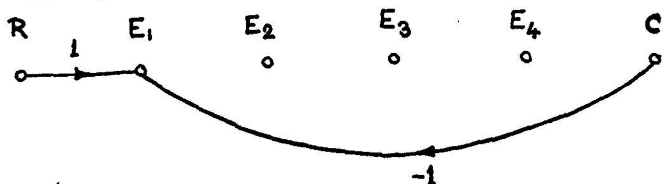
இரண்டாம் படியாக, இம் மாறிகளை அறிகுறி ஒழுக்குப்பட சந்திகளால் குறிக்கிறோம்,



படம் 4.101

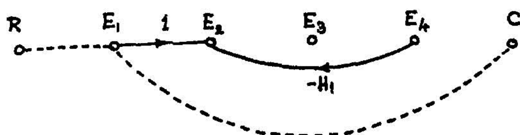
மூன்றும் படியாக, E_1 முதலான மாறிகளின் சமன்பாடுகளைப் படத்தில் பின்வருமாறு குறிக்கிறோம்.

(i) $E_1 = R - C$



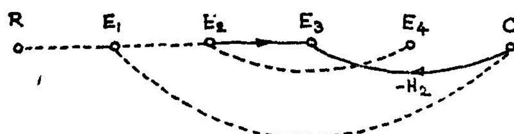
படம் 4.102

(ii) $E_2 = E_1 - H_1E_4$



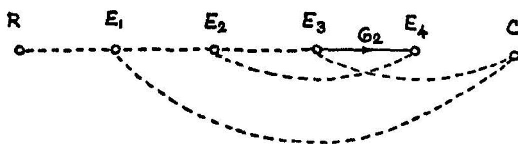
படம் 4.103

(iii) $E_3 = G_1E_2 - H_2C$



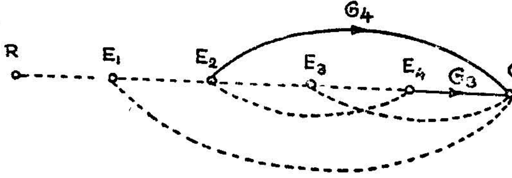
படம் 4.104

(iv) $E_4 = G_2E_3$



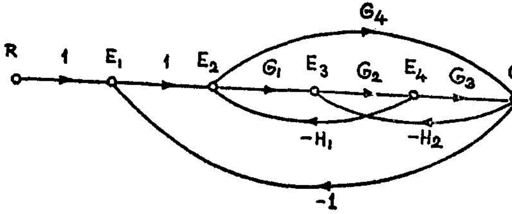
படம் 4.105

(v) $C = G_4E_2 + G_3E_4$



படம் 4.106

இவற்றை ஒன்றாய் இணைக்க, முழு அறிகுறி பாய் படம் கிடைக்கிறது.



படம் 4.107 முழு அறிகுறி பாய் படம்

4.3.4 அறிகுறி பாய் பட ஒடுக்கம் : (signal flow diagram reduction)

பின்வரும் எளிய விதிகளைக் கையாண்டு, அறிகுறி பாய் படத்தை ஒடுக்கி, செலுத்துச் சார்பு காணல் இயலும்.

(1) தொடர் இணைப்புத் திசைக் கோடுகளின் பெருக்கல் : (Multiplication of cascaded branches)



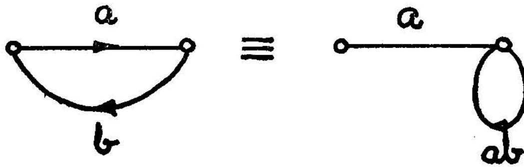
படம் 4.108

(2) பக்க இணைப்புத் திசைக் கோடுகளின் கூடுதல் ; (Addition of parallel branches)



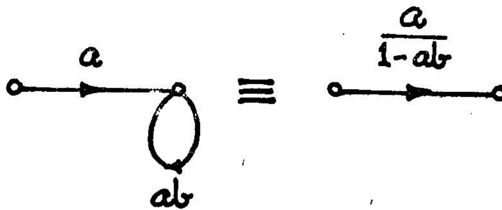
படம் 4.109

(3) பின்னூட்டுப் பாதையின் ஒடுக்கம் : (Reduction of a feedback path)



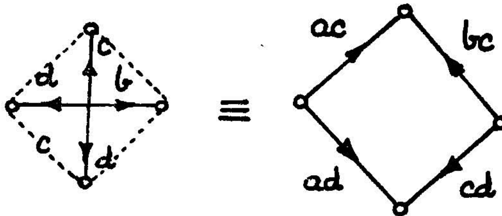
படம் 4.110

(4) பின்னூட்டுப் பாதையின் நீக்கம் : (Elimination of a feedback path)



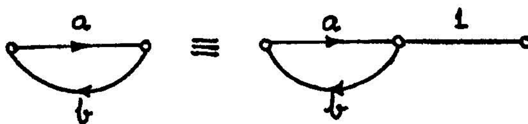
படம் 4.111

(5) இடைச் சந்தியை நீக்கல் : (Elimination of an intermediate node)



படம் 4.112

(6) வெற்றுச் சந்தியை இணைத்தல் : (Addition of a dummy node)



படம் 4.113

4.3.5 மேசனின் விதி (Mason's Rule)

'மேசனின் விதி'யைக் கொண்டு, அறிகுறி பாய் பட ஒடுக்க உத்தி இன்றியே, பார்த்த அளவில் ஆள்குவையின் முழுச் செலுத்துச் சார்பைக் காணலாம்.

இவ் விதியைப் படிக்கு முன்னர் சில வரையறைகளை அறிதல் நலமாகும். அவை வருமாறு :

1. முதற் சந்தி (source node): வெளியேறும் திசைக்கோடுகளை மட்டுமே உடைய சந்தி, 'முதற் சந்தி' ஆகும். சான்று படம் 4.91 இல் x_1

2. கடைச் சந்தி (sink node): உள்வரும் திசைக் கோடுகளை மட்டுமே உடைய சந்தி, 'கடைச் சந்தி' ஆகும். சான்று படம் 4.91 இல் x_6.

3. இடைச் சந்தி (general node or mixed node) : உள்வரும், வெளியேறும் ஆகிய இரு வகைத் திசைக் கோடுகளையும் கொண்டது இடைச் சந்தி. சான்று படம் 4.91 இல் x_2, x_3, x_4 x_5.

4. முன் செல் பாதை (forward path) : முதற் சந்தியில் தொடங்கி அம்புக் குறியின் திசையிலேயே சென்று, எந்தச் சந்தியையும் ஒருமுறைக்கு மேல் கடக்காது, கடைச் சந்தியை அடைவது முன் செல்பாதை ஆகும். சான்று படம் 4.91 இல் **abcde, me.**

5. பின்னூட்டுச் சுற்று (feedback loop) : ஒரு இடைச் சந்தியில் தொடங்கி, அம்புக் குறியின் திசையிலேயே சென்று, எந்தச் சந்தியையும் ஒரு முறைக்குமேல் கடக்காது, தொடங்கிய சந்தியிலேயே முடிவது பின்னூட்டுச் சுற்று ஆகும். சான்று படம் 4.91 இல் $-f, -cg, -dh, -bcdk$.

குறிப்பு : வெற்றுத் திசைக்கோடு ஒன்றை, ஓர் இடைச் சந்தியுடன் இணைத்து, அவ் இடைச் சந்தியைக் கடைச் சந்தி ஆக்கலாம்.

இனி, மேசனின் விதியைப் பார்ப்போம். அதைப் பின்வரும் கணித சமன்பாட்டில் குறிக்கலாம்.

$$T = \frac{\Sigma T_n \Delta_n}{s}$$

T : மொத்த செலுத்துச் சார்பு

T_n : n-ஆவது முன் செல்பாதையின் செலுத்துச் சார்பு

$\triangle = 1 -$ (பின்னூட்டுச் சுற்றுகளின் செலுத்துச் சார்புகளின் கூடுதல்)

+ (இரண்டு இரண்டாக எடுக்கப்பட்ட, ஒன்றை ஒன்று தொடாத பின்னூட்டுச் சுற்றுகளின் செலுத்துச் சார்புப் பெருக்கல்களின் கூடுதல்)

− (மூன்று மூன்றாக எடுக்கப்பட்ட ... ... பெருக்கல்களின் கூடுதல்)

+ ... ...

$\triangle_n$ = n-ஆவது முன் செல்பாதையைத் தொடாத, அறிகுறி பாய் படப் பகுதியின் $\triangle$.

குறிப்பு :

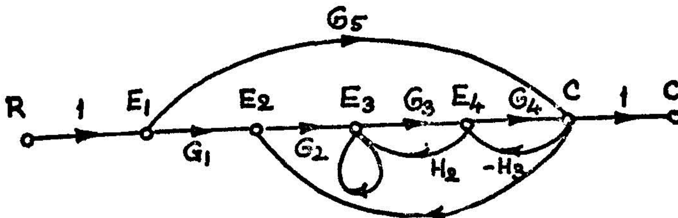
(1) n-ஆவது முன் செல் பாதையைத் தொடாத பகுதிகள் ஏதும் இல்லையானால் $\triangle_n = 1 - 0 = 1$.

(2) ஒன்றை ஒன்று தொடாத பின்னூட்டுச் சுற்று இல்லையானால் $\triangle = 1 -$ [பின்னூட்டுச் சுற்றுக்களின் செலுத்துச் சார்புகளின் கூடுதல்]

இதை சில எடுத்துக் காட்டுக்களின் உதவியால் தெளிவு படுத்துவோம்.

மாதிரி 4.29

படம் 4.14 இல் உள்ள ஆள்குவையின் செலுத்துச் சார்பை வருவிக்க.



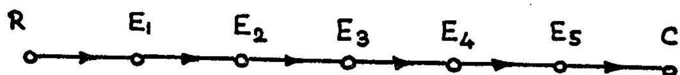
படம் 4.114 ஓர் ஆள்குவையின் அறிகுறி பாய் படம்

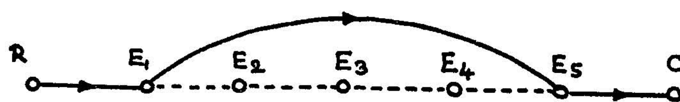
தீர்வு :

படி 1 : இதில் 2 முன் செல் பாதைகள் உள்ளன. இவை முறையே $RE_1E_2E_3B_4E_5C$, RE_1E_5C. இவற்றின் செலுத்துச் சார்புகள்

$T_1 = G_1G_2G_3G_4$

$T_2 = G_5$ ஆகும்.

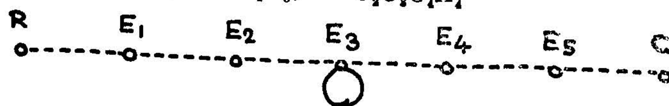


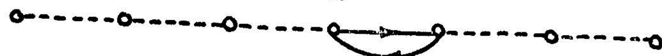


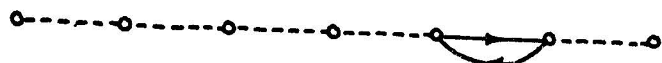
படம் 4-115

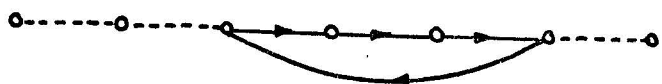
படி 2 : இதில் 4 பின்னூட்டுச் சுற்றுக்கள் உள்ளன. இவை யாவன : E_3, $E_3E_4E_3$; $E_4E_5E_4$, $E_2E_3E_4E_5E_2$. இவற்றின் செலுத்துச் சார்புகள் முறையே

$-H_1$, $-G_3H_2$; $-G_4H_3$, $-G_2G_3G_4H_4$



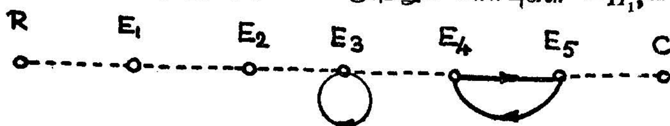


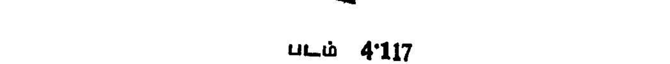




படம் 4·116

படி 3 : ஒன்றை ஒன்று தொடாத பின்னூட்டுச் சுற்றுக்கள் 2. இவை E_3, $E_4E_5E_4$. இவற்றின் செலுத்துச் சார்புகள் $-H_1$, $-G_4H_3$





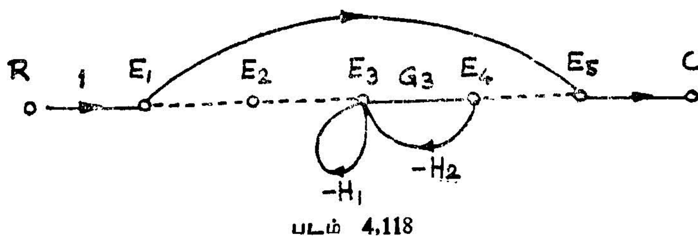
படம் 4·117

படி 4 : $\Delta = 1-(-H_1-G_3H_2-G_4H_3-G_2G_3G_4H_4)$
$+(-H_1\times -G_4H_3)-(0)+\ldots\ldots$
$= 1+H_1+G_3H_2+G_4H_3+G_2G_3G_4H_4+G_4H_1H_3$

படி 5 : 1-ஆம் முன் செல் பாதையைத் தொடாத பகுதிகளே இல்லை.

எனவே $\Delta_1 = 1-0=1$

2-ஆம் முன்செல் பாதையைத் தொடாத பகுதி படம் 4.118 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 4,118

இதன் $\Delta = 1-(-H_1 - G_3H_2) +0-\ldots$
$= 1+H_1+G_3H_2$

எனவே $\Delta_2 = 1+H_1+G_3H_2$

படி : 6 $T = \dfrac{T_1\Delta_1+T_2\Delta_2}{s}$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4\,(1)+G_5\,(1+H_1+G_3H_2)}{1+H_1+G_3H_2+G_4H_3+G_2G_3G_4H_4+G_4H_1H_3}$$

எனவே $$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3G_4+G_5+G_5H_1+G_3G_5H_2}{1+H_1+G_3H_2+G_4H_3+G_2G_3G_4H_4+G_4H_1H_3}$$

மாதிரி 4.30

படம் 4.92 இல் உள்ள ஈரடுக்கு ஏணி மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பை, அறிகுறி பாய் படம் வரைந்து, மேசன் விதியின் உதவியால் கணிக்க.

தீர்வு :

மாதிரி 4.27 இல் இம் மின் வலையின் அறிகுறி ஒழுக்குப் படம் வருவிக்கப்பட்டது.

படி 1 : இதில் ஒரே ஒரு முன்செல் பாதையே உள்ளது : $E_i I_1 E I_2 E_0$. இதன் செலுத்துச் சார்பு

$$T_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s}$$

$$= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

படி 2 : இதில் பின்னூட்டுப் பாதைகள் 3 உள்ளன.

$I_1 E I_1$, $E I_2 E$, $I_2 E_0 I_2$. இவற்றின் செலுத்துச் சார்புகள் முறையே $-\frac{1}{R_1 C_1 s}$, $-\frac{1}{R_2 C_1 s}$, $-\frac{1}{R_2 C_2 s}$

படி 3 : இதில் ஒன்றை ஒன்று தொடாத பின்னூட்டுச் சுற்றுக்கள் 2 : $I_1 E I_1$, $I_2 E_0 I_2$. இவற்றின் செலுத்துச் சார்புகள் முறையே $-\frac{1}{R_1 C_1 s}$, $-\frac{1}{R_2 C_2 s}$

படி 4 : எனவே

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{1}{R_1 C_1 s} - \frac{1}{R_2 C_1 s} - \frac{1}{R_2 C_2 s}\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{R_1 C_1 s} - \times \frac{1}{R_2 C_2 s}\right) - (0) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

$$= \frac{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

படி 5 : முன்செல் பாதையைத் தொடாத பகுதிகளே இல்லை.

எனவே, $\Delta_1 = 1 - 0 = 1$

படி 6 : $T = \frac{T_1 s_1}{\Delta}$

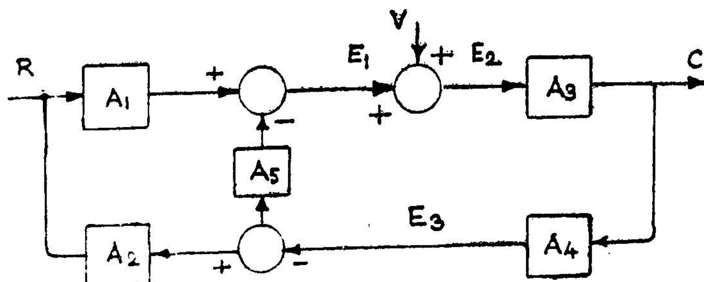
$$\frac{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2} \times 1}{\frac{1+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+R_1C_1R_2C_2s^2}{R_1C_1R_2C_2s^2}}$$

எனவே

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{1+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)s+R_1C_1R_2C_2s^2}$$

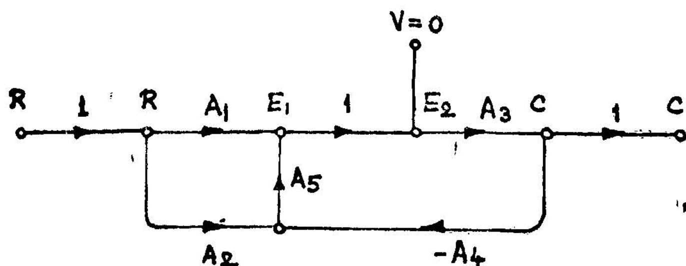
மாதிரி 2.31

படம் 4.119 இல் ஒரு பன்மை ஊட்ட ஆள்குவை காட்டப் பட்டுள்ளது. மேசன் விதியைக் கொண்டு $\frac{C}{R}$, $\frac{C}{V}$ இவற்றின் மதிப்புக்களை எழுதுக.



படம். 119. ஒரு பன்மை ஊட்ட ஆள்குவை

தீர்வு : (அ) ஊட்டம் R என்க ; $V = 0$



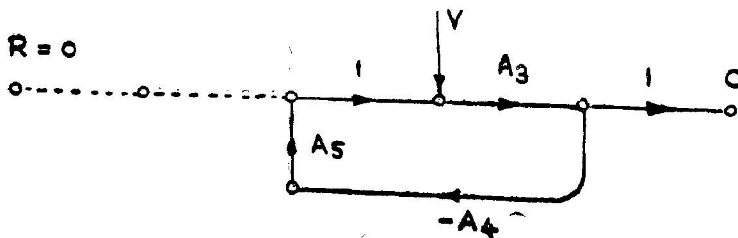
படம் 4.120 அறிகுறி பாய்படம்

$$\frac{C}{R} = \frac{T_1\Delta_1+T_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{A_1A_3(1-0) + A_2A_5A_3(1-0)}{1-(-A_3A_4A_5) + (0)\ldots}$$

$$= \frac{A_3(A_1+A_2A_5)}{1+A_3A_4A_5}$$

(ஆ) ஊட்டம் V என்க: $R = 0$



படம் 4.121

$$\frac{C}{V} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$= \frac{A_3(1-0)}{1-(-A_3A_4A_5)+0\ldots}$$

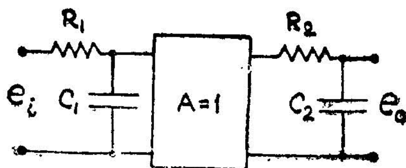
$$= \frac{A_3}{1+A_3A_4A_5}$$

(இ) R, V இரண்டும் ஊட்டங்களாக வருகையில்,

$$C = \frac{A_3(A_1+A_2A_5)}{1+A_3A_4A_5}R + \frac{A_3}{1+A_3A_4A_6}V$$

பயிற்சி-4

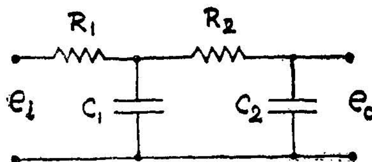
4.1 படத்திற் காட்டியுள்ள மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பைக் காண்க.



படம் 4 122

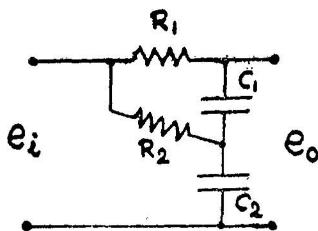
மாதிரி வினா 4·5 இல் உள்ள மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பு எந்த நிலையில் (under what circumstances) இங்கு உள்ள வலையின் செலுத்துச் சார்போடு ஒன்றும் ?

4.2 கீழ்க் காணும் மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பைப் பின் வரும் நிலைகளிற் காண்க : இரண்டாவது *RC* பகுதி முதல் *RC* பகுதிக்கு அளிக்கும் மறிப்பு (impedence) (அ) வரம்பற்றது (infinite) (ஆ) வரம்புடையது (finite),

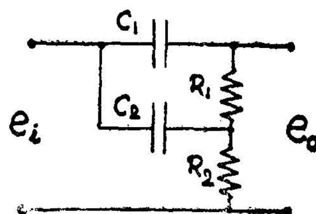


படம் 4.123

4.3 படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ள மின் வலைகளின் செலுத்துச் சார்புகளைக் காண்க.

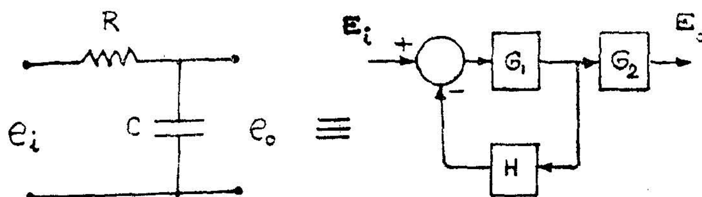


படம் 4.124 (அ)



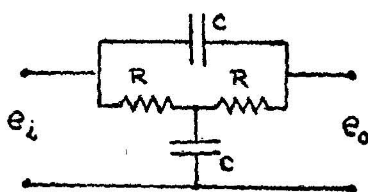
படம் 4.124 (ஆ)

4.4 கீழே உள்ள படத்தில் G_1, G_2 H இவற்றின் மதிப்புக்களை காண்க : $H \neq 1$, $G_1 \neq 1$.

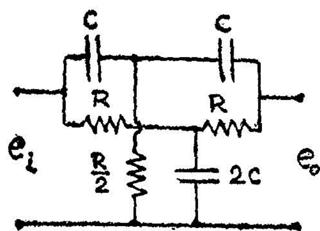


படம் 4.125

4.5 செலுத்துச் சார்பு காண்க: $R=10^6$ ஓம், $C=10^{-6}$ ஃபாரடு.

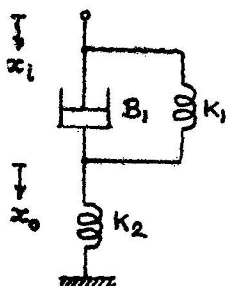


படம் 4.126 (அ)

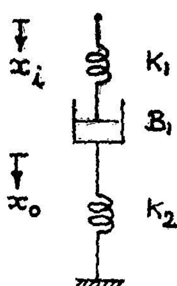


படம் 4.126 (ஆ)

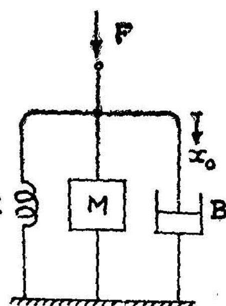
4.6 பின்வரும் இயந்திர வலைகளின் செலுத்துச் சார்புகளை வருவிக்க!



படம் 4.127 (அ)



படம் 4.127 (ஆ)



படம் 4.127 (இ)

4.7 செலுத்துச் சார்பு காண்க:

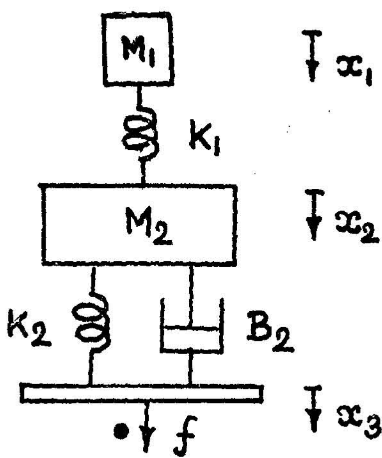
M_1 = 1000 கிலோ கிராம்

M_2 = 400 கிலோ கிராம்

K_1 = 80;000 நியூட்டன்/மீட்டர்

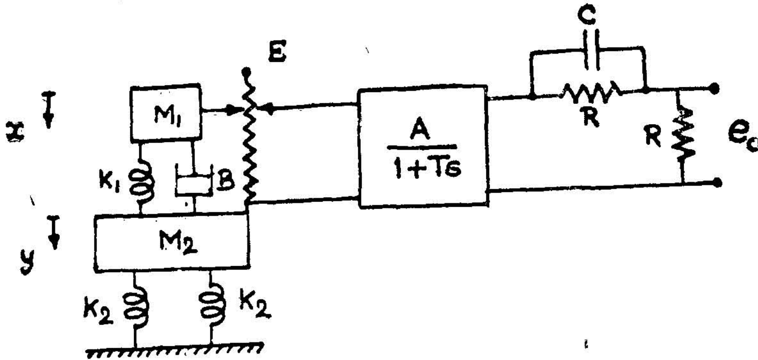
K_2 = 56,000 நியூட்டன்/மீட்டர்

B_2 = 4,000 நியூட்டன்-நொடி/மீட்டர்



படம் 4.128

4.8 படத்திற் காணும் இயந்திர மின் இயற்குலை உயர்வு அலை எண் அதிர்வுகளைக் கணிக்க உதவுகிறது. இதில் உள்ள மின் பிரித்தி M_1, M_2 இவற்றின் இடப் பெயற்சி வேறுபாட்டை (difference in displacement) அளக்கிறது. மின் பிரித்தியின் நழுவு குமிழ் (jockey) அதிக அளவாக 'd' மீட்டர் நகரலாம் எனில், Eo/Y-ன் மதிப்பு என்ன?

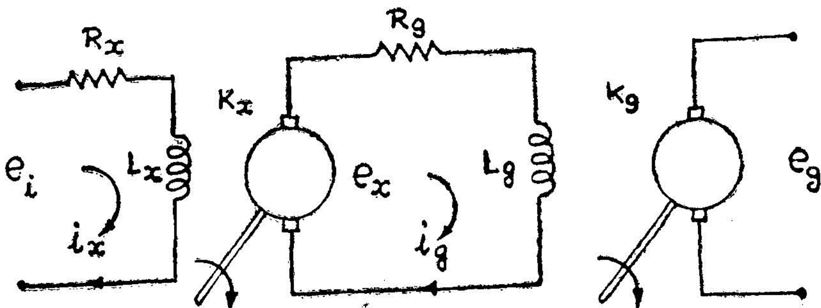


படம் 4.129

4.9 கீழே காணும் நேர் மின் ஆக்கித் தொடரின் செலுத்துச் சார்பைக் காண்க. இக் குலையின் பெட்டிப் படத்தை வரைந்து மாறிகளைக் குறிக்க.

$R_x =$ 1000 ஓம் $L_x =$ 5 ஹென்ரி $K_x =$ 2000 ஓல்ட்டு /ஆம்பியர்

$R_g =$ 10 ஓம் $L_g =$ 2 ஹென்ரி $K_g =$ 50 ஓல்ட்டு/ ஆம்பியர்

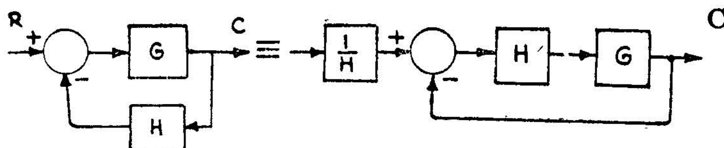


படம் 4.130

4·10 ஒரு மின்னக மின்னேட்டக் கட்டுப்பாட்டு அடிமை இயக்கியில், மின்னகத் தடை $R_a = 0.5$ ஓம், மொத்த நிலைமத் திருப்பு விசை $J = 0{\cdot}5 \times 10^{-4}$ கிலோகிராம்-மீட்டர்², உராய் தடைக் கெழு $B = 5 \times 10^{-4}$ நியூட்டன்-மீட்டர் நொடி/ரேடியன், திருப்பு விசை மாறிலி $K_t = 1.5 \times 10^{-4}$ நியூட்டன் மீட்டர்/ஆம்பியர், பின் மின்னழுத்த மாறிலி $K_b = 0{\cdot}05$ ஓல்ட்டு-நொடி/ரேடியன் எனில் (அ) சுழல் வேகம் ω, ஊட்ட மின் அழுத்தம் v_i இவற்றிற்கு இடையே உள்ள செலுத்துச் சார்பை வருவிக்க.

(ஆ) $v_i = 1$ ஓல்ட்டு என்னும் மாறா ஊட்டத்திற்கு உரிய சுழல் வேகம் ω என்ன?

4·11 நிறுவுக :



படம் 4.131

4.12 ஒரு மின் இயக்கி வேகக் கட்டுப்பாட்டுக் குலை படத்தில் காட்டப் பட்டுள்ளது. இதில்

K_g = 100 ஓல்ட்டு/ஆம்பியர் K_a = 40 ஓல்ட்டு/ஓல்ட்டு

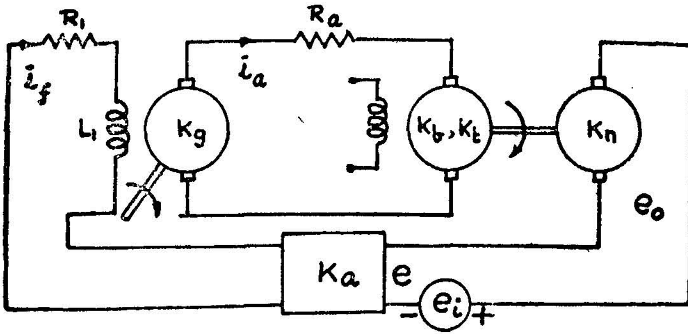
K_b = 1 ஓல்ட்டு-நொடி/ரேடியன் R_a = 1 ஓம்

K_t = 1 நியூட்டன் மீட்டர்/ஆம்பியர் R_f = 200

K_n = 20 ஓல்ட்டு-நொடி/ரேடியன் L_f = 20 ஹென்ரி

J = 5 கிலோகிராம்-மீட்டர்²

இக் குலையின் பெட்டிப் படத்தை வரைந்து, பெட்டிகளுள் செலுத்துச் சார்புகளைக் குறிக்க. குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு Ω/ϵ, நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு Ω/E_i ஆகியவற்றை வருவிக்க.



படம் 4.132

4.13 படத்தில் உள்ள ஆள்குவையின் முழுச் செலுத்துச் சார்பைப் பின் வரும் விவரங்களின் உதவியால் எழுதுக.

$R_f =$ 100 ஓம்

$L_f =$ 0

$R_g =$ 5 ஓம்

$R_m =$ 5 ஓம்

$K_g =$ 100 ஓல்ட்டு/ஆம்பியர்

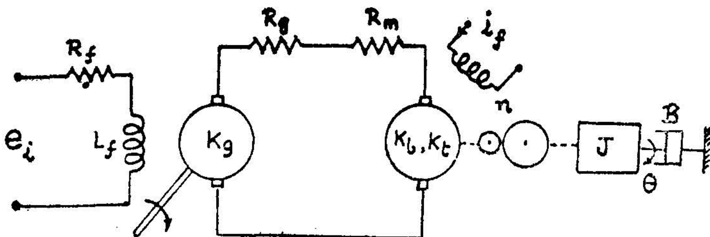
$K_b =$ 100 ஓல்ட்டு-நொடி/ரேடியன்

$K_t =$ 10 நியூட்டன் மீட்டர்/ஆம்பியர்

$n =$ 1/2

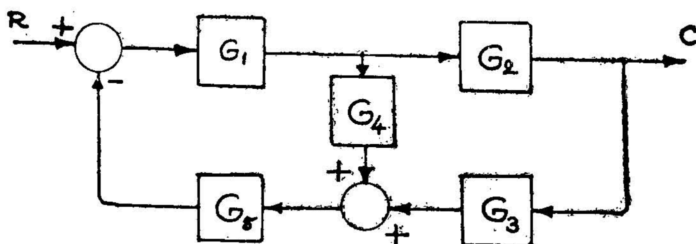
$J =$ 200 கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}

$B =$ 100 நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்



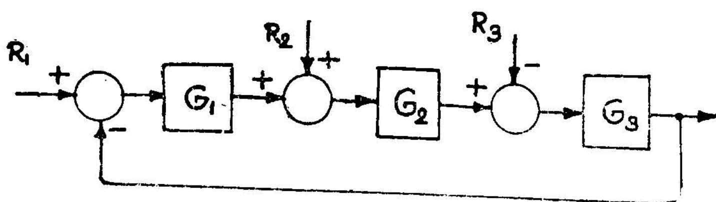
படம் 4.133

4.14 செலுத்துச் சார்பு $\frac{C}{R}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.



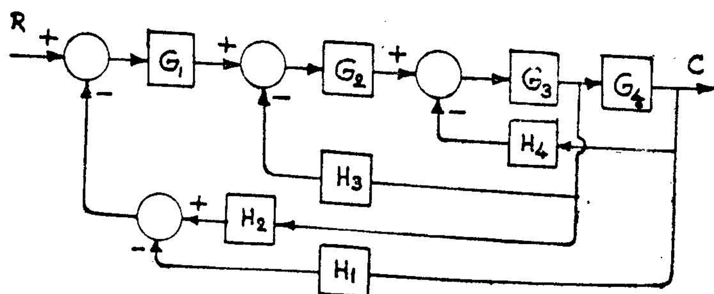
படம் 4·134

4.15 படத்திற் காணும் பல் ஊட்டக் குலையில் மேல்வைப்பு முறையில் (method of superposition) ஈட்டம் C யின் மதிப்பைக் கணிக்க !



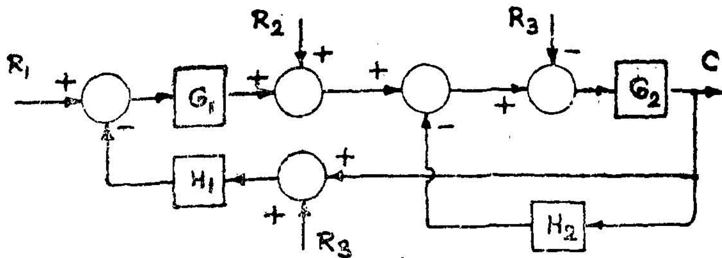
படம் 4·135

4,16 பெட்டிப் பட ஒடுக்கு முறையில் $\frac{C}{R}$ இன் மதிப்பைக் காண்க !



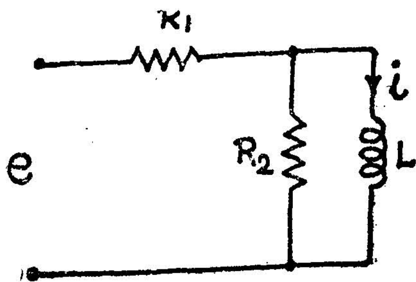
படம் 4.136

4.17 படத்திற் காணும் பல் ஊட்டக் குவையில் C யின் மதிப்பைக் காண்க :

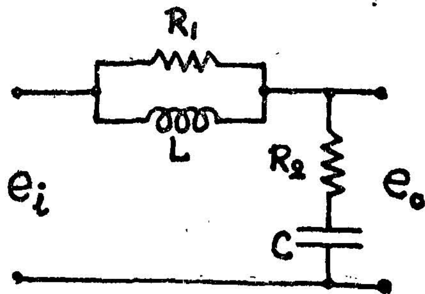


படம் 4.137

4.18 கீழ்க் காணும் மின் வலைகளின் அறிகுறி பாய் படங்களை வரைந்து செலுத்துச் சார்புகளை எழுதுக :

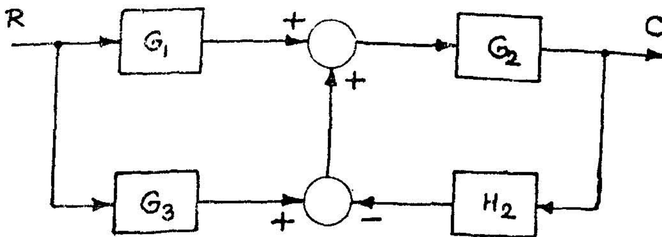


படம் 4.138



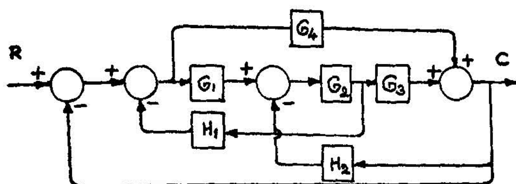
படம் 4.139

4.19 அறிகுறி பாய் பட முறையில் சுருக்குக :



படம் 4.140

4.20 படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ள குவையின் அறிகுறி பாய் படத்தை வரைந்து மேசன் விதியைக் கொண்டு முழுச் செலுத்துச் சார்பைக் காண்க !



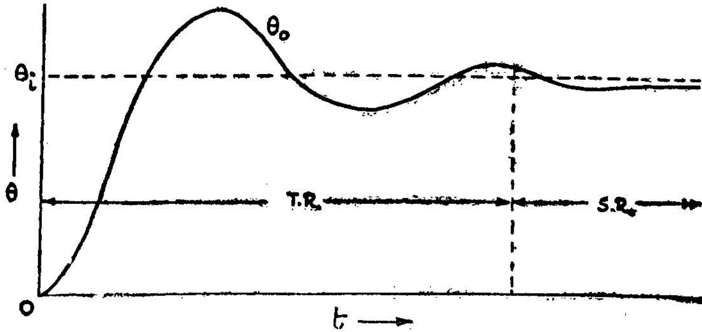
படம் 1.141

5. கால விளைவு
(Time Response)

5.1 இடை விளைவு (Transient Response) ;

5.1.1 அறிமுகம் :

ஒரு பீரங்கித் திருப்பக் கட்டுப் பாட்டுக் குவையை எடுத்துக் கொள்வோம். மாற்றார் விமானம் ஒன்றைப் பார்வையில் பற்றத் தொலை நோக்கித் தண்டைத் திடீரெனத் திருப்புகிறோம். பீரங்கி மேடையும் தொலை நோக்கியின் அளவே திரும்ப வேண்டும். ஆனால் இது உடனே நிகழ்வது இல்லை.



படம் 5.1 திருப்பக் கட்டுப்பாட்டுக் கால விளைவு

T. R. இடை நிலை விளைவு

S. R. கடை நிலை விளைவு

பீரங்கி மேடையின் நிலைம, உராய்வுத் தடைகளால் (inertial and frictional resistances). அது சிறிது காலம் தாழ்ந்தே திரும்பு

கிறது. தேவையான அளவு திரும்பியதும் கட்டளை அறிகுறி (command signal) மறைந்து போகிறது. இருப்பினும், உந்தத்தால் (momentum) பீரங்கி மேடை சிறிது அதிகமாகவே திரும்பி விடலாம்.

பின்னூட்டுப் பாதையால் இவ் வழு கணிக்கப்பட்டு, இதற்கு ஏற்பத் திருத்தல் அறிகுறி ஒன்று மேடையை எதிர்ப் புறமாகத் திருப்புகிறது. ஒரு சில அலைவுகள் இவ்வாறு நிகழ்ந்த பின் பீரங்கி மேடையின் திருப்பம் முழுநிலை அடையலாம். இத்தகைய பதில் விளைவைப் படம் 5.1 காட்டுகிறது.

ஆள்குவைகளில் உராய்வு மிக அதிகம் இருந்தால் அலைவுகளே இராது. உராய்வு மிகக் குறைவாக இருந்தால் அலைவுகள் எளிதில் நிற்கமாட்டா. படத்திற் காணும் விளைவின் உராய்வு மிதமாக உள்ளது. (படம் 5.1)

காலத்தைப் பொறுத்துள்ள ஒரு கட்டளை அறிகுறியால் ஆள் குவையில் தோன்றும் விளைவைக் கால அடிப்படையில் கணித்தலைக் ' கால விளைவு' (time response) என்கிறோம்.

இதில் இடைநிலை விளைவு (transient response) கடை நிலை விளைவு (steady state response) என்று இரு பகுதிகள் உள்ளன.

வரையறைகள் :

(1) கால விளைவு என்பது, காலத்தைப் பொறுத்துள்ள கட்டளைப் படி அறிகுறியால் தோன்றும் விளைவைக் காலத்தின் சார்பாகத் தருதல் ஆகும்.

(2) இடைநிலை விளைவு என்பது கடைநிலையிற் படிவதன் முன் உள்ள நிலையற்ற விளைவாகும். இதில் அலைவுகள் இருக்கலாம். இல்லாதும் போகலாம்.

(3) கடை நிலை விளைவு என்பது இடைநிலைக்குப் பின் கடை நிலையில் படியும் விளைவு ஆகும்.

கால விளைவை வரைபடம் இன்றி ஒரு கணிதச் சமன்பாட்டாலும் குறிக்கலாம். அடுத்து வரும் பகுதிகளில் கால விளைவின் கணிதச் சமன்பாடு, அதன் உச்ச அளவு, உச்ச விலக்கம், அதை அடைய ஆகும் நேரம் அனைய பிறவற்றைப் பற்றிய விவரங்களைக் காணலாம்.

5.1.2 ஆள்குவை வகைக்கெழுச் சமன்பாடும், தீர்வும் (System differential equation and its solution)

ஒரு திருப்பக் கட்டுப்பாட்டுக் குவையில், மின் இயக்கி தோற்றுவிக்கும் சுழற்திறன் T, ஊட்ட ஈட்டத் தண்டுகளின் திருப்ப வேறுபாட்டிற்கு $(\theta_i - \theta_o)$ நேர்ப் பொருத்தம் உடையது என்க.

$$T \propto (\theta_i - \theta_o)$$

இதை $T = K(\theta_i - \theta_o)$ என எழுதலாம் ... (1)

இச் சுழற்திறன், சுழலும் பகுதிகளின் நிலைமத் தடையையும், உராய்வுத் தடையையும் வென்று தண்டைச் சுழற்ற வேண்டும்.

எனவே,

$$T = J \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + B \frac{d\theta_0}{dt} \quad \text{... (2)}$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) இவற்றில் இருந்து,

$$J \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + B \frac{d\theta_0}{dt} = K(\theta_i - \theta_0)$$

$$J \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + B \frac{d\theta_0}{dt} + K\theta_0 = K\theta_i$$

அல்லது
$$\boxed{\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + \frac{B}{J}\frac{d\theta_0}{dt} + \frac{K}{J}\theta_o = \frac{K}{J}\theta_i} \quad \text{...5.1}$$

என்ற ஆள்குவை வகைக் கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

θ_i என்ற ஒரு படிப்பெயர்ச்சி ஊட்டத்தைக் (step displacement input) கொண்டு இவ் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தால் (solve) கிடைப்பதே கால விளைவுச் சமன்பாடு ஆகும்.

ஆள்குவை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை இலாப்லாசு மாற்றத்திற்கு உட்படுத்தி, தொடக்க நிலை சுழி எனக் கொண்டால் கிடைப்பது,

$$s^2\,\Theta_0 + \frac{B}{J}\,s\,\Theta_0 + \frac{K}{J}\,\Theta_0 = \frac{K}{J}\,\Theta_i$$

இதில் இருந்து செலுத்துச் சார்பை எழுதலாம்.

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_i} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$

இதில் இருந்து கிடைக்கும்

$$\Theta_0 = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}\Theta_i$$

என்ற சமன்பாட்டின் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் கால விளைவைத் தருகிறது.

$s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}$ என்ற கோவையின் காரணிகளே (factors of the expression) பதில் விளைவின் சிறப்பு இயல்புகளைத் தீர்மானிக்கின்றன. எனவே இது சிறப்பியற் கோவை (characteristic expression) எனப்படுகிறது.

$$\boxed{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J} = 0} \qquad \dots \quad 5.2$$

என்பது குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு (characteristic equation) ஆகும்.

இனிச் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வை அல்லது ஆள்குலையின் விளைவை எவ்வாறு மாற்றுகின்றன என்று பார்ப்போம்.

இருபடி, நேர்உறவு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலை ஒன்றின் சிறப்பியற் சமன்பாடு வருமாறு :

$$s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J} = 0$$

இதன் மூலங்கள், $s = -\frac{B}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}$

ஓர் ஆள்குவையில் நிலைமச் சுழற் திறனும் (*J*), இயக்கியின் பெருக்க எண்ணும் (*K*) அப்படியே இருக்க, உராய்வுத் தடை (*B*) மட்டும் மாற்றப் படுவதாகக் கொள்க.

படி 1 : உராய்வுத் தடையே இல்லை ; $B = O$ என்க :

$s = \pm j\sqrt{\frac{K}{J}}$; மூலங்கள் கற்பனை எண்கள் ஆகின்றன.

இவை தீர்வில் $\sin\sqrt{\frac{K}{J}}\,t$, $\cos\sqrt{\frac{K}{J}}\,t$ என்ற உறுப்புக்களைத் தரும். எனவே கால விளைவில், அளவிற் குறையாது தொடரும் அலைவுகளே இருக்கும். அலைவு எண்ணின் மதிப்பு $\sqrt{\frac{K}{J}}$. பதில் விளைவு இயற்கையான தொடர் அலைவுகளாக இருக்கும்.

படி 2 : உராய்வுத் தடை மிகக் குறைவு : $\left(\frac{B}{2J}\right)^2 < \frac{K}{J}$

மூலங்கள் $s = -\frac{B}{2J} \pm j\sqrt{\frac{K}{J} - \left(\frac{B}{2J}\right)^2}$. இவை சிக்கல் எண்கள். இவை தீர்வில் $e^{\frac{-B}{2J}t}$, $\sin\sqrt{\frac{K}{J}}\,t$ $\cos\sqrt{\frac{K}{J}}\,t$ என்ற அடுக்கு, நெடுக்கை, கிடக்கைச் சார்புகளைத் (exponential sine and cosine functions) தரும். எனவே, பதில் விளைவு தேயும் அலைவுகளாக (decaying oscillations) இருக்கும். [நடைமுறை ஆள்குவைகளில் அடுக்குக் குறிகள் எதிர் எண்களாக (negative numbers) இருப்பதால், தேயும் அலைவுகள் கிடைக்கின்றன. நேர் எண்கள் (positive numbers) வளரும் அலைவுகளைத் தருகின்றன.]

படி 3 : உராய்வுத் தடை மத்திமம் $\left(\frac{B}{2J}\right)^2 = \frac{K}{J}$

மூலங்கள் : $s = -\frac{B}{2J}$, இருமுறை. இவை சமமெய் எண்கள். தீர்வில் நெடுர்க்கை, கிடக்கை உறுப்புக்களே (sine, cosine terms) இல்லை. எனவே அலைவுகள் இல்லை. இருப்பினும் *B* யில் சிறிதளவு மாற்றமும் அலைவுகளை விளைவிக்கும். எனவே, பதில் விளைவு அலைவுகள் இல்லா விளிம்பு நிலையில் (just non-oscillatory) இருக்கும்

படி 4: உராய்வுத் தடைமிக அதிகம் : $\left(\frac{B}{2J}\right)^2 > \frac{K}{J}$

மூலங்கள் : $s = -\frac{B}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}$; இவை சமம் இல்லா மெய் எண்கள். தீர்வில் அடுக்குக் குறி உறுப்புக்களே இருக்கும். எனவே, பதில் விளைவில் அலைவுகளே இருக்காது (non-oscillatory)

5.1.3 தடையூட்ட விகிதம், இயற்கை அலைவெண், சீர் உருவம்: (Damping ratio, natural frequency, normalised form)

எந்த அளவு தடையூட்டம் ஆள்குலையின் பதில் விளைவை அலைவு அற்ற விளிம்பு நிலையில் வைக்கிறதோ, அது விளிம்பு நிலைத் தடையூட்டம் (critical damping) எனப்படும்.

அப்பொழுது $\left(\frac{B_c}{2J}\right)^2 = \frac{K}{J}$; எனவே $B_c = 2\sqrt{KJ}$

∴ விளிம்பு நிலைத் தடையூட்டம் $\boxed{B_c = 2\sqrt{KJ}}$ ... 5.3

தடையூட்டு விகிதம் (damping ratio) என்பது ஓர் ஆள் குலையில் உள்ள தடையூட்டத்திற்கும், விளிம்பு நிலைத் தடையூட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும்.

தடையூட்டு விகிதம் (Damping ratio) :

$$\boxed{J = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}} \quad \ldots 5.4$$

ஆள் குலையில் உராய்வுத் தடையே இல்லாது போனால், அது இயல்பாகத் தடை இன்றி அலையும் பதில் விளைவைத் தருகிறது. இவ் இயற்கையான அலைவின் அலைவெண் $\sqrt{\frac{K}{J}}$ ஆகும்.

எனவே இயற்கை அலைவெண் (Natural frequency)

$$\boxed{w_n = \sqrt{\frac{K}{J}}} \quad \ldots 5.5$$

எந்த ஒரு இருபடி நேர் உறவு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவையின் செயலையும், அதன் தடையூட்டு விகிதம், இயற்கை அலைவெண் ஆகிய இரு துணை அலகுகளைக் (parameters) கொண்டு மதிப்பிட்டு விடலாம்.

$$\frac{K}{J} = w_n^2$$

$$\frac{B}{J} = \frac{\delta B_c}{J} = \frac{\delta\, 2\sqrt{KJ}}{J} = 2\delta\sqrt{\frac{K}{J}} = 2\delta w_n$$

எனவே, பொதுவாக ஊட்டம் r, ஈட்டம் c இவற்றை உடைய இருபடி நேர் உறவு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவையை எடுத்துக் கொண்டால்,

1. வகைக்கெழுச் சமன்பாடு :

$$\boxed{\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} + w_n^2 c = w_n^2 r} \quad \ldots\ 5.6$$

2. சிறப்பியற் சமன்பாடு:

$$\boxed{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2 = 0} \quad \ldots\ 5.7$$

3. நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு :

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2}} \quad \ldots\ 5.8$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s}}{1 + \dfrac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s}} \equiv \frac{\dfrac{C}{E}}{1 + \dfrac{C}{E}}$$

எனவே,

4. குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு :

$$\boxed{\frac{C}{E} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s}} \quad \ldots\ 5.9$$

பதில் விளைவின் வகைகள் :

1. $\delta = 0$ தடையிலா (இயற்கை அலைவு)ப் பதில் விளைவு
2. $\delta < 1$ குறைத் தடையூட்டு (அலைவு)ப் பதில் விளைவு
3. $\delta = 1$ விளிம்பு நிலைத் தடையூட்டுப் பதில் விளைவு
4. $\delta > 1$ மிகைத் தடையூட்டுப் பதில் விளைவு

சமன்பாடுகள் 8.6 முதல் 8.9 வரை, இருபடி நேர் உறவு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, சிறப்பியல் சமன்பாடு, செலுத்துச் சார்புகள் இவற்றின் சீர் உருவங்களைத் தருகின்றன.

மாதிரி வினா 5.1

ஓர் எளிய அடிமைக் குவையில் $J = 10$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}, தடையூட்டம் $B = 100$ நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன், இயக்கியின் விகித சம மாறிலி $K = 1000$ நியூட்டன் மீட்டர்/ரேடியன் வழு.

இவ் ஆள்குவையின் விளைவு எவ் வகையினது ? தடையூட்டத்தை எங்ஙனம் மாற்றினால், விளிம்பு நிலைத் தடையூட்ட விளைவைப் பெறல் இயலும்?

தீர்வு :

$$B_c = 2\sqrt{KJ}$$

$$= 2\sqrt{1000 \times 10}$$

$= 200$ நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்

$$\delta = \frac{B}{B_c}$$

$$= \frac{100}{200} = 0{\cdot}5$$

$\delta < 1$. எனவே விளைவு தேயும் அலைவுகளை உடையதாக இருக்கும்.

குவையின் தடையூட்டம் $B = 100$. இதை 2 மடங்காக ஆக்கினால், $B = 200 = B_c$; $\delta = 1$; விளிம்பு நிலைத் தடையூட்ட விளைவு கிடைக்கும்.

மாதிரி வினா 5.2

ஒருமைப் படி அறிகுறியால் (unit step signal), இருபடி நேர் உறவு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை ஒன்றில் தோன்றும் பதில் விளைவு வருமாறு:

$$c(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

இப்பதில் விளைவு எவ் வகையினது? பதில்விளைவில் அலைவுகள் தோன்ற என்ன செய்ய வேண்டும்? ஆள்குவையின் குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு என்ன ?

தீர்வு :

$$(அ)\quad c(t) = 1 - \frac{4}{8}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \quad \cdots (1)$$

இதில் நெடுக்கை கிடக்கைச் சார்புகளே இல்லை. அதாவது விளைவு அலைவற்றது. $\delta > 1$. எனவே, இது மிகைத் தடையூட்ட வகையினது.

(ஆ) சமன்பாடு (1) இன் இலாப்லாசு மாற்றம் :

$$c = \frac{1}{s} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

$$= \frac{3(s+1)(s+4) - 4(s+4)s + (s+1)s}{3s(s+1)(s+4)}$$

அதாவது,

$$c = \frac{3s^2+15s+12-4s^2-16s+s^2+s}{3s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{4}{s(s+1)(s+4)}$$

$$r = 1$$

$$R = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \quad \frac{C}{R} = \frac{4}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{s^2+5s+4}$$

எனவே $G = \frac{C}{E} = \frac{4}{s^2+5s}$

இதுவே குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு ஆகும்.

(இ) $G = \frac{w_n^2}{s^2+2\delta w_n s} \equiv \frac{4}{s^2+5s}$

எனவே $w_n^2=4$ அல்லது $w_n=2$

$$2\delta w_n = 5 \quad \therefore \delta = \frac{5}{2\times 2} = 1.25$$

அலை விளைவு தேவையானால் $\delta<1$. எனவே தடையூட்டத்தை $\frac{1}{1.25}$ க்குக் குறைந்த ஓர் எண்ணால் பெருக்க, $\delta<1$ ஆவதால் அலைவுகள் தோன்றுகின்றன.

மாதிரி வினா 5.3

ஓர் ஆள்குலை $\ddot{\theta}_0+6\dot{\theta}_0=36\,e$ என்ற சமன்பாட்டால் விளக்கப் படுகிறது. ஒரு படிப் பெயர்ச்சி இடர் ஊட்டத்தால் குலையில் தோன்றும் இடைநிலை அலைவுகளின் இயற்கை அலைவெண், தடையூட்ட விகிதம், தடையூட்ட அலைவெண் இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\ddot{\theta}_0+2\delta w_n\,\dot{\theta}_0 + w_n^2\theta_0 = w_n^2\theta_i$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$\ddot{\theta}_0+2\,\delta w_n\,\dot{\theta}_0=w_n^2\,(\theta_i-\theta_0)$$
$$= w_n^2\,e$$

என்று எழுதலாம். இதை

$$\ddot{\theta}_0+6\dot{\theta}_0 = 36\,e$$

என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

$$2\,\delta w_n = 6$$
$$w_n^2 = 36$$

எனவே, $w_n = 6$

$$\therefore \delta = \frac{6}{2 \times 6} = 0.5.$$

$$w_d = w_n \sqrt{1-\delta^2}$$
$$= 6 \sqrt{1-0.5^2}$$
$$= 5.2.$$

அதாவது,

இயற்கை அலைவெண் w_n = 6 ரேடியன்/நொடி

தடையூட்ட விகிதம் $\delta = 0.5$

தடையூட்ட அலைவெண் w_d = 5.2 ரேடியன்/நொடி.

5.1.4 கால விளைவை வருவித்தல் (Derivation of Time Response)

தற்புனைவுகள் :

1. ஆள்குவை இருபடி நேர் உறவு முழுப் பின்னூட்டு வகையினது.
2. அது தொடக்கத்தில் அசையா நிலையில் உள்ளது.
3. தடையூட்ட விகிதம் $\delta < 1$
4. ஊட்டம் படிப் பெயர்ச்சி வகையினது.

ஆள்குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\,\delta w_n \frac{dc}{dt} + w_n^2\, c = w_n^2\, r$$

என்க.

இதில் c : கட்டுப்பாட்டு ஈட்டம்

r : ஆதாய ஊட்டம்

δ : தடையூட்ட விகிதம்

w_n : இயற்கை அலைவெண்

தொடக்க நிலை சுழியாகக் கொண்டு இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$s_2 c + 2\,\delta w_n s c + w_n^2 c = w_n^2\, R$$

என்னும் மாறிய சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இதில் இருந்து, $C = \frac{w_n^2}{s^2+2\,\delta w_n s+w_n^2}\quad R$

$r = r_0$ என்க.

$$R = \frac{r_o}{s}$$

$$\therefore\quad C = \frac{w_n^2\, r_o}{s\,(s^2+2\,\delta w_n\, s+w_n^2)}$$

$\delta<1$ என்க.

$$c = r_0\left[\frac{s^2+2\delta w_n s+w_n^2-(s^2+2\delta w_n s)}{s\,(s^2+2\delta w_n s+w_n^2)}\right]$$

$$= r_0\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\,\delta w_n}{s+2\,\delta w_n\, s+w_n^2}\right]$$

$$= r_0\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\delta w_n}{s^2+2\,\delta w_n\, s+w_n^2}+\frac{\delta w_n}{s^2+2\delta w_n s+w_n^2}\right]$$

$$= r_0\left[\frac{1}{s}-\left\{\frac{s+\delta w_n}{(s+\delta w_n)^2+w_n^2(1-\delta^2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\delta w_n}{\sqrt{w_n^2(-\delta^2)}}\cdot\frac{\sqrt{w_n^2\ (1-\delta^2)}}{(s+\delta w_n)^2+w_n^2(1-\delta^2)}\right\}\right]$$

எனவே, எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண

$$c = r_0\left[1-\left\{e^{-\delta w_n t}\cos w_n\sqrt{1-\delta^2 t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\,e^{-\delta w_n t}\sin wn\sqrt{1-\delta^2 t}\right\}\right]$$

$$= r_0\left[1-\frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta_2}}\left(\sqrt{1-\delta^2}\cos w_n\sqrt{1-\delta^2 t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\delta\sin w_n\sqrt{1-\delta^2 t}\right)\right]$$

$$= r_0\left[1-\frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left(w_n\sqrt{1-\delta^2}t+\cos^{-1}\delta\right)\right]$$

$w_d = w_n \sqrt{1-\delta^2}$ (தடையூட்ட அலைவெண்)

$\phi = \cos^{-1}\delta$ என்க.

அப்பொழுது,

$$C = r_0 \left[1 - \frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin (w_d t + \phi) \right] \quad \ldots\ 5.10$$

இதுவே கால விளைவுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$\delta = 1$ என்க :

$$C = \frac{w_n^2 r_0}{s(s^2+2w_n s+w_n^2)}$$

$$= r_0 \left[\frac{s^2+2w_n s+w_n^2-(s^2+2w_n s)}{s(s^2+2w_n s+w_n^2)} \right]$$

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+2w_n}{s^2+2w_n s+w_n^2} \right]$$

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+w_n+w_n}{(s+w_n)^2} \right]$$

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \left\{ \frac{1}{(s+w_n)} + \frac{w_n}{(s+w_n)^2} \right\} \right]$$

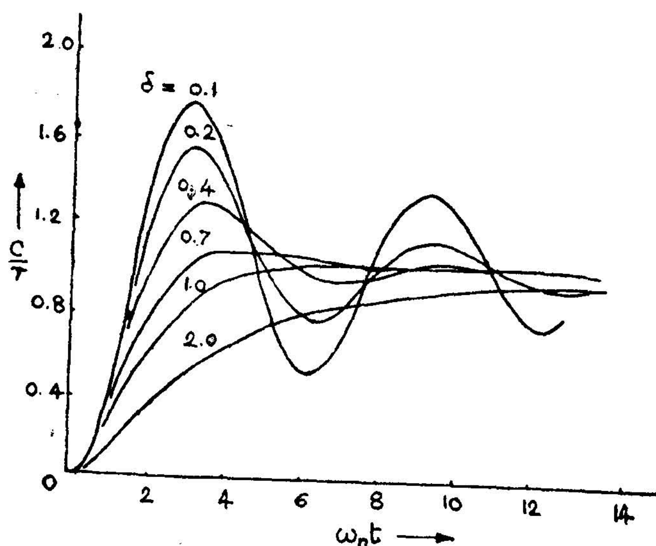
எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$C = r_8 \ [1-e^{-w_n t} (1+w_n t)] \quad \ldots\ 5.11$$

$\delta > 1$ என்க :

$$C = \frac{w_n^2 r_0}{s\,(s^2+2\delta w_n s+w_n^2)}$$

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\delta w_n}{s^2+2\delta w_n s+w_n^2} \right]$$



படம் 5.2 கால விளைவு

δ : தடையூட்ட விகிதம்

$\frac{c}{r}$: ஈட்ட - ஊட்ட விகிதம்

w_n : இயற்கை அலைவு எண்

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+\delta w_n+\delta w_n}{(s+\delta w_n)^2 - w_n^2(\delta^2-1)} \right]$$

$$= r_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+\delta w_n}{(s+\delta w_n)^2 + w_n^2(\delta^2-1)} + \frac{\delta w_n}{w_n\sqrt{\delta^2-1}} \cdot \frac{w_n\sqrt{\delta^2-1}}{(s+\delta w_n)^2+w_n^2(\delta^2-1)} \right]$$

எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$C = r_0 \left[1 - \frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{\delta^2-1}} \left(\sqrt{\delta^2-1} \cosh w_n\sqrt{\delta^2-1}\,t + \delta \sinh w_n\sqrt{\delta^2-1}\,t \right) \right] \quad \ldots \quad 5.12$$

குறிப்பு 1

1. மேற் பகுதியில் படிப்பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய பதில் விளைவைக் கண்டோம்.

இதே முறையில் அதிர்ச்சி ஊட்டம், நேர் வளர் ஊட்டம் (impulse input, ramp input) ஆகியவற்றிற்கும் பதில் விளைவு காணலாம்.

2. மேலும், படிப்பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய பதில் விளைவின் வகையீடு (differentiation) அதிர்ச்சிப் பதில் விளைவையும் தொகையீடு (integration) ஏற்றப் பதில் விளைவையும் தரும்.

$r = u(t)$ எனில் ஈட்டம் c என்க.

$r = \delta(t)$ எனில் ஈட்டம் $\frac{dc}{dt}$,

$r = tu(t)$ எனில் ஈட்டம் $\int c\,dt$ ஆகும்.

3. இரண்டுக்கு மேற்பட்ட படிகளை உடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளால் விளக்கப்படும் ஆள்குவைகளுக்கும் மேற்கண்ட முறையிலேயே C ஐ எழுதி, அதன் இலாப்லாசு மாற்றம் கண்டு, பதில் விளைவை அறிபலாம்.

5.1.5 உச்ச விலக்கமும் பிற செயல்முறைக் குறிப்புக்களும்; (Maximum overshoot and other performance specifications):

உண்மையான ஈட்டத்தின் உச்ச மதிப்பிற்கும் விரும்பும் ஈட்டத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடே உச்ச விலக்கம் (maximum overshoot) எனப்படும்.

$$M_0 = C_{max} - r_0 \quad \dots 5.13$$

M_0 : உச்ச விலக்கம்

C_{max} : உச்ச ஈட்டம்

r_0 : விரும்பும் ஈட்டம் (= ஆதாய ஊட்டம்)

இருபடி ஆள்குவை ஒன்றின் (second order control system) படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டக் குறைத் தடையூட்டப் பதில் விளைவு (underdamped response for a step displacement input) :

$$C = r_0 \left[1 - \frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin (w_d t + \phi)\right] \quad \text{என்க.}$$

$e^{-\delta w_n t} \sin (w_d t+\phi)$ இன் மதிப்பு மிகக் குறைவாக இருக்கும்பொழுது, C-யின் மதிப்பு மிக அதிகமாகிறது.

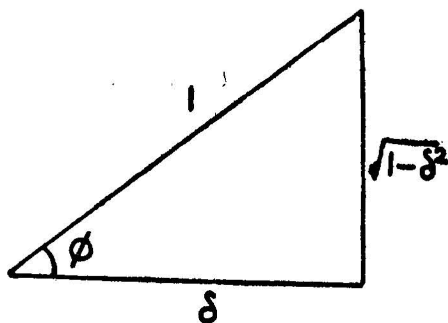
$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\delta w_n t} \sin (w_d t + \phi)\right] = 0$$

என ஆகும் பொழுது C_{max} அல்லது C_{min} கிடைக்கிறது.

அதாவது,

$$e^{-\delta w_n t}. \cos (w_d t+\phi). w_d - \delta w_n \cdot e^{-\delta w_n t} . \sin (w_d t+\phi) = 0$$

$$\frac{w_d}{\delta w_n} = \tan (w_d t + \phi)$$



படம் 5.3 δ-ϕ உறவு

அதாவது, $\frac{\sqrt{(1-\delta^2)}}{\delta} = \tan (\omega_d t + \Phi)$

அல்லது $\tan\phi = \tan (w_d t+\phi)$

எனவே $w_d t = 0, \pi, 2\pi, \ldots\ldots$

$w_d t = \pi$ ஆக இருக்கும்பொழுது $C = C_{max}$ ஆகிறது.

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{w_d}$$

இதுவே உச்ச விலக்கத்திற்கு உரிய நேரம் (t_m) ஆகும்.

$$\boxed{T_m = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}}} \qquad \ldots\ 5.14$$

இதை C-யின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$C_{max} = r_0\left[1 - \frac{e^{-\delta w_n \cdot \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin\,(\pi+\phi)\right]$$

$$= r_0\left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin\,\phi\right]$$

$$= r_0\left[1 + e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}\right] \qquad \left[\because \sin\phi = \sqrt{1-\delta^2}\right]$$

$$M_0 = C_{max} - r_0$$

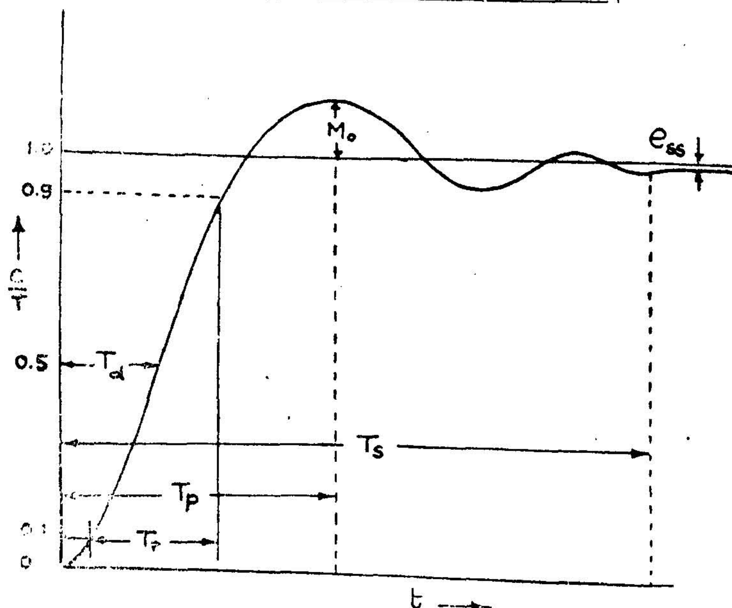
$$= r_0\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{M_0 = r_0\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}} \qquad \ldots\ 5.15$$

$$\%\ M_0 = \frac{M_0}{r_0} \times 100$$

அதாவது

$$\% M_0 = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad \ldots \quad 5{\cdot}16$$



படம் 5.4 கால விளைவு செயற் குறிப்புக்கள்

M_o : உச்ச விலக்கம்
T_m : உச்ச நேரம்
T_d : தாழ் நேரம்
T_r : உயர் நேரம்
T_s : படியும் நேரம்
e_{ss} : கடை நிலை வழு

ஆள்குவை ஆக்கத்தில் சிறப்பிடம் வகிக்கும் செயல் முறைக் குறிப்புக்களுள் ஒன்று உச்ச விலக்கம். இத்துடன் வேறு சில செயல் முறைக் குறிப்புக்களையும் கீழே காணலாம்.

1. உச்ச விலக்கம் (M_0) : ஈட்டத்தின் உச்ச அளவிற்கும் அதன் தேவையான அளவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு. இது 3 %க்கு மிகாமல் இருப்பது நன்று.

2. உச்ச நேரம் (T_m) : (Peak time) கால விளைவில் உச்ச ஈட்டத்திற்கு உரிய நேரம்.

3. *தாழ் நேரம் (T_d) :* (Delay time) கால விளைவு, இறுதி அளவில் 50%ஐ அடைய ஆகும் நேரம்.

4 *உயர் நேரம் (T_r) :* (Rise time) கால விளைவு, இறுதி அளவில் 10%இல் இருந்து 20% வரை உயர ஆகும் நேரம்.

5. *படியும் நேரம் (T_s) :* (Settling time) கால விளைவு, இறுதி அளவில் $\pm 2\%$ வேறுபாட்டிற்குள் தங்க ஆகும் குறைந்த அளவு நேரம்.

6. *கடைநிலை வழு (e_{ss}) :* (Steady-state error) கால விளைவு, அலைவுகளை அடுத்துக் கடை நிலையிற் படிந்த பின், விரும்பும் விளைவிற்கும், உண்மையான விளைவிற்கும் உள்ள வேறுபாடு.

குறிப்பு : நேர மாறிலி (Time constant) $\boxed{T = \dfrac{1}{\delta w_n}}$ ... 5.17

δw_n : தடையூட்டுக் கெழு (damping factor)

படியும் நேரத்திற்கும் நேர மாறிலிக்கும் உள்ள தொடர்பு 2% வேறுபாடு :

$$1 - e^{-\delta w_n T_s} = 0.02$$

$$e^{-\delta w_n T_s} = 0.98 = e^{-3.9}$$

எனவே, $\delta w_n T_s = 3.9$

அல்லது $T_s = \dfrac{3.9}{\delta w_n}$

$$T = \frac{1}{\delta w_n} \therefore \boxed{T_s \cong 4\ T} \qquad \dots 5.18$$

இதுபோல் 1% வேறு பாட்டிற்கு $T_n \cong 5T$

5% வேறு பாட்டிற்கு $T_s \cong 3T$

மாதிரி வினா 5.4

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையின் குறைசுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு.

$$G = \frac{K}{s(s+4)}$$

பெருக்க வெண் K, 16.3% உச்ச விலக்கம் கிடைக்குமாறு சீர் செய்யப்படுகிறது.

குலையை ஒரு படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உட்படுத்தினால், Kயின் மதிப்பு என்ன? அத்துடன் உச்ச விலக்கத்திற்கு உரிய நேரத்தையும் கணிக்க.

தீர்வு :

$$M_0 = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 16.3$$

$$e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0.163 = e^{-1.812}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1.812$$

$$\frac{\pi^2\delta^2}{1-\delta^2} = 1{\cdot}812^2$$

$$\frac{\pi^2}{1.812^2}\delta^2 = 1-\delta^2,$$

அதாவது, $3\delta^2 = 1-\delta^2$ அல்லது $4\delta^2=1$

எனவே $\delta = 0.5$

குறைசுற்று-செலுத்துச் சார்பின் பொது உருவம் :

$$G = \frac{w_n^2}{s^2+2\delta w_n s}$$

இதை $G = \dfrac{K}{s^2+4s}$ உடன் ஒப்பிட,

$$w_n^2 = K$$

$$2\delta w_n = 4$$

$$2\times 0{\cdot}5\, w_n = 4$$

ஆக, $w_n = 4. \quad \therefore \quad K = w_n^2 = 16.$

$$T_m = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{1-0.5^2}} = 0.908$$

மாதிரி வினா 5.5

இருபடிக் குலை ஒன்றில் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் $-4 \pm j\,10$ எனில், தடையூட்ட விகிதம், இயற்கை அலைவெண், தடையூட்ட அலைவெண், படியும் நேரம் இவற்றைக் கணிக்க.

ஒரு படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்தால் விளையும் உச்ச விலக்கம், அதற்கு ஆகும் நேரம் இவற்றையும் காண்க.

தீர்வு :

சிறப்பியல் சமன்பாட்டு மூலங்கள் : $-4+j10$, $-4-j10$.
அதற்கு உரிய உறுப்புக்கள் : $s+4-j10$, $s+4+j10$.

எனவே, சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$(s+4-j10)\,(s+4+j10) = 0$$

$$(s+4)^2+10^2 = 0$$

$$s^8+8s+116 = 0$$

$s^2+2\delta w_n s+w_n^2$ என்ற பொது உருவுடன் இதை ஒப்பிட,

$$2\delta w_n = 8$$

$$w_n^2 = 116$$

எனவே $w_n = \sqrt{116} = \underline{10.76.}$

$$J = \frac{8}{2\times 10.76} = \underline{0.372}$$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\delta^2}$$

$$= 10.76\sqrt{1-0{\cdot}372^2} = \underline{10}$$

$$T_s = \frac{4}{\delta w_n}$$

$$= \frac{4}{0.372\times 10{\cdot}76} = \underline{1}$$

$$M_0 = 100\,e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$= 100\,e^{-\frac{\pi\times 0.372}{\sqrt{1-0.372^2}}} = 100\,e^{-1.26} = \underline{28{\cdot}4\%}$$

$$T_m = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$= \frac{\pi}{10{\cdot}76 \times \sqrt{1-0{\cdot}372^2}} = 3.14$$

மாதிரி வினா 5.6

ஓர் அடிமைக் குலைவயில் $J = 17 \times 10^{-6}$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}, $B = 680 \times 10^{-6}$ நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்.

$K = 6.8 \times 10^{-8}$ நியூட்டன்-மீட்டர்/ரேடியன்.

குலைவயின் ஊட்டம் 3 சுழற்சி/மணித்துளி எனில், குலைவயின் வழுக் கோவையை (error expression) வருவிக்க.

தீர்வு :

குலைவயின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \frac{B}{J}\frac{d\theta_0}{dt} + \frac{K}{J}\theta_0 = \frac{K}{J}\theta_i$$

$$\frac{B}{J} = \frac{680 \times 10^{-6}}{17 \times 10^{-6}} = 40$$

$$\frac{K}{J} = \frac{6.8 \times 10^{-8}}{17 \times 10^{-6}} = 400$$

$$e = \theta_i - \theta_0$$

எனவே $\dfrac{d^2\theta_0}{dt^2} + 40\dfrac{d\theta_0}{dt} = 400(\theta_i - \theta_0)$

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} - \frac{d^2e}{dt^2} + 40\left(\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{de}{dt}\right) = 400\,e$$

$$\therefore \quad \frac{d^2e}{dt^2} + 40\frac{de}{dt} + 400\,e = \frac{d^2\theta_i}{dt^2} + 40\frac{d\theta_i}{dt}$$

முதல் நிலை சுழியாக, இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$(s^2 + 40\,s + 400)\,E = (s^2 + 40\,s)\,\Theta_i$$

$$E = \frac{s\ (s+40)}{s^2+40s+400}\ \Theta_i$$

$$\theta_i = 3t \times \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{10}\ t \text{ ரேடியன்/நொடி}$$

$$\Theta_i = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ E = \frac{s\ (s+40)}{s^2+40\ s+400} \times \frac{\pi}{10s^2}$$

$$E = \frac{\pi}{10}\ \frac{s+40}{s(s+20)^2}$$

$$= \frac{\pi}{10}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+20)^2} + \frac{C}{s+20}\right]$$

$$A = \left.\frac{s+40}{(s+20)^2}\right|_{s=0} = 0.1$$

$$B = \left.\frac{s+40}{s}\right|_{s+20=0} = -1$$

$$C = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+40}{s}\right)\right|_{s+20=0}$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\left(1+\frac{40}{s}\right)\right|_{s+20=0}$$

$$= \left.-\frac{40}{s^2}\right|_{s+20=0} = -0.1$$

$$E = \frac{\pi}{100}\left[\frac{1}{s} - \frac{10}{(s+20)^2} - \frac{1}{(s+20)}\right]$$

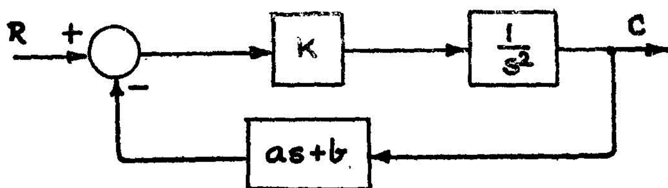
எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$e = \frac{\pi}{100}\left[1-10t\ e^{-20t} - e^{-20t}\right]$$

$$= \frac{\pi}{100}\left[1-e^{-20t}(1+10t)\right]$$

மாதிரி வினு 5.7

ஓர் எளிய ஆள்குலையின் பெட்டிப் படம் காட்டப் பட்டுள்ளது. $K=10$ எனில், 16% உச்ச விலக்கம், 0·1 நொடி கால மாறிலி இவற்றைத் தரும் வகையில் a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புக் களைக் கண்டுபிடிக்க, ஊட்டம் ஒருமைப் படிப் பெயர்ச்சி என்று கொள்க.



படம் 5.5 எளிய ஆள்குலை பெட்டிப் படம்

தீர்வு :

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{K}{s^2}}{1+\frac{K}{s^2}(as+b)} = \frac{K}{s^2+Kas+Kb}$$

சிறப்பியற் சமன்பாடு : $s^2+Kas+Kb=0$

இதை $s^2+2\delta w_n s+w_n^2=0$ என்னும் பொது உருவத்துடன் ஒப்பிடும் போது,

$2\delta w_n = K_a$

$w_n^2 = Kb$

என்று இரு உறவுகள் கிடைக்கின்றன.

கால மாறிலி $T = \dfrac{1}{\delta w_n} = 0.1$

எனவே $\delta w_n = 10$

$2\times 10 = 10\times a$

$\therefore\ a = 2$

$$M_0 = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 16$$

$$e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0{\cdot}16 = e^{-1.83}$$

$$\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1{\cdot}83$$

$$\left(\frac{\pi}{1{\cdot}83}\right)^2 \delta^2 = 1-\delta^2$$

$$3{\cdot}95\,\delta^2 = 1 \qquad \therefore \quad \delta = 0.503$$

$$w_n = \frac{10}{\delta}$$

$$= \frac{10}{0.503} = 19.9$$

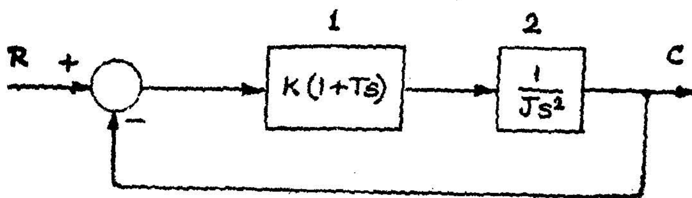
$$Kb = w_n^2$$

$$= 19.9^2 = 396$$

$$\therefore \quad b = 39.6$$

மாதிரி வினா 5.8

'ரேஞ்சர் விண்கலம்' (The Ranger space vehicle) நிலவின் பரப்பை ஆராய அனுப்பப் பட்டது. அதன் திசைநிலை கட்டுப் பாட்டுக் (attitude control) குலையின் பெட்டிப் படத்தைக் கீழே காண்க.



படம் 5.6 'ரேஞ்சர்' விண் கல ஆள்குலை

1 : ஜைரோ ; C : திசை நிலை
2 : விண்கலம் R : ஆதார வட்டம்

இதில் ஜைரோ கால மாறிலி (gyro time constant) $T = 2$ நொடி. இயங்கு பகுதியின் நிலைமச் சுழற்திறன் $J = 150$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்².

இக் குவையில், ஒரு படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்தின் விளைவு விரைவாகவும், உச்ச விலக்கம் 5%க்கு உட்பட்டு இருக்கும் படியும் ஜைரோவின் விகிதப் பெருக்க எண் Kயின் மதிப்பைத் தேர்க.

தீர்வு :

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{K(Ts+1)}{Js^2}}{1+\frac{K(Ts+1)}{Js^2}}$$

$$= \frac{K(Ts+1)}{Js^2+KTs+K}$$

இதன் சிறப்பியற் சமன்பாடு :

$$Js^2+KTs+K = 0$$

அதாவது,

$$s^2 + \frac{T}{J}Ks + \frac{K}{J} = 0$$

$$s^2 + \frac{2}{150}Ks + \frac{K}{150} = 0$$

இதை $s^2+2\delta w_n s+w_n^2 = 0$ என்ற பொது உருவுடன் ஒப்பிட

$$2\delta w_n = \frac{2}{150}K$$

$$w_n^2 = \frac{K}{150}$$

எனவே $Jw_n = \frac{K}{150} = w_n^2$

$$\therefore \quad w_n = \delta$$

$$M_0 = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 5$$

$$e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 0{,}05 = e^{-3.0}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 3$$

$$\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \delta^2 = 1-\delta^2$$

$$2.1\ \delta^2 = 1 \text{ அல்லது } \delta = 0.69$$

$$w_n = \delta = 0.69$$

$$\therefore \quad \frac{K}{150} = 0.476 \text{ அல்லது } K = 71.5$$

5.2 கடைநிலை விளைவு (Steady-State Response) :

ஆள்குவையின் கட்டளை விளைவு சில இடைநிலை அலைவுகளுக்குப் பின் பொதுவாகச் சீரான நிலையொன்றை அடையும், இச் சீரான இயக்கமே கடைநிலை விளைவு எனப்படுகிறது.



படம் 5.7 சில கடைநிலை விளைவுகள்
(அ) படி ஊட்டம் (ஆ) நேர் வளர் ஊட்டம் (இ) பரவலய ஊட்டம்

5.2.1 கடைநிலைவிளைவு வரையறை – விளக்கம் :

ஓர் ஆள்குவையை மாறுப் பெயர்ச்சி, மாறு வேகம், மாறு முடுக்கம் ஆகிய கட்டளை அறிகுறிகளுக்கு உட்படுத்த அதனால் தோன்றும் பதில் விளைவுகள் படம் 5.7 இல் காட்டப்பட்டு உள்ளன.

கடைநிலை விளைவில் சிறப்பாக, அலைவுகள் இல்லாத சீரான இயக்கமே உள்ளதால், இது கடைநிலை வழு (steady-state error) என்னும் துணை அலகால் கணிக்கப்படுகிறது.

கடைநிலை விளைவில் தேவையான ஈட்டத்திற்கும், உண்மையான ஈட்டத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடே கடைநிலை வழு எனப்படும்.

எந்த ஆள்குலையும் $t \to \infty$ என்கையில், கடைநிலையை அடைந்து இருக்கும். எனவே, கடைநிலை வழு

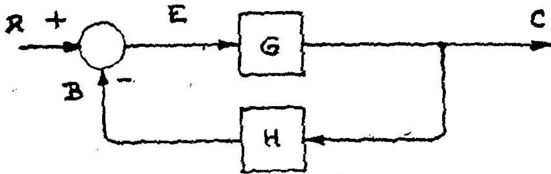
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) \qquad \ldots \quad 5.19$$

$e(t)$: கணநேர வழு அறிகுறி (instantaneous error signal)

இறுதி மதிப்புத் தோற்றத்தைப் (final value theorem) பயன்படுத்த,

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) \qquad \ldots \quad 5.20$$

இனி $E(s)$ இன் மதிப்பைக் காண்போம்.



படம் 5.8 பின்னூட்டு ஆள்குலைப் பெட்டிப் படம்

படம் 5.8 இல் இருந்து,

$$E = R - B$$

$$= R - HC$$

$$= R - HGE$$

$$E(1 + GH) = R$$

$$\therefore \quad E = \frac{R}{1+GH}$$

எனவே

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{sR}{1+GH} \qquad \ldots \quad 5.21$$

இதில் இருந்து, கடை நிலை வழுவானது ஆள்குலையின் சுற்று செலுத்துச் சார்பு GH, ஊட்டம் R இவற்றைப் பொறுத்துள்ளது என்பதை அறியலாம்.

5.2.2 ஆள்குவை அறிகுறி வகைகள் :

ஓர் ஆள்குவையின் இயக்கம் அதன் சுற்று செலுத்துச் சார்பின்(GH) இயல்பிற்கு ஏற்ப மாறுகிறது. சுற்று செலுத்துச் சார்பின் அடிப்படையில் ஆள்குவைகளைப் பின்வருமாறு வகைப் படுத்தலாம்.

பொதுவாக,

$$GH = \frac{K(1+sT_1)(1+sT_2)\dots}{s^N(1+sT_a)(1+sT_b)\dots} \quad \dots \quad 5.22$$

இதில் K : பெருக்க எண்

T : கால மாறிலி

N : தொகையீடுகளின் எண்ணிக்கை

வகை '0' (Type '0') :

$$GH = \frac{K(1+sT_1)(1+sT_2)\dots}{(1+sT_a)(1+sT_b)\dots} \quad \dots \quad 5.23$$

எனில், $N=0$. ஆள்குவையில் தொகையீடு இல்லை.

மாறு இயக்கு அறிகுறி, மாறு ஈட்டத்தைத் தரும் இத்தகைய ($N=0$) ஆள்குவை, வகை '0' ஆள்குவை எனப்படும்.

வகை '1' (Type '1') :

$$GH = \frac{K(1+sT_1)(1+sT_2)\dots}{s(1+sT_a)(1+sT_b)\dots} \quad \dots \quad 5.24$$

எனில், $N=1$, ஆள்குவையில் ஒரு தொகையீடு உள்ளது.

இத்தகைய ($N=1$) ஆள்குவையில் மாறு இயக்கு அறிகுறி, மாறு ஈட்ட வேகத்தைத் தருகிறது. இது வகை '1' ஆள்குவை எனப்படும்.

வகை '2' (Type '2') :

$$GH = \frac{K(1+sT_1)(1+sT_2)\dots}{s^2(1+sT_a)(1+sT_b)\dots} \quad \dots \quad 5.25$$

எனில் $N=2$. ஆள்குவையில் இரு தொகையீடுகள் உள்ளன.

இத்தகைய $(N=2)$ ஆள்குலையில், மாறு இயக்க அறிகுறி, மாறு ஈட்ட முடுக்கத்தைத் தருகிறது. இது வகை–2 ஆள்குலை எனப்படும்.

இனிச் சில ஊட்ட வகைகளைக் (tpes of inputs) காண்போம். காலத்தைப் பொறுத்துள்ள ஊட்ட வகைகளுள் மூன்று

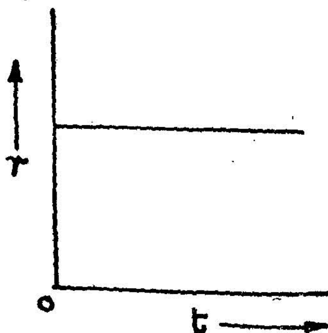
1. படி ஊட்டம் அல்லது பெயர்ச்சி ஊட்டம்
2. நேர் வளர் ஊட்டம் அல்லது திசைவேக ஊட்டம்
3. பரவலய ஊட்டம் அல்லது முடுக்க ஊட்டம்

ஆகியவை. இவையே பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப் படுபவை ஆகும்.

1. படி ஊட்டம் (step input) :

இதன் சமன்பாடு $r=r_0$. இது ஒரு பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. எனவே பெயர்ச்சி ஊட்டம் எனப் படுகிறது.

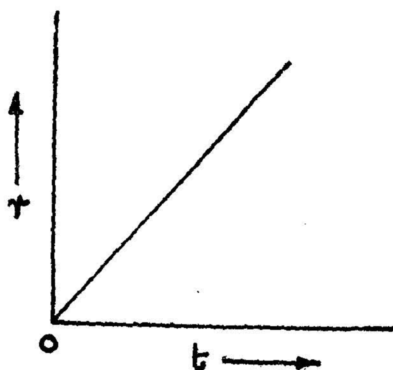
இதன் படம் (5.9) படியின் வடிவைக் கொண்டதால், படி ஊட்டம் எனப் பெயர் பெற்றது.



படம் 5.9 படி ஊட்டம்

2. நேர் வளர் ஊட்டம் (ramp input) :

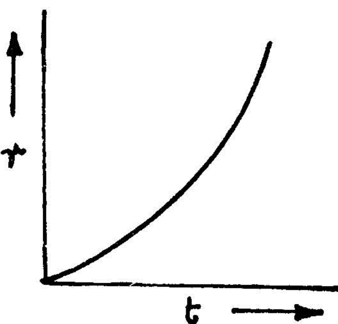
இதன் சமன்பாடு $r=r_1t$. இது ஒரு மாறுத் திசை வேகத்தைக் குறிப்பதால், இது திசை வேக ஊட்டம் ஆயிற்று. r இன் காலச் சார்புப் படம் 5.10. இதில் r இன் மதிப்பு சீராக அதிகமாகிக் கொண்டே போவதால் இது நேர் வளர் ஊட்டம் எனப் பெயர் பெற்றது.



படம் 5.10 நேர் வளர் ஊட்டம்

3. பரவலய ஊட்டம் (parabolic input) :

இதன் சமன்பாடு $r = \frac{1}{2} r_2 t^2$. இது ஒரு மாறு முடுக்கத்தைக் குறிப்பதால், முடுக்க ஊட்டம் எனப்படுகிறது. இதன் படத்தில் r பரவலய உருவினதாக இருப்பதால் இது பரவலய ஊட்டம் எனவும் வழங்கப்படும்.



படம் 5.11 பரவலய ஊட்டம்

5.2.3 அசையா வழு மாறிலிகளும் கடை நிலை வழுவும் (static error coefficients and steady state error)

1. பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய வழு :

$r = r_0$ என்க. $R = \dfrac{r_0}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s.\dfrac{r_0}{s}}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_0}{1+GH}$$

$$= \frac{r_0}{1+\lim\limits_{s\to 0} GH}$$

$\lim\limits_{s\to 0} GH$ என்பது ஒரு மாறிலி. இதன் மதிப்பே பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய வழுவைத் தீர்மானிப்பதால் இது 'பெயர்ச்சி வழு மாறிலி' K_p (position error coefficient) எனப்படுகிறது.

$$K_p = \lim_{s\to 0} GH \qquad \text{... 5.26}$$

எனவே, $$e_{ss} = \frac{r_0}{1+K_p} \qquad \text{... 5.27}$$

2. திசை வேக ஊட்டத்திற்கு உரிய வழு :

$r = r_1 t$ என்க. $R = \frac{r_1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s.\frac{r_1}{s^2}}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_1}{s+s\,GH}$$

$$= \frac{r_1}{\lim_{s\to 0} s\,GH}$$

$\lim_{s\to 0} s\,GH$ என்பது ஒரு மாறிலி. இதன் மதிப்பே, திசை வேக ஊட்டத்திற்கு உரிய வழுவைத் தீர்மானம் செய்வதால் இது 'வேக வழு மாறிலி' K_v (velocity error coefficient) எனப்படும்.

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,GH \quad \cdots \quad 5.28$$

எனவே, $$e_{ss} = \frac{r_1}{K_v} \quad \cdots \quad 5.29$$

3. முடுக்க ஊட்டத்திற்கு உரிய வழு :

$r = \frac{1}{2}r_2t^2$ என்க. $R = \frac{r_2}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s.\frac{r_2}{s^3}}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_2}{s^2+s^2\,GH}$$

$$= \frac{r^2}{\lim_{s\to 0} s^2GH}$$

$\lim_{s\to 0} s^2GH$ என்பது ஒரு மாறிலி. இதன் மதிப்பே முடுக்க ஊட்டத்திற்கு உரிய வழுவைத் தீர்மானிப்பதால் இதை 'முடுக்க வழு மாறிலி' K_a (acceleration error co-efficient) என்கிறோம்.

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, GH \qquad \ldots\ 5.30$$

எனவே
$$e_{ss} = \frac{r_2}{K_a} \qquad \ldots\ 5.31$$

சுருக்கம் :

ஊட்டம்	வழு மாறிலி	கடை நிலை வழு
$r = r_0$	$K_p = \lim_{s\to 0} GH$	$e_{ss} = \frac{r_0}{1 + K_p}$
$r = r_1 t$	$K_v = \lim_{s\to 0} sGH$	$e_{ss} = \frac{r_1}{K_v}$
$r = \frac{1}{2} r_2 t^2$	$K_a = \lim_{s\to 0} s^2GH$	$e_{ss} = \frac{r_2}{K_a}$

பலவகை ஊட்டங்களால் பலவகை ஆள்குவைகளில் தோன்றும் கடைநிலை வழுக்களைக் கீழே அட்டவணையிற் காண்க.

அட்டவணை 5.1

ஆள் குவை வகை	K_p $\lim_{s\to 0} GH$	K_v $\lim_{s\to 0} sGH$	K_a $\lim_{s\to 0} s^2GH$	பெயர்ச்சி e_{ss} $\frac{r_0}{1+K_p}$	வேக e_{ss} $\frac{r_1}{K_v}$	முடுக்கு e_{ss} $\frac{r_2}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{r_0}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{r_1}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{r_2}{K}$

மாதிரி வினா 5.9

ஓர் ஆள்குவையின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு $G = K/s\ (s+2)\ (s+10)$. ஒருமை நேர்வளர் ஊட்டத்திற்கு (unit ramp input) அதன் கடைநிலை வழு 0.1 ஆக இருக்குமாறு K-யின் மதிப்பைத் தேர்க.

தீர்வு :

$H = 1$ என்க.

$$\therefore\ GH = \frac{K}{s(s+2)\ (s+10)}$$

$$r = t$$

$$R = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s.\frac{1}{s^2}}{1+GH}$$

$$= \frac{1}{\lim_{s\to 0} [s+sGH]}$$

$$= \frac{1}{\lim_{s\to 0} sGH}$$

$$= \frac{1}{K/20} = \frac{20}{K}$$

$e_{ss} = 0.1 = \frac{20}{K}$. எனவே, $K = 200$.

மாதிரி வினா 5.10

ஓர் எளிய அடிமைக் குவையில் $J = 20$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2} $B = 100$ நியூட்டன் மீட்டர் நொடி/ரேடியன், $K = 1000$ நியூட்டன் மீட்டர்/ரேடியன். குவையின் தொடக்க நிலை சுழி எனக் கொண்டு
(அ) ஒரு படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய உச்ச விளக்கம்
(ஆ) 1 ரேடியன்/நொடி என்னும் வேக ஊட்டத்திற்கு உரிய கடை நிலை வழு ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

தீர்வு :

$$ - \frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \% $$

(அ) $M_0 = 100 \ e$

$$\delta = \frac{B}{B_c}$$

$$B_c = 2\sqrt{KJ}$$

எனவே, $B_c = 2\sqrt{1000 \times 20} = 282{\cdot}8$

$$\delta = \frac{100}{282.8} = 0{\cdot}354$$

$$\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi \times 0.354}{\sqrt{1-0.354^2}} = 1.188$$

$$\therefore \ M_0 = 100 \ e^{-1.188} = 30.4\%$$

(ஆ) $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \ R}{1+GH}$

$H = 1$, என்க.

$$G = \frac{w_n^2}{s^2+2\delta w_n s} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{B}{J} \ s} = \frac{50}{s^2+5s} = \frac{50}{s(s+5)}$$

$r = t$

$$R = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s . \frac{1}{s^2}}{1+GH} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s \ GH}$$

$$= \frac{1}{50/5} = 0.1 \text{ ரேடியன்}$$

மாதிரி வினா 5.11

சில அடிமைக் குவைகளின் செலுத்துச் சார்புகள் GH கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. எத்தகைய ஊட்டங்கள் இக் குவை

களில் கடைநிலை வழுவைத் தரும் என்பதைக் கணிக்க. அத்துடன், கடைநிலை வழுக்களின் மதிப்புக்களையும் கணிக்க.

(அ) $GH = \dfrac{10}{(s+2)\,(s+3)}$

(ஆ) $GH = \dfrac{20\,(s+1)}{s\,(s+2)\,(s+3)}$

(இ) $GH = \dfrac{10}{s^2\,(s+1)\,(s+2)}$

தீர்வு :

(அ) இது ஒரு வகை '0' குலை. இதில் படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டம் மாறாக் கடைநிலை வழுவைத் தரும்.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,R}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot \frac{r_0}{s}}{1+GH} = \frac{r_0}{1+\lim\limits_{s\to 0} GH}$$

$$= \frac{r_0}{1+10/6} = 0{\cdot}375\ r_0$$

(ஆ) இது ஒரு வகை-'1' குலை. இதில் வேக ஊட்டம் மாறாக் கடைநிலை வழுவைத் தரும்.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot \frac{r_1}{s^2}}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_1}{s+sGH} = \frac{r_1}{\lim\limits_{s\to 0} s\,GH} = \frac{r_1}{21/6} = 0.3\ r_1$$

(இ) இது ஒரு வகை-'2' குலை. இதில் முடுக்க ஊட்டம் மாறாக் கடைநிலை வழுவைத் தரும்.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot \frac{r_2}{s^3}}{1+GH}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_2}{s^2+s^2GH} = \frac{r_2}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\,GH} = \frac{r_2}{10/2} = 0.2\ r_2$$

மாதிரி வினு 5.12

ஒரு விளிம்பு நிலைத் தடையூட்ட அடிமைக் குலையின் (critically damped servomechanism) உச்ச ஈட்ட வேகம் 120 சுழற்சிகள்/நிமிடம் இயற்கை அலைவெண் 8 சுழற்சிகள்/நொடி.

நேர் உறவு எல்லையைத் தாண்டாது அனுமதிக்க இயலும் மிக அதிகக் கடை நிலை வழுவின் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு :

உச்ச ஈட்ட வேகம் என்பதே தேவையான ஈட்ட வேகம் அல்லது ஆதார ஊட்ட வேகம் என்று கொண்டால்,

$$\omega_i = 120 \text{ சுழற்சிகள்/நிமிடம்}$$

$$= 120 \times \frac{2\pi}{60} = 4\pi \text{ ரேடியன்/நொடி}$$

$$\therefore \quad r = 4\pi t \,; \quad R = 4\pi/s^2$$

$$\omega_n = 8 \text{ சுழற்சிகள்/நொடி.}$$

$$= 8 \times 2\pi = 16\pi \text{ ரேடியன்/நொடி}$$

$$\delta = 1$$

$$G = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s}$$

$$H = 1 \text{ என்க.}$$

$$GH = \frac{(16\pi)^2}{s(s+32\pi)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{4\pi}{s^2}}{1 + GH}$$

$$= \frac{4\pi}{\lim_{s \to 0} sGH} = \frac{4\pi}{\frac{16\pi}{2}} = 0.5$$

எனவே, அனுமதிக்கக் கூடிய மிக அதிக வழு 0.5 ரேடியன்.

மாதிரி வினா 5.13

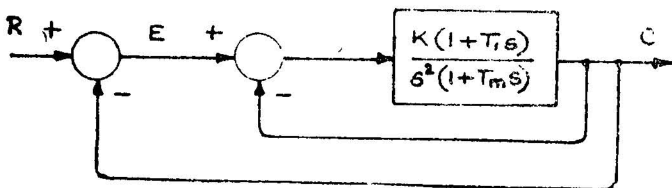
படத்திற் காணும் ஆள் குலையில்,

(அ) $\frac{C}{R}$

(ஆ) $r = 10\,u(t)$ எனில், C-யின் கடை மதிப்பு.

(இ) $\frac{C}{M}$, $\frac{C}{E}$ இவற்றின் குலை வகை

ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்க.



படம் 5.12 ஆள்குலை ஒன்றின் பெட்டிப் படம்

தீர்வு :

(அ) $\frac{C}{M} = \frac{K(1+T_1s)}{s^2(1+T_ms)} = G_1$ என்க.

$$\frac{C}{E} = \frac{G_1}{1+G_1}$$

$$= \frac{K(1+T_1s)}{s^2(1+T_ms)+K(1+T_1s)} = G, \text{ என்க.}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G}$$

$$= \frac{K(1+T_1s)}{s^2(1+T_ms)+2K(1+T_1s)}$$

(ஆ) $r = 10\,u(t)$

$$R = \frac{10}{s}$$

$$C = \frac{K(1+T_1s)}{s^2(1+T_ms)+2K(1+T_1s)} \times \frac{10}{s}$$

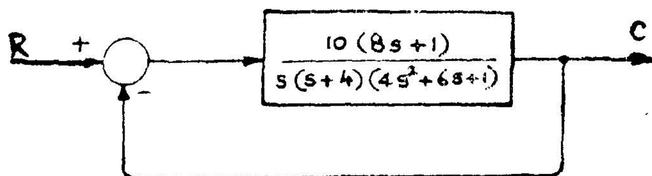
$$C\text{-யின் கடை மதிப்பு} = \lim_{t\to\infty} C = \lim_{s\to 0} sC$$

$$= \lim_{s\to 0} s.\ \frac{K(1+T_1 s)}{s^2(1+T_m s)\ +2K\ (1+T_1 s)} \times \frac{10}{s}$$
$$= 5$$

(இ) $\frac{C}{M}$ இன் வகை '2', $\frac{C}{E}$ இன் வகை '0'.

மாதிரி வினா 5.14

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையின் பெட்டிப் படத்தைக் கீழே காண்க.



படம் 5.13 ஆள்குலை பெட்டிப் படம்

(அ) K_0, K_1, K_2 இவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

(ஆ) இது எவ் வகைக் குலை ?

(இ) இக் குலை ஒரு பரவலய ஊட்டத்தைத் தொடர்ந்து இயங்கவேண்டும். இயக்கம் விரும்பியவாறு இருக்குமா என்று காரணங் காட்டி விளக்குக.

தீர்வு :

(அ) $$GH = \frac{10\ (8s+1)}{s\ (s+4)\ (4s^2+6s+1)}$$

K_0 : படி ஊட்ட வழு மாறிலி $\equiv K_p$

K_1 : வளர் ஊட்ட வழு மாறிலி $\equiv K_v$

K_2 : பரவலய ஊட்ட வழு மாறிலி $\equiv K_a$

எனவே,

$$K_0 = K_p = \lim_{s\to 0} GH = \infty$$

$$K_1 = K_v = \lim_{s \to 0} s\,GH = 10$$

$$K_2 = K_a = \lim_{s \to 0} s^2\,GH = 0$$

(ஆ) இது ஒரு வகை-1 குவை ஆகும்.

(இ) பரவலய ஊட்டத்திற்கு உரிய கடைநிலை வழு

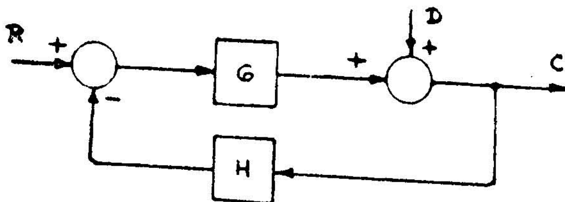
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \frac{r_2}{s^3}}{1+GH} = \frac{r_2}{\lim_{s \to 0} s^2\,GH} = \frac{r_2}{0} = \infty$$

கடைநிலை வழு வரம்பிலி எனில் தேவையான ஈட்டத்திற்கும் உண்மையான ஈட்டத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு வரம்பு இன்றி அதிகமாகக் கொண்டு போகிறது என்று பொருள்.

எனவே குவையின் இயக்கம் விரும்பிய வண்ணம் இராது.

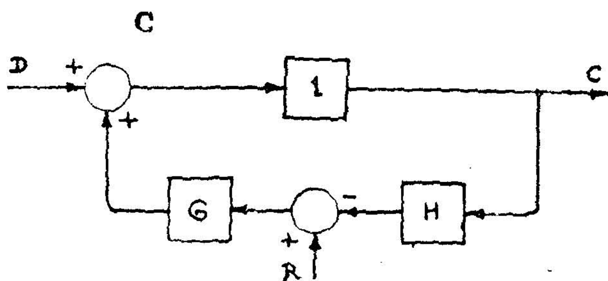
5.2.4 சுமைத் தாக்குதலால் தோன்றும் கடைநிலை வழு (Steady state error due to load disturbance) :

ஒரு பீரங்கித் திருப்ப அடிமைக் குவையில் பீரங்கி சுடுவதால் ஏற்படும் அதிர்ச்சி, ஒரு சுமைத் தாக்குதல் ஆகும். இது கடைநிலை விளைவை எவ்வாறு மாற்றுகிறது என்று கீழே காண்போம்.



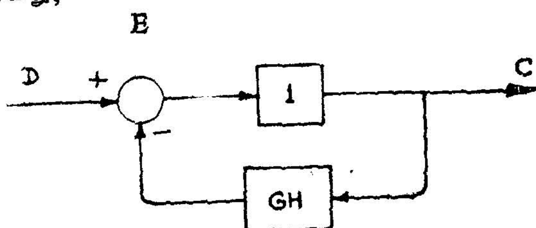
படம் 5.14 சுமைத் தாக்குதல் உடைய ஆள்குவை

படத்திற் காணும் ஆள் குவையின் ஆதார ஊட்டம் $R=0$ என்க. ஆள்குவையின் ஒரே ஊட்டம் D என்னும் சுமைத் தாக்குதலே. இதனால் தோன்றும் கடைநிலை வழுவைக் காண, மேற் படத்தை மாற்றி வரைகிறோம்.



படம் 5.15 மாறிய பெட்டிப் படம் 1 (5.14)

அதாவது,



படம் 5.16 மாறிய பெட்டிப் படம் 2 (5.14)

$$E = D - GHC$$

$$= D - GHE \quad (\because \; E = C)$$

$$E\,(1+GH) = D. \text{ எனவே } E = \frac{D}{1+GH}$$

$$e_{ss_D} = \lim_{s\to 0} s\,E$$

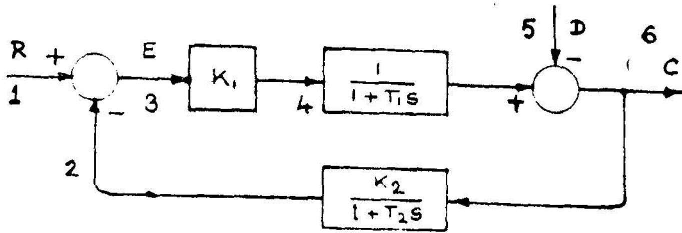
அதாவது,

$$e_{ss_D} = \lim_{s\to 0} \frac{sD}{1+GH} \qquad \ldots \; 5.32$$

இது சமன்பாடு 5.21 ஐப் போலவே உள்ளது. ஊட்டம் Rக்குப் பதில் ஊட்டம் D வந்துள்ளது. அவ்வளவே.

மாதிரி வினா 5.15

ஒரு மாணவனின் நேரத்தைக் கட்டுப் படுத்தும் குலை ஒன்றின் மாதிரி படம் 5·17 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது,



படம் 5.17 ஒரு மாணவனின் நேரக் கட்டுப்பாட்டுக்குவை

1. மொத்த நேரம்
2. பொழுது போக்கு நேரம்
3. படிக்கக் கிடைக்கும் நேரம்
4. தாமதம்
5. இடர் ஊட்டம்
6. மதிப்பு எண்

இதில் $K_1 = 1$, $T_1 = 1$ மாதம், $T_2 = 0.5$ மாதம். பொழுது போக்கு நேரத்தைக் குறைக்கும் மாறிலி $K_2 = 0.5$.

கடினமான பாடங்களாலும், போட்டியாலும் ஒரு படிப் பெயர்ச்சி இடர் ஊட்டம் D (disturbance input) ஏற்பட்டால், அது மதிப்பெண்களை எவ்வாறு மாற்றுகிறது என்று கணிக்க.

தீர்வு :

இடர் ஊட்டக் கடைநிலை வழு காண, படம் 5.17 இல் இருந்து,

$$G = \frac{K}{T_1 s+1} = \frac{1}{s+1}$$

$$H = \frac{K_2}{T_2 s+1} = \frac{0.5}{0.5s+1}$$

$$GH = \frac{0.5}{(s+1)(0.5s+1)}$$

$$D = \frac{1}{s} \text{ என்க.}$$

$$e_{ssD} = \lim_{s\to 0} \frac{s.\frac{1}{s}}{1+GH}$$

$$= \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} GH}$$

$$= \frac{1}{1+0.5} = 0.667$$

5.2.5 இயக்க வழு மாறிலிகள் (Dynamic error coefficients)

K_p, K_v, K_a என்ற மூன்று மாறிலிகளும் அசையா வழு மாறிலிகள் (Static error coefficients) எனப்படுகின்றன. காரணம், அவை GH இல் $s=0$ எனப் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கின்றன. அப்பொழுது கால மாறிலிகள் (time constants) அடிபட்டுப் போவதால், ஆள்குலையின் கால மாறிலிகள் K_p, K_v, K_a ஆகியவற்றை மாற்ற இயலவில்லை.

K_p, K_v, K_a—விற்குப் பதிலாக C_0, C_1, C_2,—என்ற ஒரு புதிய மாறிலிக் குடும்பத்தைத் தோற்றுவிக்கலாம். இவை, ஆள்குலையில் உள்ள கால மாறிலிகளைப் பொருத்து மாறுவதால் இவை இயக்க மாறிலிகள் அல்லது பொது வழு மாறிலிகள் (dynamic error coefficients or generalized error coefficients) எனப்படுகின்றன.

இயக்க வழு மாறிலிகளை எழுதும் முறை வருமாறு :

$$E = \frac{1}{1+GH} \cdot R$$

$1+GH$ என்பது s-ன் சார்புகளான தொகுதி, பகுதிகளை உடையது. தொகுதியையும், பகுதியையும் விரித்து, s-அடுக்கின் ஏறு வரிசையில் எழுதித் தொகுதியைப் பகுதியால் வகுக்க, s-இல் ஓர் அடுக்குத் தொடர் (power series) கிடைக்கிறது.

அதாவது, $$\frac{1}{1+GH} = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \ldots\ldots$$

இத் தொடரில் உள்ள s-அடுக்குக்களின் உறுப்புக் கெழுக்களே இயக்க வழு மாறிலிகள் ஆம். செலுத்துச் சார்பில் இருந்து நேர் வகுத்தலால் கிடைப்பதால் இக் கெழுக்களில் ஆள்குலையின் கால மாறிலிகள் இடம் பெறுகின்றன. இவ்வாறு இயக்க வழு மாறிலிகள் பெயர்க் காரணம் பெறுகின்றன.

இவ் இயக்க வழு மாறிலிகளின் வழி, கடை நிலை வழு காணும் முறையை அடுத்துக் காணலாம்.

$$E = \frac{1}{1+GH} R$$
$$= (C_0+C_1 s+C_2 s_2+\ldots R)\ R$$
$$= C_0 R+C_1 sR+C_2 s^2 R+\ldots,$$

எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் புரிய,

$$e = C_0 r + C_1 \frac{dr}{d_t} + C_2 \frac{d^2 r}{dt^2} + \dots$$

அதாவது,

$$\boxed{e = C_0 r + C_1 r' + C_2 r'' + \dots} \qquad \dots \quad 5.33$$

இது வழுத் தொடர் (error series) என அழைக்கப்படுகிறது.

$$e_{ss} = \underset{t+\infty}{Lim}\ e$$

என்னும் சமன்பாட்டில் இருந்து கடைநிலை வழுவைக் காணலாம்.

கடைநிலை வழு காணப் படிகள் :

(1) கொடுத்துள்ள ஊட்டம் r, அதன் வகைக் கெழுக்கள் (r', r'',...)இவற்றை வகைக் கெழுக்கள் சுழி ஆகும் வரை எழுதுக.

(2) கொடுத்துள்ள GH-இல் இருந்து $\frac{1}{1+GH}$ஐ எழுதி, தொகுதியையும், பகுதியையும் s-அடுக்கின் ஏறு வரிசையில் எழுதி, தொகுதியைப் பகுதியால் வகுத்து, C_0. C_1, C_2... என்ற மாறிலிகளைத் தேவையான அளவு (சுழியாகாத r-ன் வகைக் கெழுக்கள் உள்ளவரை) கணிக்கவேண்டும்.

(3) வழுத் தொடரில் C_0, C_1, C_2....r, r', r''... இவைகளின் மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டு $\underset{t\to\infty}{Lim}$ e-இன் மதிப்புக் காணக் கடைநிலை வழு கிடைக்கும்.

குறிப்பு :

1. C_0, C_1,... மதிப்புக் காண மற்றொரு வழி

$$C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots = \frac{1}{1+GH} = W, \text{ என்க.}$$

$$C_0 = W \Big|_{s=0} \quad \left[\because\ C_0 = \underset{s\to 0}{Lim} \left\{ C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots \right\}\right]$$

$$C_1 = \frac{d}{ds}(W) \Big|_{s=0} \quad \left[\because\ C_1 = \underset{s\to 0}{Lim} \left\{ C_1 + 2C_2 s + \dots \right\}\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (W) \Big|_{s=0}$$

$$[\because \ C_2 = \frac{1}{2!} \lim_{s \to 0} \{2C_2 s + 3C_3 s^2 + \ldots\}]$$

2. அசையா வழு மாறிலிகளும் இயக்க வழு மாறிலிகளும்

மெக்லாரின் விரிவைக் (Maclaurin Series) கொண்டு $\frac{1}{1+GH}$ என்ற கோவையைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{1}{1+GH} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{1}{K_v} s + \frac{1}{K_a} s^2 + \ldots$$

மேலும்

$$\frac{1}{1+GH} = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \ldots$$

இவற்றை ஒப்பிட,

$$C_0 = \frac{1}{1+K_p}$$

$$C_1 = \frac{1}{K_v}$$

$$C_2 = \frac{1}{K_a}$$

இயக்க வழு மாறிலிகளின் சிறப்புகள் :

(அ) பொதுவாக எந்த அடுக்குத் தொடர் ஊட்டத்திற்கும் (power series input) நேரடியாகக் கடைநிலை வழுக் காண்பது இயலும்.

(ஆ) மெதுவாக அங்கும் இங்கும் அலையும் ஊட்டங்களுக்கும் கடைநிலை வழுக் காணலாம்.

(இ) குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்காமலேயே கடைநிலை விளைவைக் கணிக்கலாம்.

மாதிரி வினா 5.16

அடிமைக் குவை ஒன்றின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு

$$G = \frac{10}{s^2 (1+0{\cdot}2s)(1+0.1\, s)}$$

இதன் ஊட்டம் $r = r_0+r_1t+\frac{1}{2} r_2t^2$ எனில் கடைநிலை வழு என்ன ?

தீர்வு :

$$r = r_0+r_1t+\tfrac{1}{2} r_2t^2$$

$$r' = r_1+r_2t$$

$$r'' = r_2$$

$$r''', \ldots = 0$$

$$G = \frac{500}{s^2 (s+5)(s+10)} = \frac{500}{s^4+15\, s^3+50\, s^2}$$

$H = 1$ என்க.

$$\frac{1}{1+GH} = \frac{50\, s^2+15s^3+s^4}{500+50\, s^2+15\, s^3+s^4}$$

$$500+50s^2+15s^3+s^4 \;)50s^2+15s^3+s^4(\;\tfrac{1}{10}s^2+\ldots$$

$$50s^2+\;5s^4+1.5s^5+0.1s^6$$

$$\therefore\; \frac{1}{1+GH} = C_0+C_1s+C_2s^2+\ldots \;= \tfrac{1}{10}s^2+\ldots$$

எனவே $C_0 = 0$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{10}$$

$$e = C_0r+C_1r'+C_2r''+\ldots$$

$$= 0+0 + \frac{1}{10}\, r_2$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e = \frac{r_2}{10}$$

குறிப்பு : அசையா வழு மாறிலிகளைக் கொண்டும், இதே விடையை வருவிக்கலாம்.

5.3 கால விளைவு முன்னேற்றம்

5.3.1 முரண்படு தேவைகள் (Conflicting requirements)

ஓர் ஆள்குவையின் இயக்கம் திருப்திகரமாக இருக்க அதன் உச்ச விலக்கம், கடைநிலை வழு இரண்டுமே குறைவாக இருக்க வேண்டும். இவை முரண்பாடான தேவைகள்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையில் படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்தால் தோன்றும் கடைநிலை வழுவும் உச்ச விலக்கமும் வருமாறு :

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

$$M_0 = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}; \quad \delta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$$

K அதிகம் ஆனால் e_{ss} குறைகிறது. கடைநிலை விளைவு முன்னேறுகிறது. அதே நேரத்தில் δ குறைவதால் உச்ச விலக்கம் M_0 அதிகம் ஆகிறது. இடைநிலை விளைவின் தரம் குறைகிறது. இவ்வாறு இரு தேவைகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று முரணாக இருக்கின்றன.

இதில் இருந்து தெரிவது என்ன ? ஆள்குவையின் ஆக்கப் பணியில் செயல்முறைக் குறிப்புகளை நிறைவு செய்ய Kஐ மட்டும் மாற்றினால் போதாது. மேலும், ஆள்குவையின் நிலைமச் சுழல் திறன் J, உராய்வுத் தடை B இவையும் எளிதில் மாற்றக் கூடியவை அல்ல.

எனவே, நடைமுறையில் கடைநிலை வழுக் குறைவாக இருக்குமாறு K-யின் மதிப்புத் தேர்ந்து எடுக்கப்படுகிறது. பிறகு, வேறு சில திறமையான முறைகளால் உச்ச விலக்கமும் தாழ்த்தப்படுகிறது. இவ்வாறு, இடைநிலை, கடைநிலை விளைவுகள் இரண்டுமே விரும்பிய வண்ணம் அமைக்கப்படுகின்றன.

அடுத்துவரும் பகுதியில் காலவிளைவின் தரத்தை உயர்த்தக் கையாளப்பெறும் திறமையான வழிமுறைகள் சிலவற்றைக் காணலாம்.

அவை முறையே

(1) வகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (Derivative control)

(2) வேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாடு (Rate feedback control)

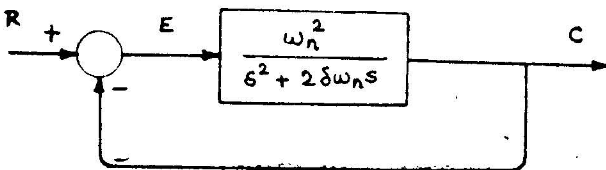
(3) தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (Integral control)

என்ற தலைப்புகளில் வருகின்றன.

5.3.2 வழு விகித சமக் கட்டுப்பாடு (Proportional error control)

பீரங்கித் திருப்ப அடிமைக் குவையில், தேவையான திருப்பத்திற்கும் உண்மையான திருப்பத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு கணிக்கப்பட்டு இவ் வழுவிற்கு ஏற்ப ஒரு சுழல்திறன் தோற்றுவிக்கப் படுகிறது. அதாவது இயக்கு அறிகுறி, வழுவிற்கு நேர் விகித சமத்தில் இருக்கிறது. எனவே இது வழு விகித சமக் கட்டுப்பாடு எனப்படுகிறது.

ஒரு வழு விகித சமக் கட்டுப்பாட்டுக் குவையின் பெட்டிப் படத்தைக் கீழே காண்க.



படம் 5.18 வழு விகிதக் கட்டுப்பாடு

இதன் செயற் சமன்பாடு வருமாறு :

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} + w_n^2 c = w_n^2 r$$

இங்கு,

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} = w_n^2 (r-c) = w_n^2 e$$

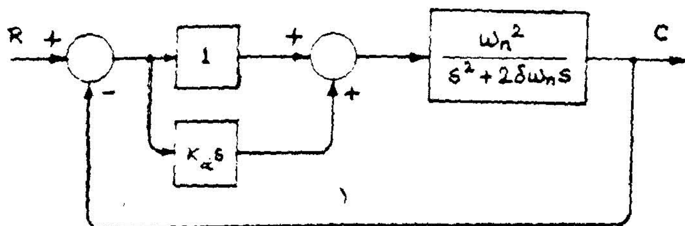
அதாவது, இயக்கு அறிகுறி, வழுவிற்கு நேர் விகிதப் பொருத்தம் உடையது.

இதன் பின்னணியில் காலவிளைவின் தரத்தை உயர்த்தும் பிற முறைகளைக் காண்போம்,

5.3.3 வழு வகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (Derivative error control)

இயக்கு அறிகுறி வழுவின் வகைக் கெழுவிற்கு நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையது ஆனால் வழு வகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (Derivative error control) கிடைக்கிறது.

படம் 5.19-ல் காணும் ஆள்குவையில் இயக்கு அறிகுறி வழுவோடு, அதன் வகைக் கெழுவிற்கும் நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கிறது.



படம் 5.19 வழுவகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு

இதன் செயற் சமன்பாடு

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} = w_n^2\left[e + K_d\frac{de}{dt}\right]$$

$e = r - c$ என்று பிரதியிட,

$$\frac{d^2c}{dt^2} + (2\delta w_n + K_d w_n^2)\frac{dc}{dt} + w_n^2 c = w_n^2 r + K_d w_n^2\frac{dr}{dt}$$

செலுத்துச் சார்பு $$\frac{C}{R} = \frac{w_n^2\,(1+K_d s)}{s^2+2w_n\left(\delta + \dfrac{K_d w_n}{2}\right)s+w_n^2}$$

இதில் இருந்து தெரிவது :

(1) ஆள்குவையின் தடையூட்ட விகிதம் δ-வில் இருந்து $\delta + \frac{K_d w_n}{2}$ என்ற அளவிற்கு அதிகமாகிறது. எனவே உச்ச விலக்கம் குறைகிறது. இந்த அளவு இடைநிலை விளைவின் தரம் உயர்கிறது.

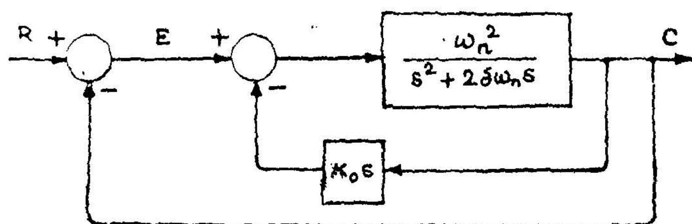
(2) செலுத்துச் சார்பில் உள்ள சுழி உறுப்பு $(1+K_d s)$ஆல், உயர் நேரம் (rise time) குறைகிறது.

5.3.4 ஈட்ட வேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாடு (Output rate feedback control)

இயக்கு அறிகுறி, ஈட்டத்தின் வகைக்கெழுவிற்கு நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையதாயின் ஈட்டவேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப் பாடு கிடைக்கிறது.

இத்தகைய ஆள்குலையில் ஈட்ட வேகத்திற்கு ஏற்ப ஓர் அறிகுறியை வேக மின் ஆக்கி ஒன்று தோற்றுவிக்கிறது. எனவே, இது வேகமின் ஆக்கிப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாடு (tachometric feedback control) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

இதன் பெட்டிப் படத்தையும் செயற் சமன்பாட்டையும் கீழே காண்க.



படம் 5.20 வேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாடு

இதன் செயற் சமன்பாடு

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} = w_n^2 \left(e - K_0 \frac{dc}{dt}\right)$$

$e = r - c$ என்று பிரதியிட

$$\frac{d^2c}{dt^2} + (2\delta w_n + K_0 w_n^2) \frac{dc}{dt} + w_n^2 c = w_n^2 r$$

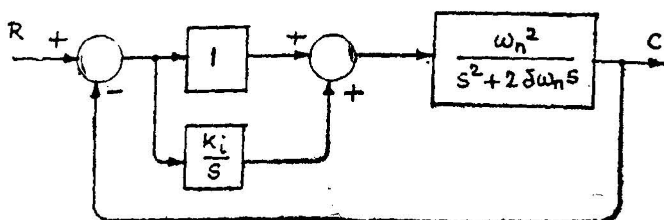
செலுத்துச் சார்பு $$\frac{C}{R} = \frac{w_n^2}{s^2+2w_n\left(\delta + \frac{K_0 w_n}{2}\right)s+w_n^2}$$

இத்தகைய வேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாட்டிலும் தடையூட்ட விகிதம் δ-வில் இருந்து $\delta + \frac{K_0 w_n}{2}$-விற்கு மாறுகிறது. இதனால் உச்ச விலக்கம் குறைகிறது. இடைநிலை விளைவின் தரம் உயர்கிறது. இது கடைநிலை விளைவை மாற்றுவது இல்லை.

5.3.5 வழுத் தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (Integral error control)

இயக்கு அறிகுறி வழுவின் தொகையீட்டிற்கு நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையதாயின் வழுத் தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு (integral error control) கிடைக்கிறது.

படத்திற் காணும் ஆள்குலைவயில் இயக்கு அறிகுறி வழுவிற்கும், வழுத் தொகையீட்டிற்கும் நேர்விகிதப் பொருத்தம் உடையதாக இருக்கிறது.



படம் 5.21 வழுத் தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு

இதன் செயற் சமன்பாடு

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} = w_n^2 \left[e + K_i\int edt\right]$$

இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$[s^2 + 2\delta w_n s]\, C = w_n^2\left[1 + \frac{K_i}{s}\right] E$$

$E = R - C$ என்று பிரதியிட

$$\left[s^2+2\delta w_n s+w_n^2 + \frac{w_n^2 K_i}{s}\right] C = w_n^2 \left[1 + \frac{K_i}{s}\right] R$$

எனவே,

$$\frac{C}{R} = \frac{w_n^2\left(1 + \frac{K_i}{s}\right)}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2 + \frac{w_n^2 K_i}{s}}$$

$$= \frac{w_n^2 (s + K_i)}{s^3+2\delta w_n s^2+w_n^2 s+w_n^2 K_i}$$

இதில் $\frac{C}{E} = \frac{w_n^2(s+K_i)}{s^2(s+2\delta w_n)}$

இதில் இருந்து தெரிய வருவன ;

(1) வழுத் தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு ஆள்குவையை வகை-1 -ல் இருந்து வகை-2 ஆக மாற்றிவிட்டது. வகை-1 ஆள்குவையில் வேக ஊட்டக் கடைநிலை வழு ஒரு வரம்புடை எண்ணாகவும், முடுக்க ஊட்டக் கடைநிலை வழு வரம்பிலி ஆகவும் இருக்கும். வகை-2 ஆள்குவையில் வேக ஊட்டக் கடைநிலை வழு சுழியாகவும், முடுக்க ஊட்டக் கடைநிலை வழு ஒரு வரம்புடை எண்ணாகவும் இருக்கும். எனவே, வழுத் தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாட்டால் கடைநிலை விளைவின் தரம் உயர்கிறது.

(2) ஆள்குவையின் படி (order) இரண்டில் இருந்து மூன்றாக மாறுகிறது. இதனால் நிலையுறுதி குறைகிறது.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளோடு கால விளைவு என்னும் இவ் அத்தியாயத்தை முடிப்போம்.

மாதிரி வினா 5.17

ஓர் அடிமைக் குவையில் r_0 என்ற படிப்பெயர்ச்சி ஊட்ட வழு விளைவு (error response)

$$e = r_0 \ 1{\cdot}66 \ e^{-8t} \sin(6t+37°)$$

என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

(அ) குவையின் இயற்கை அலைவெண், தடையூட்ட விகிதம் தடையூட்ட அலைவெண் ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்க.

(ஆ) குவையில் $J=0.01356$ கிலோகிராம் மீட்டர்², $B=0.217$ நியூட்டன்-மீட்டர் நொடி/ரேடியன் எனில் K-யின் மதிப்பென்ன ?

(இ) தடையூட்ட விகிதம் 0.4-க்குக் கீழே குறையக்கூடாது எனில், K-யின் மதிப்பை எவ்வளவு அதிகப்படுத்த வேண்டும் ?

தீர்வு : $37° = 37 \times \frac{\pi}{180} = 0.645$ ரேடியன்

இருபடி முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை ஒன்றில்,

$$(s^2+2\delta w_n s+w_n^2)\ C=w_n^2 R$$

$C=R-E$ என்று பிரதியிட,

$$(s^2+2\delta w_n\ s+w_n^2)\ E=(s^2+2\delta w_n s)\ R$$

$$E = \frac{s^2+2\delta w_n s)}{(s^2+2\delta w_n s+w_n^2)}\ R$$

$r = r_0$ என்க. $R = \frac{r_0}{s}$

$$E = \frac{s(s+2\delta w_n)}{s^2+2\delta w_n s+w_n^2} \cdot \frac{r_0}{s}$$

$$= r_0 \left[\frac{s+\delta w_n}{(s+\delta w_n)^2+w_n^2(1-\delta^2)} + \frac{\delta w_n}{\sqrt{w_n^2(1-\delta^2)}} \cdot \frac{\sqrt{w_n^2(1-\delta^2)}}{(s+\delta w_n)^2+w_n^2(1-\delta^2)}\right]$$

எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$e = r_0 \left[e^{-\delta w_n t} \cos w_n\sqrt{1-\delta^2}t + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta w_n t} \sin\ w_n\sqrt{1-\delta^2}t\right]$$

$$= r_0\, \frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\left[\sqrt{1-\delta^2} \cos\ w_n\sqrt{1-\delta^2}t + \delta \sin w_n\sqrt{1-\delta^2}t\right]$$

$$= r_0\, \frac{e^{-\delta w_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin\ (w_n\sqrt{1-\delta^2}t+\phi)\ ;\ \phi = \cos^{-1}\delta$$

(அ) $e = r_0\ 1.66\, e^{-8t} \sin\ (6t+37^0)$

என்னும் சமன்பாட்டுடன் இதை ஒப்பிட,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1.66 \qquad w_n\sqrt{1-\delta^2} = 6$$

$$\delta w_n = 8 \qquad \phi = 37^0$$

எனவே,

$$\delta = \cos^{-1}\phi = \cos^{-1} 37^0 = 0.8$$

$$w_n\sqrt{1-0.8^2} = 6. \qquad \therefore\ w_n = 10$$

அதாவது,

குலையின் இயற்கை அலைவெண் : 10 ரேடியன்/நொடி

குலையின் தடையூட்ட விகிதம் : 0.8

குலையின் தடையூட்ட அலைவெண் : 6 ரேடியன்/நொடி

(ஆ) $J = 0{\cdot}01356$

$B = 0.217$

$K = ?$

$$\frac{K}{J} = w_n^2$$

$$\therefore\ K = w_n^2 \times J$$
$$= 10^2 \times 0.01356$$
$$= 1.356$$

(இ) $$\delta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$$

$$\delta \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$$\delta^2 \propto \frac{1}{K}$$

எனவே,

$$\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 = \frac{K_2}{K_1}$$

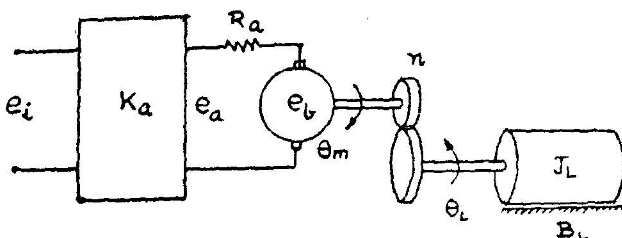
$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{0.8}{0.4}\right)^2 = 4$$

அதாவது, தடையூட்ட விகிதம் 0.4 க்குக் கீழே குறையக் கூடாது எனில், K 4 மடங்கு அதிகமாக வேண்டும்.

மாதிரி வினா 5.18

படத்திற் காட்டப்பட்ட எளிய ஆள் குலையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டை எழுதி, $e_i=1$ எனில் θ_m, w_m இவைகளுக்கு உரிய தீர்வுகளைக் காண்க.



படம் 5.22 எளிய ஆள்குலை

$K_a = 0.15$ வோல்ட்/வோல்ட்

$K_t = 0.03175$ நியூட்டன் மீட்டர்/ஆம்ப்பியர்

$K_b = 0.2$ வோல்ட்-நொடி/சுழற்சி

$J_m = 1.356\times10^{-6}$ கிலோ கிராம் மீட்டர்^{2}

$J_L = 305\times10^{-6}$

$B_m = 0$

$B_L = 7.7\times10^{-4}$ நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்

$R_a = 0.2$ ஓம்

$n = 1/15$

தீர்வு :

$$e_a = K_a e_i$$

$$e_a = R_a i_a + e_b$$

$$e_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$T = K_t i_a$$

$$T = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T'_L$$

$$T'_L = n T_L$$

$$T_L = J_L \frac{d^2\theta_L}{dt^2} + B_L \frac{d\theta_L}{dt}$$

$$\theta_L = n\,\theta_m$$

இவற்றை ஒன்ருய் இணைக்க,

$$K_a e_i = R_a i_a + K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$K_t i_a = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + n\left[J_L \frac{d^2\theta_L}{dt^2} + B_L \frac{d\theta_L}{dt} \right]$$

$$= J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + n^2\left[J_L \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_L \frac{d\theta_m}{dt} \right]$$

$$= (J_m + n^2 J_L) \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + (B_m + n^2 B_L) \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$= J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B \frac{d\theta_m}{dt}$$ என்க.

எனவே,

$$K_a e_i = \frac{R_a}{K_t}\left[J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B \frac{d\theta_m}{dt} \right] + K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$e_i = \frac{R_a J}{K_t K_a} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \left[\frac{R_a B}{K_t K_a} + \frac{K_b}{K_a} \right] \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$J = J_m + n^2 J_L$$

$$= 1.356 \times 10^{-6} + \frac{1}{15^2} \times 305 \times 10^{-6} = 2.71 \times 10^{-6}$$

$$B = B_m + n^2 B_L$$

$$= 0 + \frac{1}{15^2} \times 770 \times 10^{-6} = 3.42 \times 10^{-6}$$

$$\frac{R_a J}{K_t K_a} = \frac{0.2 \times 2.71 \times 10^{-6}}{0.03175 \times 0.15} = 1.14 \times 10^{-4}$$

$$\frac{R_a B}{K_t K_a} = \frac{0.2 \times 3.42 \times 10^{-6}}{0.03175 \times 0.15} = 1.44 \times 10^{-4}$$

$$K_b = 0.2 \text{ வோல்ட்-நொடி/சுழற்சி}$$
$$= 0.2 \times 2\pi \text{ வோல்ட்-நொடி/ரேடியன்}$$

$$\frac{K_b}{K_a} = \frac{0.4\pi}{0.15} = 8.36$$

$$\therefore \; e_i = 1.14 \times 10^{-4} \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + 8.36 \frac{d\theta_m}{dt}$$

இதுவே குவையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

முதல் நிலே சுழி எனக் கொண்டு இலாப்லாசு மாற்றம் காண்கையில்,

$$E_i = 1.14 \times 10^{-4} s^2 \Theta_m + 8.36 s\Theta_m$$
$$= 1.14 \times 10^{-4} s (s + 7.35 \times 10^4) \Theta_m$$

$$\Theta_m = \frac{0.877 \times 10^4}{s(s + 7.35 \times 10^4)} E_i$$

$$E_i = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \; \Theta_m = \frac{0.877 \times 10^4}{s^2 (s + 7.35 \times 10^4)}$$

$$\equiv \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s + 7.35 \times 10^4}$$

$$A = \left. \frac{0.877 \times 10^4}{s + 7.35 \times 10^4} \right|_{s=0} = 0.1192$$

$$B = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{0.877 \times 10^4}{s + 7.35 \times 10^4} \right] \right|_{s=0}$$

$$= \left. -\frac{0.877 \times 10^4}{(s + 7.35 \times 10^4)^2} \right|_{s=0} = -1.62 \times 10^{-6}$$

$$C = \left. \frac{0.877 \times 10^4}{s^2} \right|_{s+7.35 \times 10^4} = 1.62 \times 10^{-6}$$

$$\Theta_m = 0.1192 \times \frac{1}{s^2} - 1.62 \times 10^{-6} \times \frac{1}{s}$$
$$+ 1.62 \times 10^{-6} \frac{1}{s + 7.35 \times 10^4}$$

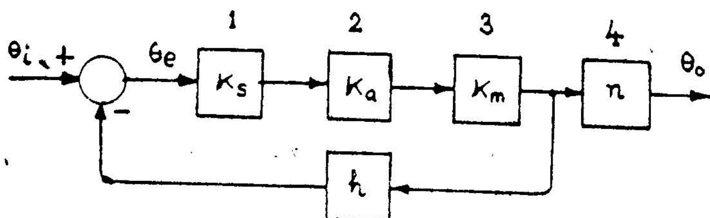
எதிர் இலாப்லாச மாற்றம் காண,

$$\theta_m = 0.1192\ t - 1.62\times10^{-6} + 1.62\times10^{6-}\ e^{-7.86\times10^{4}t}$$

$$w_m = \frac{d\theta_m}{dt} = 0.1192\,(1-e^{-t})$$

மாதிரி வினு 5.19

ஓர் அடிமைக் குலையின் பெட்டிப் படம் கீழே தரப் பட்டுள்ளது.



படம் 5.23 ஓர் அடிமைக் குலை

1. ஒத்தியங்கி
2. பெருக்கி
3. இயக்கி
4. பல்இணை

K_s = 60 ஒல்டு/ரேடியன்

K_a = 20 ஒல்டு/வோல்ட்

K_m = 30×10^{-6} நியூட்டன் மீட்டர்/வோல்ட்

J = 10^{-5} கிலோ கிராம் மீட்டர்^{2}

B = 161×16^{-6} நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்

$h = 1/20$, $n = \frac{1}{30}$

(அ) இக் குலையின் தடையூட்ட விகிதம் என்ன?

(ஆ) குலையின் ஊட்டம் 2 ரேடியன்/நொடி எனில் கடை நிலையில் ஊட்டத்தண்டு, பின்னூட்டுத் தண்டு இவற்றின் திருப்பங் களில் உள்ள வேறுபாட்டைக் கணிக்க.

(இ) குலையின் ஊட்டம் 2 ரேடியன்/நொடி ஆக இருக் கையில், கடைநிலை இயக்கு அறிகுறி (actuating signal) 1°-க்கு மிகாமல் இருத்தல் வேண்டும். தடையூட்ட விகிதமும் முன் நிலையிலேயே நிற்க வேண்டும்.

இதில் வெற்றி பெற, பெருக்கி $K_a + A\dfrac{d}{dt}$ என்ற சார்பைத் தருமாறு மாற்றி அமைக்கப்படுகிறது.

K_a, A இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(அ) செயற் சமன்பாடுகள் :

$\theta_e = \theta_i - h\,\theta_m$

$e = K_s\,\theta_e$

$e_a = K_a\,e$

$T = K_m\,e_a$

$$T = J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B\frac{d\theta_m}{dt}$$

$\theta_o = n\theta_m$

இவற்றை ஒன்றாக இணைக்க,

$$K_sK_aK_m\,\theta_e = J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B\frac{d\theta_m}{dt} \qquad \ldots (1)$$

$$K_sK_aK_m\,(\theta_i - h\theta_m) = J\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B\frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{B}{J}\frac{d\theta_m}{dt} + \frac{K_s\,K_a\,K_m\,h}{J}\theta_m = K_s\,K_a\,K_m\,h\,\theta_i$$

$$\frac{B}{J} = \frac{161\times10^{-6}}{10^{-5}} = 16.1$$

$$K_sK_aK_m\,h = 60\times20\times30\times10^{-6}\times\frac{1}{20} = 1.8\times10^{-3}$$

$$\frac{K_sK_aK_m\,h}{J} = \frac{1.8\times10^{-3}}{10^{-5}} = 180$$

எனவே, குவையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு :

$$\frac{d^2\theta_m}{dt_2} + 16.1\frac{d\theta_m}{dt} + 180\,\theta_m = 1.8\times10^{-3}\,\theta_i$$

இதன் சிறப்பியற் சமன்பாடு:

$$s^2+16.1s+180 = 0$$

இதை $s^2+2\delta w_n s+w_n^2 = 0$ என்ற பொது உருவுடன் ஒப்பிட,

$$2\delta w_n = 16.1$$

$$w_n^2 = 180$$

எனவே $\quad w_n = \sqrt{180} = 13.4$

$$J = \frac{16.1}{2\times 13.4} = 0.6$$

(ஆ) $\theta_i = 2t$ ரேடியன்

$$\Theta_i = \frac{2}{s^2}$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து,

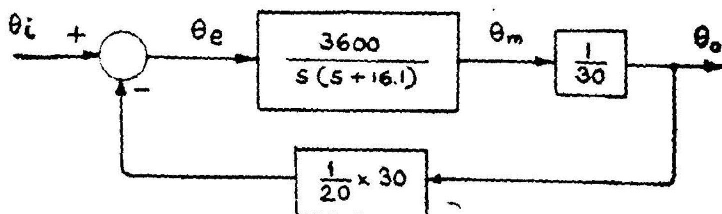
$$\frac{K_s K_a K_m}{J}\,\Theta_e = \left(s^2 + \frac{B}{J}s\right)\Theta_m \quad \text{... (2)}$$

$$3600\,\Theta_e = (s^2+16.1s)\,\Theta_m$$

எனவே,

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_e} = \frac{3600}{s(s+16.1)}$$

$$\therefore \quad \frac{\Theta_0}{\Theta_e} = \frac{180}{s(s+16.1)} \qquad [\because\ \theta_0 = \tfrac{1}{30}\theta_m]$$



படம் 5.24 அடிமைக் குலையின் பெட்டிப் படம்

$$G = \frac{120}{s(s+16.1)}$$

$$H = 1.5$$

$$GH = \frac{180}{s(s+16.1)}$$

$$e_{ss} = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{s.R}{1+GH}$$

$$= \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{s. \frac{2}{s^2}}{1+GH}$$

$$= \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2}{s+sGH}$$

$$= \frac{2}{\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} sGH}$$

$$= \frac{2}{180/16.1} = 0.179$$

எனவே, கடை நிலையில் ஊட்டத் தண்டு, ஈட்டத் தண்டு இவற்றின் திருப்ப வேறுபாடு 0.179 ரேடியன்.

படம் 5.24 இல் இருந்து,

$$GH = \frac{180}{s(s+16.1)}$$

இதில் இருந்து $K_a = 20$ ஐ பிரித்துவிட,

$$GH = \frac{9 K_a}{s(s+16.1)}$$

தடையூட்ட வகைக்கெழுக் கட்டுப் பாட்டையும் சேர்க்க

$$GH = \frac{9(K_a+As)}{s(s+16.1)}$$

$$e_{ss} = \frac{2}{\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} sGH}$$

$$= \frac{2}{9 K_a/16.1} = \frac{32.2}{9K_a}$$

$$e_{ss} = 1° = \frac{\pi}{180} \text{ ரேடியன்}$$

$$\frac{32.2}{9\,K_a} = \frac{\pi}{180}$$

எனவே, $K_a = \frac{32.2}{9} \times \frac{180}{\pi} = 205$

சிறப்பியற் சமன்பாடு $1+GH=0$

$$1+\frac{9\,(205+As)}{s\,(s+16.1)} = 0$$

$$s\,(s+16.1)+9\,(205+As) = 0$$

$$s^2+(16.1+9A)s+1845 = 0$$

இதை $s^2+2\delta w_n s+w_n^2 = 0$ என்னும் பொது உருவுடன் ஒப்பிட,

$$2\,\delta w_n = 16.1+9A$$

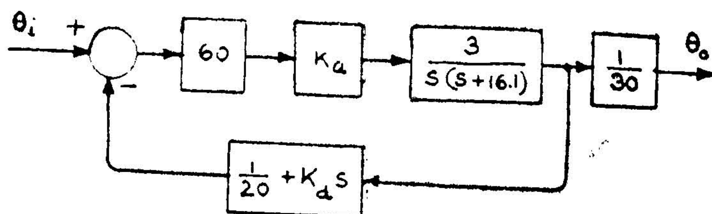
$$w_n^2 = 1845 \;\therefore\; w_n = \sqrt{1845} = 43.$$

$$\delta = \frac{16.1+9A}{2\times 43} = 0.6$$

எனவே, $A = \frac{0.6\times 86-16.1}{9} \cong 4$

மாதிரி வினா 5.20

மாதிரி வினா 5.19 இல் கொடுக்கப் பட்டுள்ள குலையின் தேவைகளை (பகுதி ii) நிறைவு செய்ய வேகப் பின்னூட்டுக் கட்டுப்பாடு கையாளப் படல் வேண்டும் எனில், படம் 5.25 இல் பெருக்க எண் K_d யின் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 5.25 பெயர்ச்சிக் கட்டுப்பாட்டுக் குலை

தீர்வு ;

$$GH = \frac{6\ K_a \left[\left(\frac{1}{20} + K_d s \right) 30 \right]}{s\ (s+16.1)}$$

$$e_{ss} = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{s.\ R}{1+GH}$$

$$R = \Theta_i = \frac{2}{s^2}$$

$$\therefore \quad e_{ss} = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{s.\ \frac{2}{s^2}}{1+GH}$$

$$= \frac{2}{\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}}\ s\ GH}$$

$$= \frac{2}{\frac{180\ K_a}{20 \times 16.1}} = \frac{\pi}{180}$$

$$\therefore \quad K_a = \frac{2 \times 20 \times 16.1}{180} \times \frac{180}{\pi} = 205$$

செயற் சமன்பாடு $1 + GH = 0$

$$1 + \frac{6 \times 205 \left[\frac{1}{20} + K_d s \right] 30}{s(s+16.1)} = 0$$

$$s^2 + (16.1 + 180 \times 205\ K_d)s + 9 \times 205 = 0$$

இதை $s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2 = 0$ என்னும் பொது உருவுடன் ஒப்பிட,

$$2\delta w_n = 16.1 + 18 \times 205\ K_d$$

$$w_n^2 = 1845$$

எனவே $w_n = \sqrt{1845} = 43$

$$\delta = \frac{16.1 + 18 \times 205\ K_d}{2 \times 43} = 0.6$$

எனவே,

$$K_d = \frac{0.6 \times 86 - 16.1}{18 \times 205}$$
$$= 96.1 \times 10^{-4}$$

பயிற்சி-5

5.1 ஓர் அடிமைக் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு வருமாறு:

$$s^2 + 24 s + 225 = 0.$$

இதில், (அ) தடையூட்டு விகிதம்,

(ஆ) தடையிலா இயற்கை அலைவெண்,

(இ) ஒருமைப் படி ஊட்டம் விளைவிக்கும் தடையூட்டு அலைவெண்

ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

5.2 ஓர் ஆள்குலையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வருமாறு:

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 8\frac{dc}{dt} + 25\, c = 25\, r$$

இதன் தடையூட்ட விகிதம், இயற்கை அலைவெண், தடையூட்டு அலைவெண், உச்ச விலக்கம், படியும் நேரம் ஆகியவற்றைக் கணிக்க. உராய்வைக் குறைந்த அளவு எவ்வளவு அதிகமாக்கினால் குலையின் அலைவுகள் சுழியாகும்?

5.3 .ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையின் குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ எனில், ஒருமைப் படி ஊட்ட உச்ச விலக்கம் என்ன? பயன்படும் முடிவுகளை வருவிக்க.

5.4 ஓர் எளிய பின்னூட்டு ஆள்குலை பின்வரும் சமன்பாடுகளால் விளக்கப்படுகிறது.

$$J\frac{d^2\theta_c}{dt^2} + B\frac{d\theta_c}{dt} = KE, \quad E = \theta_r - \theta_c$$
$$J = 1.5, \quad 3 = 21, \quad K = 294.$$

(அ) இக் குலை முழுப் பின்னூட்டு வகையினதா, குறைப் பின்னூட்டு வகையினதா? எவ்வாறு?

(ஆ) $\theta_r = 18°$ எனில், உச்ச விலக்கத்தையும், அதை அடைய ஆகும் நேரத்தையும் கணக்கிடுக.

5.5 முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை ஒன்றின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \frac{500}{s(1+5s)}$. இக் குவையின் ஒருமைப் படி ஊட்ட, கால விளைவைக் கணிக்க.

5.6 ஒரு சுருள் வில் கட்டுப்பாட்டு (நிலை மின் காந்த) திரும்பு சுருள் மின் அழுத்த மானியில் (Moving coil voltmeter) நகரும் பகுதியின் நிலைமத் திருப்புவிசை J, சுருள் வில் மாறிலி K_s, பின் மின் அழுத்த மாறிலி K_v, திருப்புவிசை மாறிலி K_t, மின் சுருளின் தடை R, ஊட்ட நேர் மின் அழுத்தம் V. செயற் சமன்பாடுகள்:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_s \theta = K_t I$$

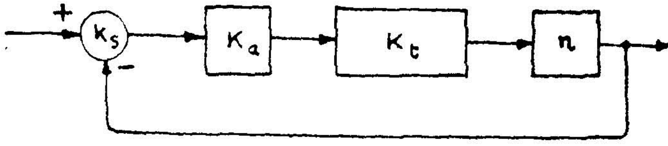
$$V = K_v \frac{d\theta}{dt} + RI$$

இங்கு $J = 10^{-4}$, $K_s = 0.01$, $K_v = 0.1$, $K_t = 0.1$, $R = 10$ (பொருந்திய அலகுகளில்) எனில், மின்னழுத்தம் V-ஐ திடீரென இணைக்கையில் கிடைக்கும் குறிமுள்ளின் வீச்சு (pointer deflection) θ வைக்கணிக்க.

இக் கருவி மிகைத் தடையூட்ட வகையினதா? குறைத் தடையூட்ட வகையினதா? மின்தடை R எந்த அளவிற்கு மாறினால் கருவி அலைவற்றது ஆகும்?

5.7 படத்திற் காணும் இருபடி ஆள்குவையில் (படம் 5.26) $B = 68 \times 10^{-6}$ நியூட்டன்-மீட்டர் நொடி|ரேடியன், $J = 1.36 \times 10^{-6}$ கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}, மின் இயக்கியின் திருப்பு விசை 100 ஓல்ட்டு மின் அழுத்தத்திற்கு 0.027 நியூட்டன் மீட்டர். தடையூட்டம் விளிம்பு நிலையில் $\frac{1}{4}$ பங்காக இருக்கிறது. வழுக்கணிப்பி 1 ஓல்ட்டு|பாகை வழு என்ற ஈட்டத்தைத் தருகிறது. இவ் வழு அறிகுறியே மின் பெருக்கியின் வழி மின் இயக்கியைச் செயற்படுத்துகிறது. மின் பெருக்கியின் மின் அழுத்தப் பெருக்க எண், குவையின் இயற்கை அலைவு எண், கடைநிலை வழு இவற்றைக் கண்டுபிடிக்க. குவையின் ஊட்டம் 20 சுழற்சி|நிமிடம் என்ற மாறு வேகம். பல்லிணை விகிதம் $n = 1|100$.

[குறிப்பு: $\delta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$; $K = K_a K_t K_s n$]



படம் 5.26 ஓர் இருபடி ஆள் குவையின் பெட்டிப் படம்

5.8 ஓர் இருபடி ஆள்குவையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\delta w_n \frac{dc}{dt} + w_n^2 c = w_n^2 r$$

இதன் அளவைச் சார்பு (weighting function) w(t) என்ன?

இதில் இருந்து (அ) $r=\delta(t)$ (ஆ) $r=u(t)$ என்னும் ஊட்டங்களுக்கு உரிய, கால விளைவுகளைக் காண்க.

5.9 ஓர் எளிய அடிமைக் குவையில் $J=20$ கிலோகிராம்-மீட்டர்^{2}, $B=100$ நியூட்டன்-மீட்டர் நொடி|ரேடியன், $K=1000$ நியூட்டன் மீட்டர்|ரேடியன்.

(அ) குவையின் ஊட்டம், 20° மாறுத் திருப்பம் எனில் உச்ச விலக்கம் என்ன ?

(ஆ) குவையின் ஊட்டம், 1 ரேடியன்|நொடி சீரான தொடர் சுழற்சி எனில், கடைநிலை வழு என்ன ?

5.10 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு இருபடி ஆள்குவையின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு :

$$G(s) = \frac{2}{s(1+0.5\,s)}\,.$$

(அ) குவையின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டை எழுதுக.

(ஆ) ஒருபடிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு உரிய உச்ச விலக்கத்தைக் கணிக்க.

(இ) கடைநிலையில் படியும் முன்னர், குவை விளைவில் உள்ள முழு அலைவுகளின் எண்ணிக்கை என்ன ?

[குறிப்பு : அலைவுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{படியும் நேரம்}}{\text{ஓர் அலைவிற்கு ஆகும் நேரம்}}$$

$$= \frac{T_s}{w_d/2\pi} = \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\pi\delta}\Big]$$

5.11 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்-குலையில் $G(s) = A/s(1+Ts)$. இதில் பெருக்க எண்ணை எவ்வாறு மாற்றினால்,

(அ) தடையூட்ட விகிதம் 0.2 இல் இருந்து, 0.6க்கு உயரும்?

(ஆ) உச்ச விலக்கம் 80% இல் இருந்து 20% க்குக் குறையும்?

5.12 முழுப் பின்னூட்டு ஆள்-குலை ஒன்றில் ஈட்டத்திற்கும், வழு அறிகுறிக்கும் இடையே உள்ள செலுத்துச் சார்பு $K/s(1+Ts)$ எனக் கொண்டு, (அ) ஒருமைப் படி ஊட்ட கால விளைவைத் தருவிக்க. $K = 2$, $T = 0.5$. கால விளைவின் எளி படம் வரைக. (ஆ) இக் குலையின் அசையா வழு மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

5.13 ஆள்-குலை ஒன்றில் $G(s) = \dfrac{N}{s(as+1)(bs^2+cs+d)}$, $H(s) = 1$ என்க.

(அ) அசையா வழு மாறிலிகளைக் கணிக்க.

(ஆ) $r = R_0$, $r = R_1 t$. $r = R_2 t^2$ என்ற ஊட்டங்களால் விளையும் கடைநிலை வழுக்களைக் கணிக்க.

5.14 $$G(s) = \frac{8}{s^2(s^2+4s+8)(s^2+3s+12)}$$

என்ற குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பை உடைய முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையில்

(அ) அசையா வழு மாறிலிகளைக் கண்டு பிடிக்க.

(ஆ) அசையா வழு மாறிலிகளின் துணைகொண்டு, $r = \delta$, $r = 2t$, $r = t^2$ என்ற ஊட்டங்கள் விளைவிக்கும் கடை நிலை வழுக்களைக் காண்க.

5.15 படத்திற் காணும் குலையில்

(அ) ஒருமைப் பெயர்ச்சி ஊட்டம்

(ஆ) ஒருமை வேக ஊட்டம்

(இ) ஒருமை முடுக்க ஊட்டம்

ஆகியவற்றால் விளையும் கடைநிலை வழுக்களைக் கண்டு பிடிக்க.

படம் 5.27 ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவை

5.16 ஒரு திருப்பக் கட்டுப்பாட்டுக் குவையின் படத்தைக் கீழே காண்க. இதில் $K_s = 1$ ஓல்ட்டு/பாகை. முழுக்குவையும் அமைக்கப்பட்ட பின் ஒரு சோதனையின் வழி, அடிமை இயக்கியின் செலுத்துச் சார்பு $\Theta/E_2 = K_m/s\,(1+T_m s)$, $K_m = 10$, $T_m = 0.1$ என்று கணிக்கப் படுகிறது.

படம் 5.28 ஒரு திருப்பக் கட்டுப் பாட்டுக்குவை

$\theta_c = \theta_L$, $\theta_m = 100\,\theta_L$ என்பன பல்லிணை உறவுகள்.

சுமையின் சுழல் வேகம் மாறுது 30 சுழற்சிகள்/நிமிடம் அளவில் இருக்க வேண்டும்; கடைநிலை வழு 3° அளவை விஞ்சக் கூடாது எனில், இத் தேவைகளை நிறைவு செய்யும் பெருக்க எண் (A) மதிப்பு என்ன ?

5.17 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையில்

$$G(s) = \frac{500}{s\,(1+01.s)}$$

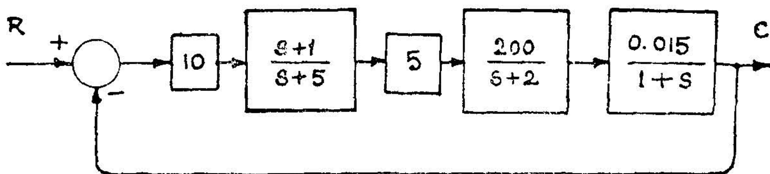
$r(t) = 1 + 2t + t^2$ எனில்,

அதன் வழுத் தொடர் என்ன? அதில் இருந்து கடைநிலை வழுவைக் கணிக்க.

5.18 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையில் $G(s) = 9/(s+1)$. இயக்க வழு மாறிலிகளின் உதவி கொண்டு, பின்வரும் ஊட்டங்களுக்கு உரிய கடைநிலை வழுக்களைக் கணிக்க.

(அ) $r=2$ (ஆ) $r=t$ (இ) $r=\frac{3t^2}{2}$ (ஈ) $r=1+2t+\frac{3t^2}{2}$

5.19 ஒரு பீரங்கித் திருப்ப ஆள்குவையின் பெட்டிப் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. $r=5+4t+\frac{3t^2}{2}$. இக் குவையின் வழுத் தொடரை எழுதி, கடைநிலை வழுவைக் காண்க.



படம் 5.29 ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவை

5.20 ஓர் அடிமைக் குவையில் நிலைமத் திருப்பு விசை 27.1×10^{-6} கிலோ கிராம் மீட்டர்^{2}, உராய்தடை 135.6×10^{-6} நியூட்டன் மீட்டர் நொடி/ரேடியன், தடையூட்ட விகிதம் 0.8. 10 சுழற்சிகள்/நிமிடம் என்ற வேக ஊட்டத்திற்கு உரிய கடைநிலை வழு 0.5° ஆக இருக்க வேண்டும் எனில், (அ) தேவையான, கட்டுப் படுத்தியின் பெருக்க எண் என்ன? (ஆ) வழு வகையீட்டுக் கட்டுப்பாட்டுக் கெழு (derivative error control factor) என்ன ?

6. அலை விளைவு
(Frequency Response)

6.1 அலை விளைவு அறிமுகமும் வருவிப்பும் (Frequency Response-Introduction Derivation)

6.1.1 அலை விளைவு அறிமுகம்:

அலை விளைவு என்றால் என்ன என்பதை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.

ஒரு பீரங்கித் திருப்ப அடிமைக் குவை மாற்றார் விமானம் ஒன்றைப் பார்வையில் பற்றுகிறது எனக் கொள்வோம். இதை உணர்ந்த எதிரி விமானம் பீரங்கியின் குறியில் இருந்து தப்ப அங்கும் இங்குமாய் அலைபாதையிற் பறந்து முன்னேறுகிறது. அடிமைக் குவையின் தொலை நோக்கியும் அதற்கு ஏற்ப அங்கும் இங்குமாகத் திருப்பப் படுகிறது.

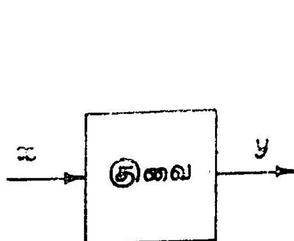
தொலை நோக்கியின் இயக்கத்தைக் குவை ஓர் அலைவு ஊட்டமாகக் (oscillatory input) காண்கிறது. பீரங்கி மேடையும் அதற்கு ஏற்ப அங்குமிங்குமாகத் திரும்பத் தொடங்குகிறது. சிறிது பொழுதில் சீராக; இடமாகவும் வலமாகவும் மாறி மாறித் திரும்புகிறது.

இவ் ஊட்டத்திலும், ஈட்டத்திலும் அலைவு எண்ணில் (frequency) மாறுதல் இராது. அதாவது தொலைநோக்கித் தண்டு அங்கும் இங்குமாய் நொடிக்குப் பத்து முறை அலைந்தால், பீரங்கி மேடையும் நொடிக்கு அதே பத்து முறை அலையும். ஆனால் அலைவின் வீச்சில் (amplitude of oscillation) வேறுபாடு இருக்கும். அத்துடன் சிறிது காலத் தாழ்வும் (time lag) இருக்கும். இக்

காலத் தாழ்வால், ஊட்ட ஈட்ட அலைகளில் பருவ வேறுபாடு (phase shift) தோன்றுகிறது. இப் பருவப் பெயர்ச்சியே காலத் தாழ்வின் அளவையாக (measure) இருக்கிறது.

ஈட்ட ஊட்ட வீச்சு விகிதம் (ratio of output amplitude to input amplitude), பருவப் பெயர்ச்சி (phase shift) இவை ஊட்ட அலைவெண்ணைப் (input frequency) பொருத்து மாறுவன. இம் மாறுதல்களை வரைபடத்தில் காட்டலாம். இதை 'அலை விளைவு' (frequency response) வரைபடம் என்கிறோம்.

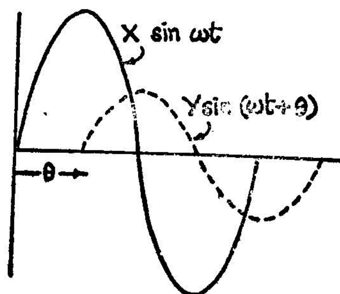
வரையறை : ஓர் அலைவு ஊட்டத்தால் ஆள்-குலையில் ஏற்படும் கடைநிலைப் பதில் விளைவே, அலை விளைவு எனப்படும்.



படம் 6.1 குலை பெட்டிப் படம்

x : ஊட்டம் $X \sin wt$

y : ஈட்டம் $Y \sin(wt+\phi)$



படம் 6.2 அலை விளைவு
ஊட்ட அலையும் ஈட்ட அலையும்

6.1.2. அலை விளைவு—வருவித்தல் (Derivation of Frequency response) :

இருபடி முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலை ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் செலுத்துச் சார்பு

$$M = \frac{C}{R} = \frac{w_n^2}{s^2+2\delta w_n s+w_n^2}$$

$$= \frac{w_n^2}{(s+a)(s+b)}, \text{ என்க.}$$

இதில் δ : தடையூட்ட விகிதம்

w_n : இயற்கை அலைவெண்

a, b : நேர் எண்கள் (positive numbers) ஆக இருக்கட்டும்.

$r = r_0 \sin wt$ என்க.

$$R = \frac{r_0 w}{s^2+w^2}$$

$$C = \frac{w_n^2}{(s+a)(s+b)} R$$

$$C = \frac{w_n^2}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{r_0 w}{(s+jw)(s-jw)}$$

$$\equiv \frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{s+b} + \frac{A_3}{s+jw} + \frac{A_4}{s-jw}$$, என்க.

$$C = A_1 e^{-at} + A_2 e^{bt} + A_3 e^{-jwt} + A_4 e^{jwt}$$

a, b இரண்டும் நேரெண்கள் (positive numbers) ஆதலால் $t \to \infty$ என்கையில், e^{-at}, $e^{-bt} \to 0$. கடை நிலையில் $t \to \infty$.

எனவே, கடைநிலை விளைவு (steady state response)

$$C = A_3 e^{-jwt} + A_4 e^{jwt}$$

இனி, A_3, A_4 இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

$$A_3 = (s+jw) C \Big|_{s+jw=0}$$

$$= (s+j\omega) \cdot M(s) \cdot \frac{r_0\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\Big|_{s+j\omega=0}$$

$$= M(-jw) \frac{r_0 w}{-j2w}$$

$$= M(-jw) \frac{r_0}{-2j}$$

$$A_4 = A^{3*} = M(jw) \frac{r_0}{2j}$$

$M(jw) = Me^{j\theta}$, என்க.

எனவே,

$$C = \frac{Me^{-j\theta} r_0}{-2j} \cdot e^{-jwt} + \frac{Me^{j\theta} r_0}{2j} e^{jwt}$$

$$= Mr_0 \frac{e^{j(wt+\theta)} - e^{-j(wt+\theta)}}{2j}$$

$$= Mr_0 \sin (wt+\theta)$$

$$\frac{C}{r_0} = M \sin (wt+\theta) = M \angle\theta$$

இதுவே குலையின் அலை விளைவு (frequency response.)

இதில் வீச்சு விகிதம் (Magnitude ratio) : M

பருவப் பெயர்ச்சி (Phase shift) : θ

$M(s)$ என்ற நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பில் $s = j\omega$ என்று பிரதியிட்டால் $M(j\omega) = M\angle\phi$ என்ற நிறை சுற்று அலை விளைவு (closed loop frequency response) கிடைக்கிறது. இவ்வாறே $G(s)$ என்ற குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பில் $s = j\omega$ என்று பிரதியிட $G(j\omega) = G\angle\phi$ என்ற குறைசுற்று அலை விளைவு (open loop frequency response) கிடைக்கிறது.

6.1.3 இருபடிக் குலைகளின் அலை விளைவு : ஒத்திசை உச்சம், ஒத்திசை அலைவெண் : (Frequency response of second order systems : Resonant peak and resonant frequency)

இருபடி முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலை ஒன்றின் நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு வருமாறு

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

இங்கு ω_n : இயற்கை அலைவெண்

δ : தடையூட்ட விகிதம்

இதன் நிறை சுற்று அலை விளைவு,

$$M(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\delta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$\omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ என்க.

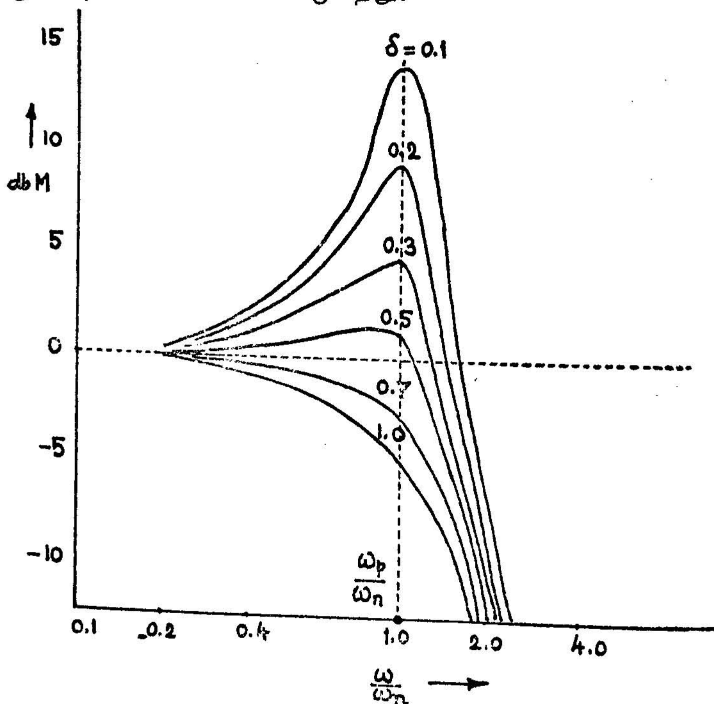
$$\therefore \quad M(j\omega) = \frac{1}{(1-u^2)+j2\delta u}$$

$$= M \angle \theta.$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\delta u)^2}}$$

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{2\delta u}{(1-u^2)}$$

இவ்வாறு, M, θ இரண்டுமே அலைவெண் ω-வின் சார்புகள் என அறிகிறோம். ஊட்டத்தின் அலைவுகளுக்கு ஏற்ப வீச்சு விகிதம் மாறுவதைப் படம் 6.3 காட்டுகிறது.



படம் 6.3 இருபடிக் குவையின் அலை விளைவு வீச்சுப் படம்

M : வீச்சு விகிதம் $\frac{Y}{X}$

u : அலைவெண் விகிதம் $\frac{\omega}{\omega_p}$

δ : தடையூட்ட விகிதம்

ஒரு குறிப்பிட்ட ஊட்ட அலைவெண்ணிற்கு வீச்சு விகிதம் உச்சமாக இருக்கும். இவ் உச்ச வீச்சு விகிதம் ஒத்திசை உச்சம் M_p (Resonant peak) என்றும், அது நேரும் அலைவெண் ஒத்திசை அலைவெண் ω_p (Resonant frequency) என்றும் அழைக்கப்படும்.

ஒத்திசைவு (resonance) நிகழ்வதற்குத் தடையூட்டம் (damping) அதிகமாக இருத்தல் கூடாது.

இனி M_p, ω_p இவைகளை வருவிப்போம்.

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\delta u)^2}}$$

இது மீப் பெரிய மதிப்பை அடையவேண்டும் எனில், இதன் பகுதியில் (denominator) உள்ள $(1-u^2)^2+(2\delta u)^2$ மீச் சிறிய மதிப்பைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

எனவே, $\frac{d}{du}\left[(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2\right] = 0$

$$2(1-u^2)(-2u) + 2(2\delta u)(2\delta) = 0$$

$$-(1-u^2)+2\delta^2 = 0$$

$u^2 = 1-2\delta^2$ எனவே, $u=\sqrt{1-2\delta^2}$

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{(2\delta^2)^2+4\delta^2(1-2\delta^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\delta^4+4\delta^2-8\delta^4}}$$

$$= \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

எனவே, ஒத்திசை உச்சம் (Resonant peak) $\boxed{M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}}$

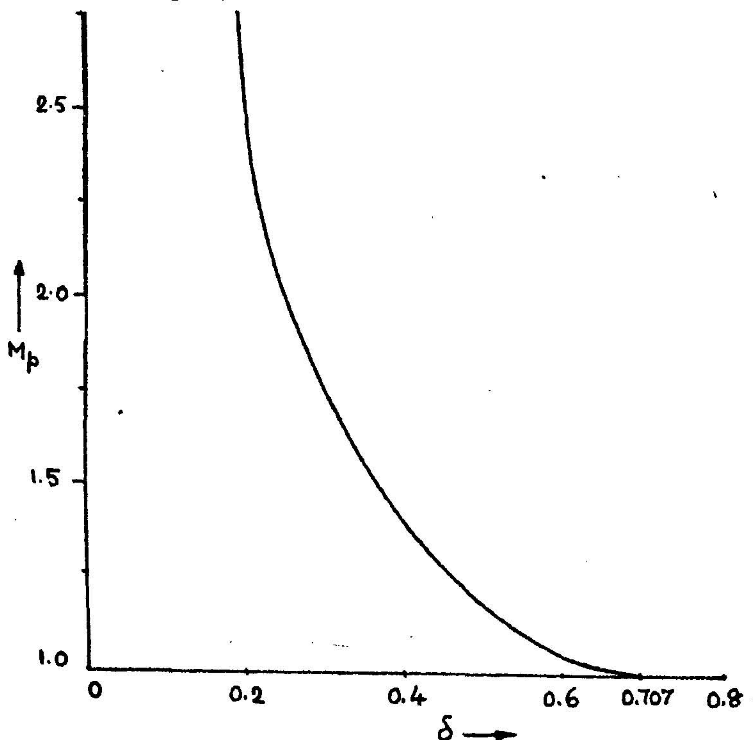
வீச்சு விகிதம் உச்சமாக இருக்கையில்,

$$u = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\delta^2}$$

$\therefore \omega = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$ இதுவே ஒத்திசை அலைவெண் ஆகும்.

வனவே, $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$

குறிப்பு : $1-2\delta^2 < 0$ எனில், ω_p கற்பனை எண் ஆகிறது. அதாவது $\delta > 0.707$ எனில் ω_p கற்பனை எண் ஆகிறது. இதன் பொருள் என்ன? தடையூட்டம் $\delta > 0.707$ எனில், எந்த மெய் அலைவெண்ணிற்கும் (ω) ஒத்திசை உச்சம் (M_p) நிகழாது.



படம் 6.4 ஒத்திசை உச்ச (M_p) தடையூட்ட (δ) இடை உறவு

6.1.4. அலை விளைவு கால விளைவு இடை உறவு : (Correlation between Frequency response and Time response)

அலை விளைவின் சிறப்பு அடையாளங்கள் ஒத்திசை உச்சமும் (M_p), ஒத்திசை அலைவெண்ணும் (ω_p) ஆகும்.

$$M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \quad \cdots (அ)$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$$

இவை இரண்டும் δ, ω_n என்னும் துணை அலகுகளால் அறியப்படு கின்றன.

மேலும் கால விளைவின் சிறப்பு அடையாளங்கள் ஆன உச்ச விலக்கம் (M_o), உச்ச நேரம் (T_p) ஆகியவையும் δ, w_n என்னும் அலகுகளாலேயே அறியப்படுகின்றன.

$$M_o = 100\, e^{-\pi\delta / \sqrt{1-\delta^2}} \qquad \text{... (ஆ)}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

இவ்வாறு, இருபடிக் குவைகளில், அலை விளைவுக் குறிப்புக் களான M_p ω_p ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், δ, ω_n ஆகியவற்றைக் கணித்து அவற்றில் இருந்து கால விளைவுக் குறிப் புக்களான M_o, T_p—இவற்றை வருவிக்கலாம்.

இதுபோல் அலை விளைவில் இருந்து கால விளைவையும், மேலும் கால விளைவில் இருந்து அலை விளைவையும் பெறல் இயலும்.

சமன்பாடுகள் (அ), (ஆ) ஆகியவை, ஓர் இருபடிக் குவையின் அலை விளைவு, கால விளைவு இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர் பைக் காட்டுகின்றன.

எனவே, குவைகளின் ஆக்கப் பணியில், கால விளைவு அலை விளைவு இவற்றில் எதைச் சோதனையின் வழி எளிதில் அறிய லாமோ, அதை அவ்வாறு அறிந்தபின் மேற்கண்ட இடை உறவைக் கொண்டு மற்ற விளைவை அறியலாம்.

6.1.5. அலைவிளைவு செயல் முறைக் குறிப்புக்கள் (Frequency response specifications)

அலை விளைவின் சில சிறப்புச் செயல் முறைக் குறிப்புக்களைக் கீழே காண்க:

(1) ஒத்திசை உச்சம் (M_p): வீச்சு விகிதத்தின் உச்ச மதிப்பு. இது 1.1 முதல் 1.3 வரை இருக்கலாம்.

(2) ஒத்திசை அலைவெண் (ω_p): ஒத்திசை உச்சம் நிகழும் அலைவெண்.

(3) அலைவரிசை அகலம் (BW) (Bandwidth): அலை விளைவின் மதிப்பு, சுழி அலைவெண்ணுக்கு உரிய மதிப்பில் 0.707-க்கும் தாழாமல் உள்ள அலைவரிசை.

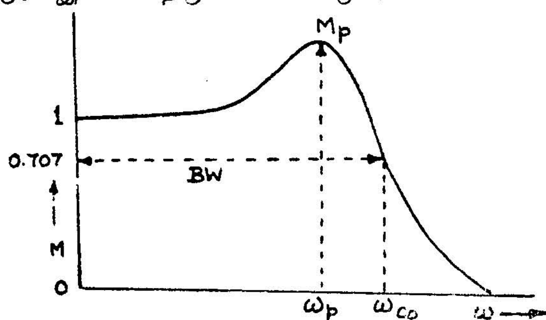
(4) வெட்டுறு அலைவெண் (w_{co}) : (cut-off frequency)

அலை விளைவின் மதிப்பு, சுழி அலைவெண்ணின் மதிப்பில் 0.707-க்குத் தாழும் அலைவெண்.

(5) வீழ்ச்சி வேகம் (cut off rate).

வெட்டுறு அலைவெண்ணிற்கு அப்பால் வீச்சு விகிதம் தாழும் வேகம்.

இவை தவிரப் பெருக்க நிறைவெண் (gain margin) பருவ நிறைவெண் (phase margin) என இரு செயல் முறைக் குறிப்புக்கள் உண்டு. இவை பிறகு விளக்கப்படும்.



படம் 6.5 அலை விளைவு செயற் குறிப்புக்கள்

M :	வீச்சு விகிதம்
ω :	அலைவெண்
BW :	அலை வரிசை அகலம்
M_p :	ஒத்திசை உச்சம்
ω_p :	ஒத்திசை அலைவெண்
ω_{c_0} :	வெட்டுறு அலை வெண்
$\frac{dM}{d\omega}$:	வீழ்ச்சி வேகம்

மாதிரி வினா 6.1

ஒரு குலையில் $r=u(t)$ என்ற ஒருமைப் படிப் பெயர்ச்சி ஊட்டத்திற்கு ஏற்ப,

$$C = 1-1.8\,e^{-4t}+0.8\,e^{-9t} \quad : \quad t>0$$

என்ற ஈட்டம் கிடைக்கிறது. இக் குலையின் அலை விளைவை வருவிக்க. பருவப் பெயர்ச்சி -90° இருக்க வேண்டும் எனில்

ஊட்ட அலைவெண் என்னவாக இருக்க வேண்டும் என்று கண்டு பிடிக்க.

தீர்வு :

$$r = u(t)$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{s}$$

$$C = 1 - 1.8\, e^{-4t} + 0.8\, e^{-9t}$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9}$$

$$= \frac{s^2 + 13s + 36 - 1.8(s^2+9s) + 0.8(s^2+4s)}{s(s+4)\,(s+9)}$$

$$= \frac{36}{s(s+4)\,(s+9)}$$

$$\therefore \quad \frac{C}{R} = \frac{36}{s(s+4)\,(s+9)} \times \frac{s}{1} = \frac{36}{(s+4)\,(s+9)}$$

அதாவது $M(s) = \dfrac{36}{(s+4)\,(s+9)}$

எனவே, அலை விளைவு

$$M(j\omega) = \frac{36}{(jw+4)\,(j\omega+9)} = M \angle \theta$$

$$M = \frac{36}{\sqrt{(\omega^2+16)\,(\omega^2+81)}}$$

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{\omega}{4} - \tan^{-1}\frac{\omega}{9}$$

$$-\tan^{-1}\frac{\omega}{4} - \tan^{-1}\frac{\omega}{9} = -90^\circ$$

$$\tan\left(\tan^{-1}\frac{\omega}{4} + \tan^{-1}\frac{\omega}{9}\right) = \tan 90^\circ$$

$$\frac{\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{9}}{1 - \frac{\omega}{4} \cdot \frac{\omega}{9}} = \infty$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{\omega^2}{36} = 0 \quad \text{அல்லது } \omega = 6$$

எனவே, வட்ட அலைவெண் $w=6$ என்கையில் அலைவிளைவு பருவப் பெயர்ச்சி $-90°$ ஆகிறது.

மாதிரி வினா 6.2

ஒரு பின்னூட்டு ஆள் குலையின் நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{C}{R} = \frac{100}{(s+2)\,(s^2+s+1)}$$

இக் குலையின் ஒத்திசை உச்சம், ஒத்திசை அலைவெண் இவற்றை வருவிக்க. இதே ஒத்திசை உச்சம், அலைவெண் மதிப்புக்களை உடைய இருபடிக் குலை ஒன்றின் தடையூட்ட விகிதம், இயற்கை அலைவெண் ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

தீர்வு :

$$M(s) = \frac{C}{R} = \frac{100}{(s+2)\,(s^2+s+1)}$$

அலை விளைவு

$$M(j\omega) = \frac{100}{(j\omega+2)\,(-\omega^2+j\omega+1)} = M\angle\theta$$

$$M = \frac{100}{\sqrt{(\omega^2+4)\,[(1-\omega^2)^2+\omega^2]}}$$

M மீப் பெரிய மதிப்பை அடைகையில்

$$(\omega^2+4)\,[(1-\omega^2)^2+\omega^2]$$

மீச் சிறிய மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்.

$$\frac{d}{d\omega}\,[\,(\omega^2+4)\,(\omega^4-\omega^2+1)] = 0$$

அதாவது,

$$2\omega\,(\omega^4-\omega^2+1)+(\omega^2+4)\,(4\omega^3-2\omega)=0$$

$$(\omega^4-\omega^2+1)+(2\omega^4+7\omega^2-4) = 0$$

$$3\,(\omega^4+2\omega^2-1)=0$$

$$\omega^2 = -1 \pm \sqrt{1+1} = -2.414 \text{ அல்லது } 0.414$$

இதில் நேரெண் மதிப்பை (positive value) எடுத்துக் கொள்வோம். (∵ மற்றது கற்பனை அலைவெண்ணைத் தரும்)

$\omega^2 = 0.414 \quad \omega = \sqrt{0.414} = 0.642$

$$\therefore \quad M_p = \frac{100}{\sqrt{(0.414+4)\,[(1-0.414)^2+0.414]}} = 54.6$$

$\omega_p = 0.642$

தேவையான இருபடிக் குவையில்,

$$M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} = 54.6$$

$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} = 0.642$

இவற்றில் இருந்து,

$$\delta^2(1-\delta^2) = \frac{1}{(2\times54.6)^2} = 0.836\times10^{-4}$$

$\delta^4-\delta^2+0.836\times10^{-4} = 0$

$\delta^2 = 0.5 \pm \sqrt{0.25--0.836\times10^{-4}}$

$= 0.9999 \; or \; 0.0001$

$\delta^2 \not> 0.5$. எனவே $\delta^2 = 0.0001$

$\therefore \quad \delta = 0.01$

$$\omega_N = \frac{0.642}{\sqrt{1-2\times0.0001}} \cong 0.642$$

மாதிரி வினா 6.3

இருபடிக் குவை ஒன்றில் அலை விளைவுச் சோதனையில் 2 ரேடியன்/நொடி ஊட்ட அலைவெண்ணில், வீச்சு விகிதம் 1.15 என்ற மீப் பெரிய மதிப்பை அடைந்தது.

இக் குவைக்கு ஒரு படி ஊட்டம் கொடுக்கப்பட்டால் விளையும் உச்ச விலக்கம், அதை அடைய ஆகும் நேரம் ஆகிய வற்றைக் கணிக்க.

தீர்வு :

$$M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} = 1.15$$

$$\delta^2(1-\delta^2) = \frac{1}{(2M_p)^2} = \frac{1}{(2\times1.15)^2}$$

$$\delta^2(1-\delta^2) = 0.19$$

$$\delta^4-\delta^2+0.19=0$$

$$\delta^2 = 0.5 \pm \sqrt{0.5^2-0.19}$$

$$= 0.745 \text{ அல்லது } 0.255$$

$$\delta^2 \not> 0.5. \text{ எனவே } \delta^2 = 0.255$$

$$\delta = \sqrt{0.255} = 0.505$$

$$w_p = w_n\sqrt{1-2\delta^2} = 2$$

$$\therefore\ w_n = \frac{2}{\sqrt{1-2\times0.255}} = 2.86$$

எனவே,

$$M_0 = 100\,e^{-\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$= 100\,e^{-\pi\times0.505/\sqrt{1-0.505^2}}$$

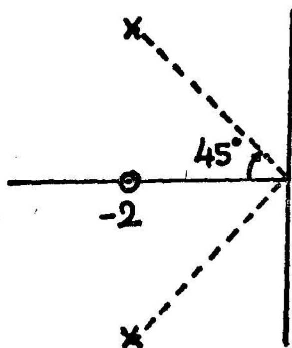
$$= 100\,e^{-1.84} = 15.8\%$$

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

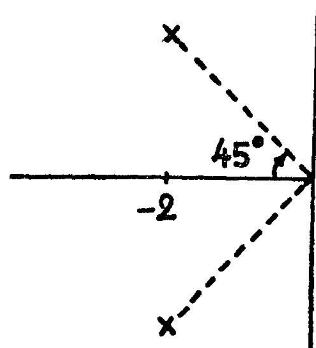
$$= \frac{\pi}{2.86\sqrt{1-0.505^2}} = 1.27 \text{ நொடி}$$

மாதிரி வினா 6.4

ஒரு குவையின் நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு பின்வரும் சுழிப் பேரெண் படத்தால் (படம் 6.6) விளக்கப்படுகிறது.



படம் 6.6
பேரெண் படம்



படம் 6.7
சுழிப் பேரெண் படம்

(அ) குலையின் அலை வரிசை அகலத்தைக் கணிக்க.

(ஆ) படம் 6.7இல் உள்ளபடி ஒரு சுழியெண் சேர்க்கப்பட்டால் அலைவரிசை அகலம் எவ்வாறு மாறும்?

தீர்வு :

(அ) நிறை சுற்று செலுத்துச் சார்பின்

பேரெண்கள் (poles) $-2+j2$, $-2-j2$

சுழியெண்கள் (zeros) இல்லை.

எனவே,

$$M(s) = \frac{K}{(s+2-j2)(s+2+j2)}$$

$$= \frac{K}{(s^2+4s+8)}$$

அலை விளைவு

$$M(j\omega) = \frac{K}{(8-\omega^2)+j4\omega} = M \angle \theta$$

$$M = \frac{K}{\sqrt{(8-\omega^2)^2+(4\omega)^2}}$$

$\omega = 0$ எனில்

$$M_{w_0} = \frac{K}{8}$$

$\omega = \omega_{c_0}$ எனில்

$$M\omega_{co} = \frac{K}{\sqrt{(8-\omega^2_{co})^2 + (4\omega_{co})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} M\omega_0$$

எனவே,

$$\frac{K}{\sqrt{(8-\omega^2_{co})^2 + (4\omega_{co})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{K}{8}$$

$$(8-\omega_{co}) + (4\omega_{co})^2 = 2 \times 64$$

$$64 - 16\omega^2_{co} + \omega^4_{co} + 16\omega^2_{co} = 2 \times 64$$

$$\omega_{co}^4 = 64$$

எனவே $\omega_{co} = 2\sqrt{2}$

$BW = \omega_{c_0} - 0 = 2\sqrt{2} = 2.828$ ரேடியன்/நொடி.

(ஆ) $M(s) = \dfrac{K(s+2)}{(s^2+4s+8)}$

அலை விளைவு

$$M(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{(8-\omega^2)\ j4\omega} = M \angle\theta$$

$$M = \frac{K\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{(8-\omega^2)^2 + (4\omega)^2}}$$

$\omega = 0$ எனில்

$$M\omega_0 = \frac{K}{4}$$

$\omega = \omega_{co}$ எனில்

$$M\omega_{co} = \frac{K\sqrt{\omega_{co}^2+4}}{\sqrt{8-\omega_{co}^2)^2 + (4\omega_{co})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} M_{w_0}$$

எனவே,

$$\frac{K\sqrt{\omega_{c0}^2+4}}{\sqrt{(8-\omega_{c0}^2)^2+(4\omega_{c0})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{K}{4}$$

$$(8-\omega_{c0}^2)^2 + (4\omega_{c0})^2 = 32 \quad (\omega_{c0}^2+4)$$

$$64 - 16\omega^2_{co} + \omega^4_{co} + 16\omega^2_{co} = 32\omega^2_{co} + 128 .$$

$$\omega_{c0}4 - 32\omega_{c0}^2 - 64 = 0$$

$$\omega_{c0}^2 = 16 \pm \sqrt{16^2+64} = 33.9 \text{ அல்லது } -1.9$$

நேரெண் மதிப்பை (positive value) ஏற்றுக் கொள்ள,

$$\omega_{c0} = \sqrt{33.9} = 5.8$$

எனவே, $BW = \omega_{c0} - 0 = 5.8$ ரேடியன்/நொடி.

6.2 அலை விளைவுப் படங்கள் (Frequency response plots)

6.2.1 அலை விளைவுப் படங்கள்—அறிமுகம் :

ஆள் குவைகளின் ஆக்கப் பணியில் ஈடுபடுவோருக்குப் பகுப்பாய்வு முறைகள் உறு துணையாகும். இயற்கணிதப் பகுப்பாய்வு உத்திகள் நடைமுறைக்கு ஒவ்வாமலோ, எளிமை அற்றோ போகும் பொழுது, வரைபட ஆய்வு உத்திகள் வசதியாக வருகின்றன. அவற்றுள் சிலவற்றை விரிவாக இங்குக் காண்போம்.

அலை விளைவில் வீச்சு விகிதமும், பருவப் பெயர்ச்சியும் அலை வெண்ணிற்கு ஏற்ப மாறுவதால், இரு செவ்வக வரை படங்களின் உதவியால் அலை விளைவை முழுமையாகக் காட்டலாம். இவை முறையே வீச்சு விகிதப் படம் (magnitude plot), பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் (phase shift plot) எனப்படும்.

இவ் இரண்டையும் இணைத்துக் கோண தூர வரை தாளில், அலை வெண்ணைத் துணையாகக் கொண்டு ஒரே படமாகவும் காட்டலாம். இது கோண தூரப் படம் (polar plot) எனப்படும். வீச்சு பருவப் படம் (gain-phase plot) என்று ஒரு வகையும் உண்டு.

செவ்வக வரை தாளில் கிடை அச்சில் அலைவெண் ω மடக்கை அளவையிலும் (logarithmic scale), நிலை அச்சில் டெசிபல் வீச்சு

விகிதம்* (decibel magnitude) நேர் அளவையிலும் (linear plot) ஆக வரையப் படுவது வீச்சு விகிதப் படம், (magnitude plot).

செவ்வக வரை தாளில் கிடை அச்சில் அலை வெண் மடக்கை அளவையிலும் (logarithmic scale), நிலை அச்சில் பருவப் பெயர்ச்சி நேர் அளவையிலும் (linear scale) ஆக வரையப்படுவது பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் (phase shift plot).

கோண தூர வரை தாளில், வீச்சு விகிதம், பருவப் பெயர்ச்சி இவற்றை அலைவெண் ω-வை துணை அலகாகக் (parameter) கொண்டு வரைவது கோண தூரப் படம் (polar plot).

செவ்வக வரை தாளில், கிடை அச்சில் பருவப் பெயர்ச்சியும் நிலை அச்சில் டெசிபல் வீச்சு விகிதமும் நேர் அளவையில் (linear scale) கொண்டு வரைவது வீச்சு-பருவப் படம் (gain-phase plot).

6.2.2 கோணதூரப் படம் (Polar plot)

ஓர் ஆள்குவையின் நிலையுறுதியை (stability) அறிய, கோண தூரப் படம் உதவுகிறது. இதற்குக் குறை சுற்று அலை விளைவு $G(j\omega)$-வே போதுமானது. இதில் இருந்து வீச்சு விகிதம் G, பருவப் பெயர்ச்சி ϕ ஆகியவற்றை அலைவெண் ω-வின் சார்பாக எழுதி விடலாம். [நிறை சுற்று அலை விளைவில் வீச்சு விகிதம் M, பருவப் பெயர்ச்சி θ என்று குறிக்கப் படுகின்றன.]

பிறகு, ω-விற்குப் பல மதிப்புக்களைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ப G, ϕ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காணலாம். இவற்றை ஒரு கோண தூர வரை தாளில் குறித்துக் கோண தூரப் படத்தை வரையலாம்.

பல சமயங்களில் நுட்பமாக மதிப்பிட்டு வரையப் பட்ட கோண தூரப் படங்களுக்குத் தேவை இராது. தோராயப் படங்களே போதுமானவையாக இருக்கும்.

சில சிறப்புப் புள்ளிகளை மட்டுமே கணித்து விரைவில் கோண தூரப் படங்களை வரைதல் இயலும்.

எடுத்துக் காட்டாக, $\omega = 0$, $\omega = \infty$ என்பவற்றோடு கிடை, நிலை அச்சுக்களை வெட்டும் புள்ளிகளை அறிந்தால் போதுமானது. சில எண்மான எடுத்துக் காட்டுக்களால் இதை விளக்குவோம்.

அதன்முன் பயன் தரு குறிப்புக்கள் சிலவற்றைக் காண்போம்

---

*வீச்சு விகிதம் M-இன் டெசிபல் மதிப்பு $\simeq 20 \log_{10} M$. இது வரையறை.

6.2.3 கோண தூரப்படம்—வரைமுறைக் குறிப்புக்கள்:

தொடக்கப் புள்ளி : ஆள் குலையின் வகை எண்ணைப் பொருத்து, தொடக்கப் புள்ளியும் மாறும்.

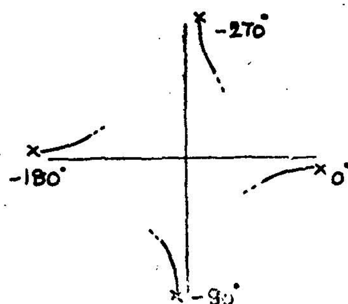
குலையின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு $G(s)$ நேர்க் குறி (positive sign) உடைய தாகக்கொண்டால், தொடக்கப் புள்ளியின் பாகை வருமாறு:

வகை '0' : $\phi = 0°$

வகை '1' : $\phi = -90°$

வகை '2' : $\phi = -180°$

வகை '3' : $\phi = -270°$



படம் 6.8 கோண தூரப்படம் தொடக்கப் புள்ளி

முடிவுப் புள்ளி : $s \to \infty$ என் கையில், $G(s) \propto \frac{1}{s^N}$ என்க.

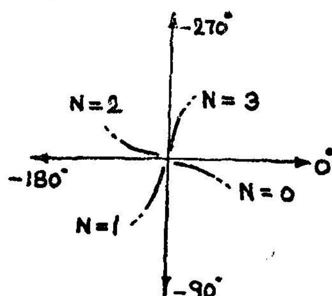
N–இன் மதிப்பைப் பொருத்து முடிவுப் புள்ளி மாறும். $G(s)$ நேர்க் குறியீடு உடையது என்க.

$N = 0 : \phi = 0°$

$N = 1 : \phi = -90°$

$N = 2 ; \phi = -180°$

$N = 3 : \phi = -270°$



படம் 6.9 கோண தூரப்படம் முடிவுப் புள்ளி

கிடை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி : $(G(j)\omega)$ வின் கற்பனைப் பகுதி சுழி ஆகையில் கோண தூரப் படம் கிடை அச்சைக் கடக்கிறது. $G(s)$இல் பொதுவாகத் தொகுதியில் (numerator) மெய் யெண்ணும், பகுதியில் (denominator) பல s உறுப்புக்களும் இருக்கும் எனவே பகுதியை மட்டும் மெய், கற்பனைக் கூறு களாகப் பிரித்து, கற்பனைப் பகுதியைச் (imaginary part) சுழி ஆக்கினால், ω-வுக்கு ஒரு மதிப்புக் கிடைக்கும். இதை $G(\omega)$-வில் பிரதியிட, Gx கிடைக்கிறது. இதுவே கிடை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளியைக் குறிக்கிறது.

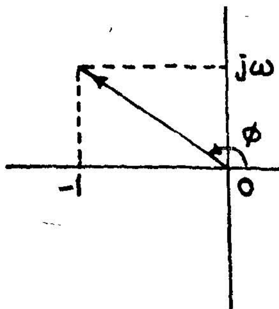
தொகுதியில் s-ன் உறுப்புக்கள் இருப்பின், அவற்றின் பிரியா இணையால் (conjugate) மேலும் கீழும் பெருக்கித் தொகுதியை ஒரு மெய்யெண் ஆக்கி விடலாம்.

நிலை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$G(j\omega)$-வின் மெய்ப் பகுதி சுழி ஆகையில் கோணதூரப் படம் நிலையச்சைக் கடக்கிறது. $G(j\omega)$-வின் மெய்ப் பகுதியைச் சுழி ஆக்கி வரும் ω-வின் மதிப்பை $G(j\omega)$-வில் பிரதியிட, Gy கிடைக்கிறது. இதுவே நிலையச்சைக் கடக்கும் புள்ளியைக் குறிக்கிறது.

பருவக் கோணம் காணல் :

$G(s)$ இன் உறுப்புக்களில் எதிர்க் குறியீடு (negative sign) இருப்பின், பருவக் கோணத்தைத் துணைப் படம் ஒன்றின் உதவியோடு கணிப்பது நல்லது. சான்றுகள் :

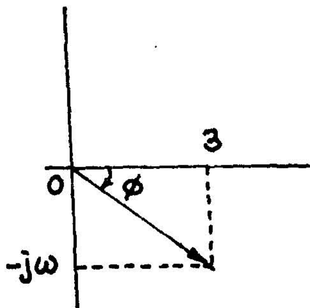


(அ) $G(s) = (s-1)$

$G(j\omega) = (j\omega-1)$

$\phi = 180-\tan^{-1}\omega$

படம் 6.10
பருவக் கோணம் : $-1+j\omega$



(ஆ) $G(s) = (3-s)$

$G(j\omega) = 3-j\omega$

$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega}{3}$

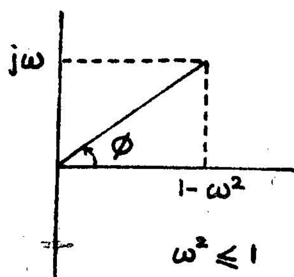
படம் 6.11
பருவக் கோணம் : $3-j\omega$

(இ) $G(s] = (1+s+s^2)$

$G(j\omega) = (1+j\omega-\omega^2)$

$\omega < 1$ என்க. $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}$

$\omega > 1$ என்க. $\phi = 180 - \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega 1}$

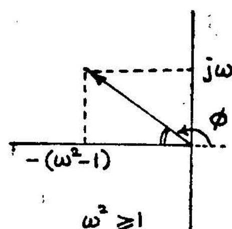


படம் 6.12 பருவக் கோணம் $1-\omega^2+j\omega,\ \omega^2 \leqslant 1$

(ஈ) $G(s) = -(2+s)$

$G(j\omega) = -(2+j\omega)$

$\phi = 180 + \tan^{-1} \frac{\omega}{2}$

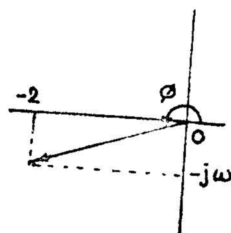


படம் 6.13 பருவக் கோணம் $1-\omega^2+j\omega,\ \omega^2 \geqslant 1$

(உ) $G(s) = s$

$G(j\omega) = j\omega$

$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{0}$



படம் 6.14 பருவக் கோணம் $-2-j\omega$

$\omega = 0$ எனில் $\phi = 0^\circ$

$\omega = 0^+$ எனில் $\phi = 90^\circ$ $(\because 0^+ = \epsilon \big|_{\epsilon \to 0})$

$\omega = 0^-$ எனில் $\phi = -90^\circ$ $(\because 5 = -\epsilon \big|_{\epsilon \to 0})$.

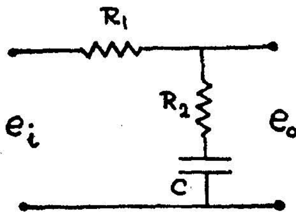
ϵ : ஒரு சிறிய நேரெண்

மாதிரி வினு 6.5

(அ) படத்திற் காணும் பருவந்தாழ் மின் வலையின் செலுத்துச் சார்பைக் காண்க.

(ஆ) இதன் அலை விளைவு கோண தூரப் படத்தை $\omega = 0$, $\omega = \infty$ என்ற வரம்புகளுக்குள் காட்டுக. $R_2/(R_1+R_2)$ அதிகமானல் கோண தூரப் படம் எவ்வாறு மாறும்?

(இ) மேலும், வீச்சு விகிதப் படம், பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் இவற்றின் உருவையும் காட்டுக.



$R_1 = 1$ மெகா ஓம்

$R_2 = 2$ மெகா ஓம்

$C = 1$ மைக்ரோ ஃபாரடு

படம் 6.15 பருவம் தாழ் மின் வலை

தீர்வு :

(அ) $$\frac{E_0}{E_1} = \frac{\left(R_2 + \dfrac{1}{Cs}\right) I}{\left(R_1 + R_2 + \dfrac{1}{Cs}\right) I}$$

$$= \frac{1 + R_2Cs}{1 + \dfrac{R_1+R_2}{R_2} \cdot R_2Cs}$$

$$R_2C = T$$

$\dfrac{R_1 + R_2}{R_2} = a$ என்க.

$$\therefore \quad M(s) = \frac{1+Ts}{1+aTs}$$

$$T = R_2C = 2\times 10^6 \times 1 \times 10^{-6} = 2$$

$$a = \frac{R_1+R_2}{R_2} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$aT = 1.5\times 2 = 3$$

$$\therefore \quad M(s) = \frac{1+2s}{1+3s}$$

இதுவே வலையின் செலுத்துச் சார்பு.

(ஆ) இதன் அலை விளைவு $s = j\omega$ என்ற பிரதியிடக் கிடைக்கிறது.

$$M(j\omega) = \frac{1+j2\omega}{1+j3\omega} = M \angle \theta$$

$$M = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{1+9\omega^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} 2\omega - \tan^{-1} 3\omega$$

எனவே, ωவின் பல மதிப்புக்களுக்கு M, θவின் மதிப்புக்கள் பின்வருமாறு கணிக்கப்படுகின்றன.

$$\omega = 0 \qquad M = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}0 = 0°$$

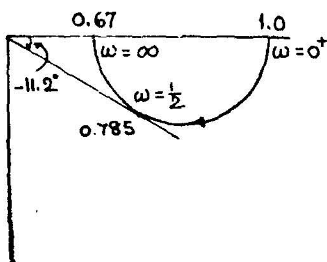
$$\omega = \tfrac{1}{3} \qquad M = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}{\sqrt{1+\frac{9}{9}}} = 0.85$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{3}{3} = -10.2°$$

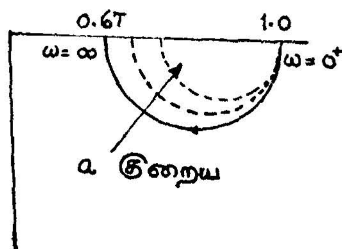
இவ்வாறு,

ω	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
M	1	0.850	0.785	0.707	0.676	0.671	0.667
θ	0°	−10.2°	−11.2°	−8.1°	−5.0°	−2.7°	0°

இதன் கோண தூரப் படம் கீழே (படம் 6.16 அ, ஆ)



படம் 6.16 (அ)
கோண தூரப் படம் $\frac{1+2s}{1+3s}$



படம் 6.16 (ஆ)
கோண தூரப் படம் $\frac{1+2s}{1+2as}$

(a-யின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு)

$\frac{R_1+R_2}{R_2} = a$. எனவே $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ அதிகமாகையில் a குறைகிறது. குறைவின் எல்லை $a=1$.

$\omega = 0$ எனில் $M = 1$.

$\omega = \infty$ எனில் $M = \frac{1}{a}$

எனவே, கோண தூரப் படம், படம் 6.16இல் காட்டி உள்ள வாறு மாறுகிறது.

(இ) $\omega = 0$ எனில்

$M = 1$

$db\ M = 20 \log_{10} 1 = 0$

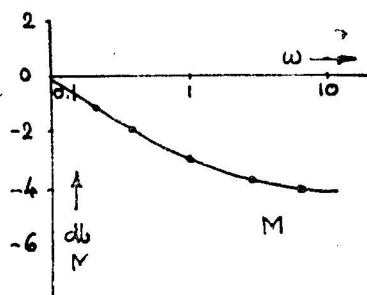
$\omega = 1/3$ எனில்

$M = 0.85$

$$db\ M = 20 \log_{10} 0.85$$
$$= 20 \log_{10} \frac{8.5}{10}$$
$$= 20 \log_{10} 8.5 - 20 \log_{10} 10$$
$$= 18.6 - 20 = -1.4$$

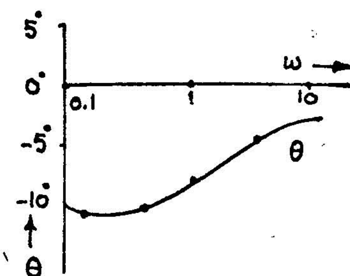
w	0	1/3	1/2	1	2	3	∞
dbM	0	−1·4	−2.1	−3.0	−3.4	−3.46	−3.52
θ	0°	−10.2	−11.2	−8.1	−5.0	−2.7	0

வீச்சு விகிதப் படம், பருவப் பெயர்ச்சிப் படம்] இவற்றின் எளிய உருவங்கள் படம் 6.17, 6.18 இவற்றில் காட்டப் பட்டுள்ளன.



படம் 6.17 வீச்சு விகிதப் படம்

$$\frac{1+2s}{1+3s}$$



படம் 6.18 பருவப் பெயர்ச்சிப் படம்

$$\frac{2+2s}{1+3s}$$

மாதிரி வினா 6.8

கீழ்க் காணும் செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து கோண தூரப் படங்கள் வரைக !

(அ) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

தீர்வு :

(அ) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

$$G(\omega j) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \frac{K}{2}$

$\phi = 0^\circ$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -180^\circ$

y அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$$(s+1)(s+2) = s^2+3s+2$$
$$= (2+s^2)+3s$$

$$\therefore \; G(j\omega) = \frac{K}{(2-\omega^2)+j\,3\omega}$$

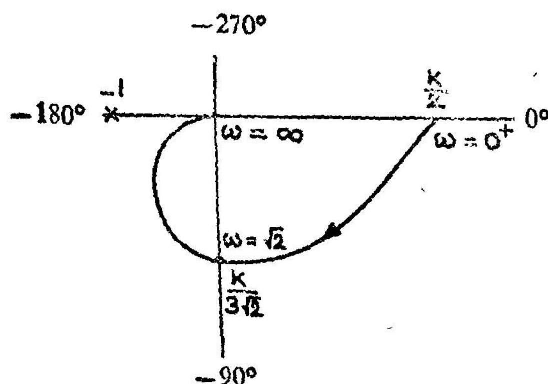
இதில் மெய்ப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$2-\omega^2 = 0$ அல்லது $\omega = \sqrt{2}$

$\omega = \sqrt{2}$ எனில், $G = \frac{K}{3\sqrt{2}}$

$\phi = -90^\circ$

இச் செய்திகளைக் கொண்டு கோண தூரப் படத்தின் எளி வடிவை (sketch) வரையலாம்.



படம் 6.19 கோண தூரப் படம் $\frac{K}{(s+1)(s+2)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{3}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \dfrac{K}{6}$

$$\phi = 0^\circ$$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$$\phi = -270^\circ$$

x, y அச்சுக்களைக் கடக்கும் புள்ளிகள்.

$$(s+1)(s+2)(s+3) = s^3+6s^2+11s+6$$

$$= 6(1+s^2)+s(11+s^2)$$

$$\therefore \quad G(j\omega) = \frac{K}{6(1-\omega^2)+j\omega(11-\omega^2)}$$

இதில் மெய்ப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$1-\omega^2 = 0$ அல்லது $\omega = 1$

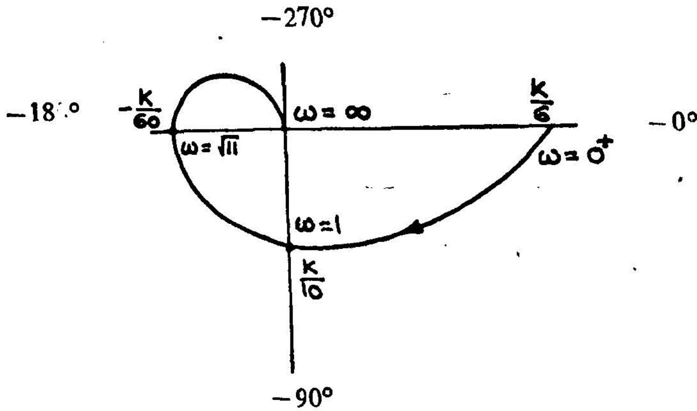
$\omega = 1$ எனில் $G = \dfrac{K}{10}$, $\phi = -90^\circ$ — இதுவே y– அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி.

கற்பனைப் பகுதியைச் சுழி ஆக்க,

$11-\omega^2 = 0$ அல்லது $\omega = \sqrt{11}$.

$\omega = \sqrt{11}$ எனில் $G = \dfrac{K}{60}$, $\phi = -180^\circ$ — இதுவே x–அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி.

இச் செய்திகளைக் கொண்டு, கோண தூரப் படத்தின் எளி வடிவை (sketch) வரையலாம்.



படம் 6.20 கோணதூரப் படம் $\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

மாதிரி வினா 6.7

வகை −1 குவைகளின் குறை சுற்று-செலுத்துச் சார்புகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. குறை சுற்று அலை விளைவைக் கோண தூரப் படத்தால் காட்டுக.

(அ) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

தீர்வு :

(அ) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)} = G \angle \phi$$

$$\therefore \quad G = \frac{K}{\sqrt{\omega^2(\omega^2+1)}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\omega$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில்* $\quad G = \infty$

$\phi = -90°$

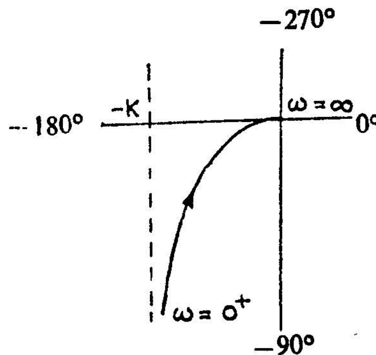
முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -180°$

$\therefore \quad \omega = 0^+$ எனில் $G(j\omega) = -K - j\infty$

இச் செய்திகளில் இருந்து கோண தூரப் படத்தின் எளி வடிவை வரையலாம்.



படம் 6.21 கோண தூரப் படம் $\frac{K}{s(s+1)}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = G \angle \phi$$

$$G = \frac{K}{\sqrt{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \infty$

$\phi = -90°$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -270°$

x அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$$s(s+1)(s+2) = s(s^2+3s+2)$$
$$= 3s^2+s(2+s^2)$$
$$G(j\omega) = \frac{K}{-3\omega^2+j\omega(2-\omega^2)}$$

கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$2-\omega^2=0 \quad \text{அல்லது} \quad \omega=\sqrt{2}$$

$\omega=\sqrt{2}$ எனில் $\quad G = \frac{K}{6}$

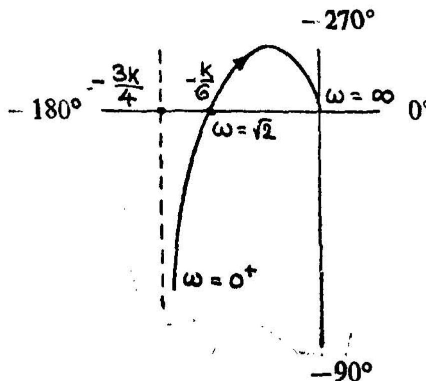
$$\phi = -180°$$

* குறிப்பு :

$$G(j\omega) = \frac{K}{-3\omega^2+j\omega(2-\omega^2)}$$
$$= \frac{-3\omega^2 K}{9\omega^4+\omega^2(2-\omega^2)^2} - \frac{j\omega(2-\omega^2)K}{9\omega^4+\omega^2(2-\omega^2)^2}$$
$$= -\frac{3K}{9\omega^2+(2-\omega^2)^2} - j\frac{(2-\omega^2)K}{9\omega^4+\omega^2(2-\omega^2)^2}$$

$\therefore \quad \omega = 0^+$ எனில் $G(j\omega) = -\frac{3K}{4} - j\infty$

கோண தூரப்படத்தின் எளி வடிவம் படம் 6.22 இல் காட்டப் பட்டுள்ளது.



படம் 6.22 கோண தூரப் படம் $\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

மாதிரி வினா 6.8

பின்வரும் செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து எளிய அலை விளைவுக் கோண தூரப் படத்தை வரைக.

(அ) $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)}$

தீர்வு :

(அ) $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+10)} = G \angle \phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+100)}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{+1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில், $G = \infty$

$\phi = -90°$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -180°$

x அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s-2)}{s(s+1)(s+10)(s-2)}$$

$$s(s+1)(s+10)(s-2) = s(s^2+11s+10)(s-2)$$
$$= s(s^3+9s^2-12s-20)$$
$$= s^2(s^2-12)+s(9s^2-20)$$

$$G(s) = \frac{K(s^2-4)}{s^3(s^2-12)+s(9s^2-20)}$$

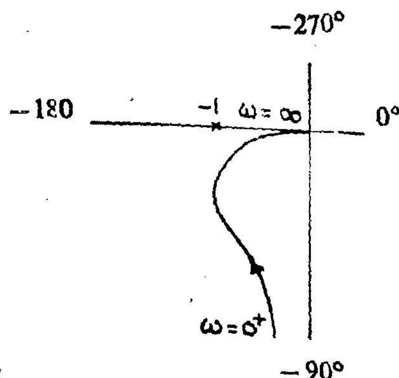
$$\therefore \quad G(j\omega) = \frac{K(-w^2-4)}{-\omega^2(-\omega^2-12)+j\omega(-9\omega^2-20)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$-9\omega^2-20 = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \omega = \sqrt{-\frac{20}{9}}$$

அலைவெண் ω, கற்பனை எண்ணுவதால், எந்த மெய் அலைவெண்ணிற்கும் கோண தூரப் படம் மெய் அச்சைக் கடக்கவில்லை என்று தெரிகிறது.

கோண தூரப் படத்தின் எளி வடிவம் :



படம் 6.28 கோண தூரப் படம் $\frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)}$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = G \angle\phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+25}}{\sqrt{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{5} - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \infty$
$\phi = -90°$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$
$\phi = -180°$

x அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$$G(s) = \frac{K(s+5)(s-5)}{s(s+1)(s+2)(s-5)}$$

$$s(s+1)(s+2)(s-5) = s(s^2+3s+2)(s-15)$$
$$= s(s^3-12s^2-43s-30)$$
$$= s^2(s^2-43)-s(30+12s^2)$$

$$G(s) = \frac{K(s^2-25)}{s^2(s^2-43)-s(30+12s^2)}$$

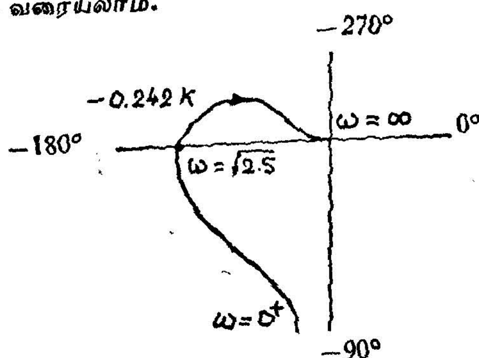
$$\therefore \; G(j\omega) = \frac{K(-\omega^2-25)}{-\omega^2(-\omega^2-43)-j\omega(30-12\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$30-12\omega^2 = 0$; அல்லது $\omega = \sqrt{2.5}$

$\omega = \sqrt{2.5}$ எனில் $G = 0.242K$
$\phi = -180°$

இக் குறிப்புக்களைக் கொண்டு கீழ்க் காணும் கோண தூரப் படத்தை வரையலாம்.



படம் 6.24 கோண தூரப்படம் $\frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+2)}$

மாதிரி வினா 6.8

கொடுக்கப்பட்டுள்ள குலைகளின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து கோண தூரப் படங்களை வரைக.

(அ) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s^2+2s+2)}$

தீர்வு :

(அ) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega(-\omega^2+j2\omega+2)} = G \angle \phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2[(2-\omega^2)^2+4\omega^2]}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2} \quad \omega^2 \leq 2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \left[180 - \tan^{-1}\frac{2\omega}{\omega^2-2}\right] \quad \omega^2 \geq 2$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \infty$

$\phi = -90°$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -180°$

x அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s-1)}{s(s^2+2s+2)(s-1)}$$

$$= \frac{K(s^2-1)}{s(s^3+s^2-2)}$$

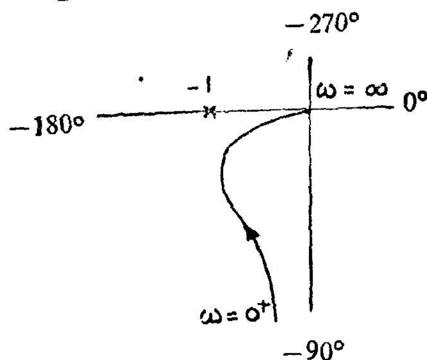
$$G(j\omega) = \frac{K(-\omega^2-1)}{\omega^4+j\omega(-\omega^2-2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$-\omega^2 - 2 = 0 \qquad \omega = \sqrt{-2}$$

அலைவெண் ω கற்பனை எண் ஆகிறது. எனவே எந்த மெய் அலைவெண்ணிற்கும், கோண தூரப் படம் x-அச்சைக் கடக்க வில்லை என்று தெரிகிறது.

∴ கோண தூரப் படத்தைப் பின் வருமாறு வரையலாம்.



6.25 கோண தூரப் படம் $\dfrac{K(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s^2+2s+2)}$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+3)}{j\omega(-\omega^2+j2\omega+2)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+9}}{\sqrt{\omega^2[(2-\omega^2)^2+4\omega^2]}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{3} - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2} \quad \omega^2 < 2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{3} - \tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \left[180 - \tan^{-1}\frac{2\omega}{\omega^2-2}\right] \quad \omega^2 \geq 2$$

தொடக்கம் 1

$\omega = 0^+$ எனில் $\quad G = \infty$

$\phi = -90^\circ$

முடிவு :

$$\omega = \infty \text{ எனில்} \quad G = 0$$

$$\phi = -180^\circ$$

x அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி:

$$G(s) = \frac{K(s+3)(s-3)}{s(s^2+2s+2)(s-3)}$$

$$s(s^2+2s+2)(s-3) = s(s^3-s^2-4s-6)$$

$$= s^2(s^2-4)-s(6+s^2)$$

$$G(s) = \frac{K(s^2-9)}{s^2(s^2-4)-s(6+s^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(-\omega^2-9)}{-\omega^2(-\omega^2-4)-j\omega(6-\omega^2)}$$

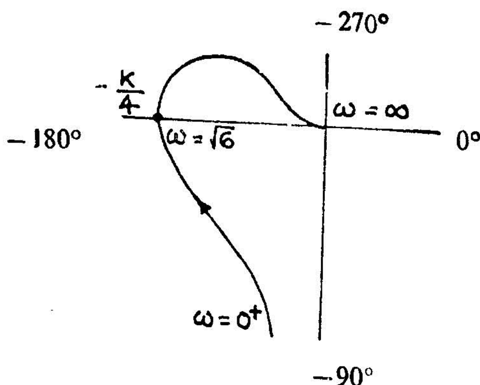
இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$6-\omega^2 = 0 \text{ அல்லது } \omega = \sqrt{6}$$

$$\omega = \sqrt{6} \text{ எனில்}, \ G = \frac{K}{4}$$

$$\phi = -180^\circ$$

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து கோண தூரப் படத்தைப் (படம் 6.26) பின்வருமாறு வரையலாம்.



படம் 6.26 கோண தூரப் படம் $\frac{K(s+3)}{s(s^2+2s+2)}$

மாதிரி வினா 6.9

கோண தூரப் படம் வரைக:—

(அ) $G(s) = \frac{0.25(1+4s)}{s^2(1+0.25s)(1+0.1s)}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s-1)}$

(இ) $G(s) = \frac{K(s+1)}{(1-s)}$

தீர்வு :

(அ) $G(s) = \frac{0.25(1+4s)}{s^2(1+0.25s)(1+0.1s)}$

$$= \frac{10(1+4s)}{s^2(s+4)(s+10)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10(1+j4\omega)}{-\omega^2(j\omega+4)(j\omega+10)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{10\sqrt{1+16\omega^2}}{\sqrt{\omega^4(\omega^2+16)(\omega^2+100)}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{4\omega}{1} - 2\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{\omega}{4} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \infty$

$\phi = -180°$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$\phi = -270°$

x, y அச்சுகளைக் கடக்கும் புள்ளிகள் :

$$G(s) = \frac{10(1+4s)(1-4s)}{s^2(s+4)(s+10)(1-4s)}$$

$$s^2(s+4)(s+10)(1-4s) = s^2(s^2+14s+40)(1-4s)$$
$$= s^2(-4s^3-55s^2-146s+40)$$
$$= s^2(40-55s^2) - s^3(4s^2+146)$$

$$G(s) = \frac{10(1-16s^2)}{s^2(40-50^2)-s^3(4s^2+146)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10(1+16\omega^2)}{-\omega^2(40+50\omega^2)+j\omega^3(-4\omega^2+146)}$$

இதன் மெய்ப் பகுதியைச் சுழியாக்க, ω கற்பனை எண்ணாக வருகிறது. எனவே கோணதூரப் படம் நிலை அச்சைக் கடக்க வில்லை.

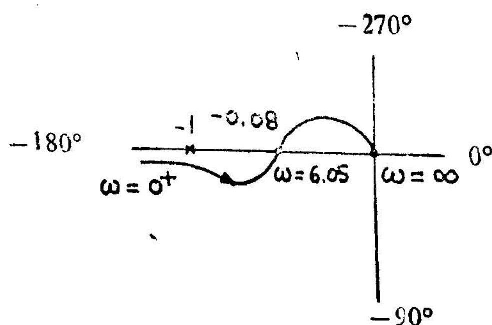
இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$-4\omega^2+145 = 0$ அல்லது $\omega = 6.05$

$\omega = 6.05$ எனில் $G = 0.08$

$\phi = -180°$

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து பின்வரும் கோணதூரப் படம் கிடைக்கிறது.



படம் 6.27 கோண தூரப் படம் $\frac{0.25(1+4s)}{s^2(1+0.25s)(1+0.1s)}$

(ஆ) $$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s-1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega+3)(j\omega-1)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{3}$$

$$-\left(180 - \tan^{-1}\frac{\omega}{1}\right)$$

தொடக்கம் :

$\omega = 0^+$ எனில் $G = \frac{2K}{3}$

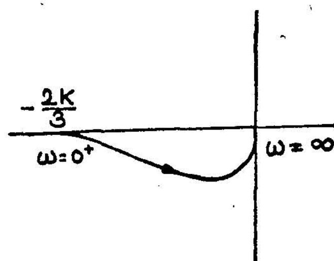
$$\phi = -180°$$

முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = 0$

$$\phi = -90°$$

எனவே கோண தூரப்படத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையலாம்.



படம் 6.28 கோண தூரப் படம் $\frac{K(s-2)}{(s+3)(s-1)}$

(இ) $G(s) = \frac{K(s+1)}{(1-s)}$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{(1-j\omega)} = G\angle\phi$$

$$G = \frac{K\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+1}} = K$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{1} + \tan^{-1}\frac{\omega}{1} = 2\tan^{-1}\omega$$

தொடக்கம் :

$\omega + 0^+$ எனில் $G = K$
$\phi = 0$

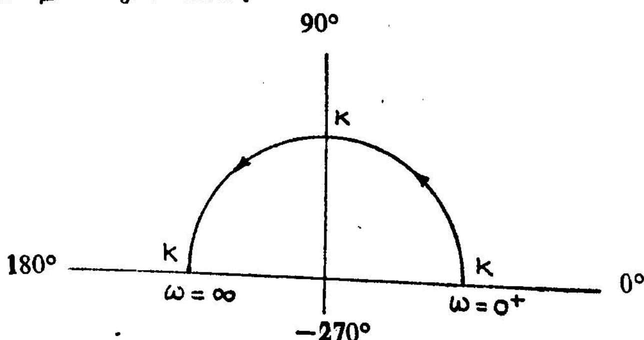
முடிவு :

$\omega = \infty$ எனில் $G = K$
$\phi = 180°$

y-அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$\omega = 1$ எனில் $G = K$
$\phi = 90°$

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து தெரிய வரும் கோண தூரப் படத்தைக் கீழே காண்க :



படம் 6.29 கோண தூரப் படம் $\dfrac{K(s+1)}{-(s-1)}$

6.2.4 தோராய வீச்சு விகிதப் படம் (Approximate magnitude plot)

$$G(s) = \frac{K(1+Ts)}{s(1+\alpha Ts+T^2s^2)} \text{ என்க.}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T)}{j\omega(1+j\alpha T\omega - T^2\omega^2)}$$

$$G = \frac{K\,|1+j\omega T|}{|j\omega||1+j\alpha T\omega - \omega^2 T^2|}$$

டெசிபல் $G = 20 \log_{10} G$

$$20 \log G = 20 \log K + 20 \log |1+j\omega T| - 20 \log |j\omega| - 20 \log |1+j\alpha T\omega - \omega^2 T^2|$$

இச் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரு தோராய வீச்சு விகிதப் படம் வரைந்து பிறகு எல்லாவற்றையும் ஒன்றாய் இணைக்கையில் முழுமைத் தோராய வீச்சு விகிதப் படம் கிடைக்கும்.

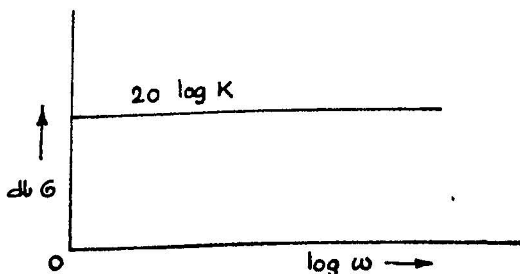
இத் தோராய வீச்சு விகிதப் படத்தில் x அச்சில் அலைவெண் ω-வும் (மடக்கை அளவை) y அச்சில் டெசிபல் G-யும் (நேர் அளவை) எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.

இது போடே வீச்சு விகிதப் படம் (Bode magnitude plot), மூலைப் படம் (corner plot), ஈற்றணுகிப் படம் (Asymptotic plot) என்ற பல பெயர்களால் அழைக்கப்படுகிறது.

இதில் வளை கோடுகளுக்குப் பதில் நேர்கோடுகள் வரையப் படுவதால் மூலைகள் உண்டாகின்றன. எனவே மூலைப்படம் என்ற பெயர் வந்தது.

நேர்கோடுகள் வளைகோடுகளுக்கு வரம்பிலியில் தொடு கோடுகளாக (tangents at infinity) அமைவதால் ஈற்றணுகிப் படம் என்ற பெயரும் வழங்குகிறது.

இனி வரை முறையைக் காண்போம் :



படம் 6.30 போடே வீச்சுப் படம்

(அ) $G(s) = K$ என்க.

$$G(j\omega) = K$$

$$G = K$$

$$db\ G = 20 \log K$$

எல்லா அலைவெண்களுக்கும் G-யின் மதிப்பு $20 \log K$ டெசிபலில் மாறாது நிற்கிறது. இதன் படம் ஒரு கிடைக்கோடு.

(ஆ) $G(s) = s^N$ (ஆயத்தில் உள்ள சுழியெண் அல்லது பேரெண்) என்க.

$$G(j\omega) = (j\omega)^N$$

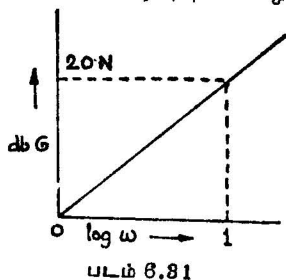
$$G = \omega^N$$

$$db\ G = 20 \log \omega^N \quad = 20N \log \omega$$

இது $y = mx$ என்ற உருவில் உள்ளது.

$$y = db\ G$$
$$x = \log \omega$$
$$m = 20N$$

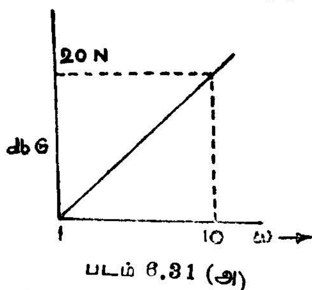
அதாவது $db\ G$, y–அச்சிலும், $\log \omega$, x–அச்சிலும் இருப்பின் வரை படம் ஆயத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோடு ஆகும்.



படம் 6.81

போடே வீச்சுப் படம் $G(s) = s^N$

≡



படம் 6.81 (அ)

போடே வீச்சுப் படம் $G(s) = s^N$

$$\text{இதன் சாய்வு} = \frac{db\ G_2 - db\ G_1}{\log \omega_2 - \log \omega_1}$$

$$= \frac{db\ G_2 - db\ G_1}{\log \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

$$= \frac{20\ N - 0}{1 - 0} = 20N \frac{\text{டெசிபல்*}}{\text{பதிமம்}}$$

*$\log \omega$ வில் பெயர்ச்சி 1 எனில் ω பத்து மடங்கு ஆகிறது.

$$\left.\begin{array}{l} \log \omega = 0 \\ \log \omega = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \omega = 1 \\ \omega = 10 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \log \omega = 2 \\ \log \omega = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \omega = 100 \\ \omega = 1000 \end{array}$$

இவ்வாறு ஓர் அலைவெண்ணில் இருந்து அதைப்போல் 10 மடங்கு ஆன ஓர் அலைவெண் வரை உள்ள அலை வரிசை (frequeney band) 'பதிமம்' (decade) எனப்படும்.

இதுபோல் 'இருமம்' (octave) என்றோர் அலகும் உண்டு.

$\omega = 1$; $20 \log \omega = 0$

$\omega = 2$; $20 \log \omega = 6$

$\omega = 4$; $20 \log \omega = 12$

$\omega = 8$; $20 \log \omega = 18$

அதாவது, ஓர் அலைவெண்ணில் இருந்து அதைப் போல் இரு மடங்கான அலைவெண் வரையில் உள்ள அலை வரிசை இருமம் (octave) எனப்படும்.

ஏதாவது இரு அலைவெண்களுக்கு இடையில் உள்ள

$$\text{பதிமங்கள் (decades)} = \frac{\log \frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log 10}$$

$$\text{இருமங்கள் (octaves)} = \frac{\log \frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log 2}$$

1 பதிமம் = 3.33 இருமம்

$$20 \frac{\text{டெசிபல்}}{\text{பதிமம்}} = \frac{20}{3.33} \frac{\text{டெசிபல்}}{\text{இருமம்}} = 6 \frac{\text{டெசிபல்}}{\text{இருமம்}}$$

$\log \omega = 0$ எனில் $\omega = 1$.

எனவே s^N என்பதன் வீச்சு விகிதப் படம் 20 N டெசிபல்/பதிமம் சாய்வில், ($\omega = 1$, $db\ G = 0$) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு ஆகும்.

(இ) $G(s) = Ks^N$ என்க.

$$G(j\omega) = K(j\omega)^N$$

$$G = K\omega^N$$

$$db\ G = 20N \log \omega + 20 \log K$$

இது $y = mx + C$ என்ற உருவில் உள்ளது.

y : $db\ G$

x : $\log \omega$

m : $20N$ டெசிபல்/பதிமம்

C : $20 \log K$ டெசிபல்

அதாவது Ks^N இன் வீச்சு விகிதப் படம் $20N$ டெசிபல்/பதிமம் சாய்வில் ($\omega - 1$, $G = 20 \log K$) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு ஆகும்.

(ஈ) $G(s) = (1+Ts)^N$

$$G(j\omega) = (1+j\omega T)^N$$

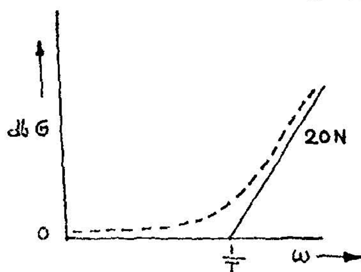
$$G = 1 \quad ; \quad \omega \ll 1$$

$$G = \omega T \quad ; \quad \omega \gg 1$$

$$db\ G = 20 \log 1 = 0 \quad ; \quad \omega \ll 1$$

$$db\ G = 20 \log (\omega T)^N = 20N \log \omega T \; ; \quad \omega \gg 1$$

எனவே, இதுவும் சிறிய அலைவெண்களுக்கு ($\omega \ll 1$) கிடை



படம் 6.32 போடே வீச்சுப் படம் $G(s) = (1+Ts)^N$

அச்சில் (0 டெசிபல் கோட்டில்) படியும் நேர்கோடாகவும், பெரிய அலைவெண்களுக்கு ($\omega \gg 1$) $20N$ டெசிபல்/பதிமம் சாய்வில் $\left(\log \omega T = 0 \text{ அல்லது } \omega = \frac{1}{T}\right)$ என்ற புள்ளியின் வழியாகக் கிடை அச்சைக் கடக்கும் நேர்கோடு ஆகவும் இருக்கிறது.

$(1+Ts)^N$ என்ற உறுப்பின் வீச்சு விகிதப் படத்தில் $\omega = \frac{1}{T}$ என்ற அலைவெண்ணில் ஒரு மூலை (corner) உண்டாவதால்

அதை 'மூலை அலைவெண்' (corner frequency) ω_c என்று அழைக்கிறோம்.

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{T}}$$

கால மாறிலியின் தலைகீழ் மதிப்பே மூல அலைவெண் ஆகும்.

குறிப்பு: மூலை அலைவெண்ணில் வழு: தோராய வீச்சு விகிதப் படத்தில் மூல அலைவெண்ணில் டெசிபல் பெருக்கம் (decibel gain) 0, (சுழி) ஆகும்.

உண்மையான டெசிபல் பெருக்கம் :

$$\begin{aligned} db\ G &= 20N \log |1+j\omega_c T| \\ &= 20N \log |1+j1| \\ &= 20N \log 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 3N \text{ டெசிபல் ஆகும்.} \end{aligned}$$

மூலை அலைவெண்ணிற்கு (ω_c) ஓர் இருமம் முன்னும் ($\frac{1}{2}\omega_c$), ஓர் இருமம் பின்னும் ($2\omega_c$)

வழு : N டெசிபல் ஆகும்.

(ஈ) $G(s) = (1+\alpha Ts+T^2s^2)$ என்க.

$G(j\omega) = (1+j\omega\alpha T) - \omega^2T^2$.

$\omega \ll 1$ எனில் $G \simeq 1$

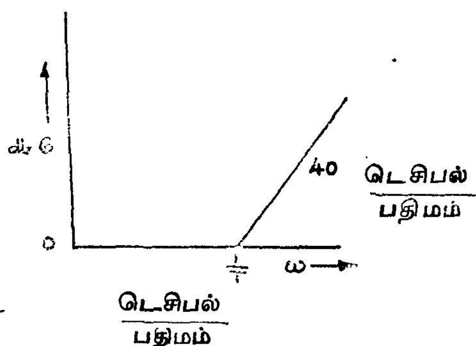
$\omega \gg 1$ எனில் $G \simeq \omega^2T^2$

அதாவது,

$\omega \ll 1$ எனில் $db\ G = 20 \log 1 = 0$

$\omega \gg 1$ எனில் $db\ G = 20 \log \omega^2T^2 = 40 \log \omega T$

எனவே, $(1+\alpha Ts+T^2s^2)$ என்ற உறுப்பின் தோராய வீச்சு விகிதப் படம் இரு நேர்கோடுகளால் ஆனது என்று தெரிகிறது. சிறிய அலைவெண்களுக்கு ($\omega \ll 1$) '0' டெசிபலில் கிடை அச்சோடு இணைந்த நேர்கோடும், பெரிய அலைவெண்களுக்கு 40 டெசிபல்/பதிமம் சாய்வில் ($\omega = \frac{1}{T}$, $dbG=0$) என்ற புள்ளியில் கிடை அச்சைக் கடக்கும் நேர் கோடும் ஆக இரு பிரிவுகள்.



படம் 6.33 போடே வீச்சுப் படம் $G(s) = 1+\alpha\,Ts+T^2 s^2$

குறிப்பு : இத் தோராய முறையில் $(1 + \alpha Ts + T^2s^2)$, $(1+T^2s^2)$, $(1+Ts)^2$ ஆகிய மூவகை உறுப்புக்களுக்கும் ஒரு வடிவை உடைய தோராய வீச்சு விகிதப் படங்களே கிடைப்பதைக் கவனிக்க.

இவ்வாறு வேறுபட்ட உறுப்புக்களின் தோராய வீச்சு விகிதப் படங்களைத் தனித் தனியே ஒரே வரைதாளில் வரைந்து, இயல் முறையில் கூட்டினால் (algebraic addition) முழுமைத் தோராய வீச்சு விகிதப் படம் கிடைக்கிறது.

இதன் வரை முறைக் குறிப்புக்களை அடுத்த பகுதியில் காண்போம்.

6.2.5 : முழுமைத் தோராய வீச்சு விகிதப் படம் வரைமுறைக் குறிப்புக்கள் : (Drawing the overall approximate magnitude plot—Working rules).

1. கொடுத்துள்ள செலுத்துச் சார்பைக் கால மாறிலி உருவில் (time constant form) எழுதுக. மூல அலைவெண்களைத் ($\omega_c = \frac{1}{T}$) தனியே குறித்துக் கொள்க.

2. Ks^N என்ற உறுப்பை முதலில் எழுதிக் கொள்க. இதன் சாய்வை (Slope) $20N$ டெசிபல்/பதிமம் எழுதுக. பிறகு, பிற உறுப்புக்களையும் மூல அலைவெண்களில் ஏறு வரிசையில் எழுதிக் கொண்டு, அவற்றின் சாய்வுகளையும் குறிக்க.

3. நேர் கோடுகளின் தனித்தனிச் சாய்வுகளை அடுத்தடுத்துக் கூட்டி, முழுமை வீச்சுப் படச் சாய்வுகளைக் கணிக்க.

4. அலை வரிசை: முதல் நேர்கோடு 0 முதல் முதலாம் மூலை அலைவெண் வரை; இரண்டாம் நேர்கோடு முதலாம் மூலை முதல் இரண்டாம் மூலை வரை; மூன்றும் நேர்கோடு இரண்டாம் மூலை முதல் மூன்றும் மூலை வரை......இவ்வாறு தொடர்ந்து இறுதி நேர்கோடு கடைசி மூலையில் இருந்து வரம்பிலி வரை நீளும்.

5. ஓர் அரை மடக்கை வரைதாளில் (semilog sheet) dbG நிலை அச்சிலும் (நேர் அளவை), ω கிடை அச்சிலும் (மடக்கை அளவை) எடுத்துக்கொண்டு மூலை அலைவெண்களைக் குறிக்க.

6. முதல் நேர்கோட்டை (Ks^N) $20N$ டெசிபல்/பதிமம் சாய்வில் ($\omega=1$, $dbG=20 \log K$) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லு மாறு வரைக. இது முதல் மூலை அலைவெண் வரை நீளும்.

முதல் மூலை அலைவெண் $\omega_c \ll 1$ எனில், முதல் நேர்கோடு 1-க்கு முன்பாகவே நின்றுவிடும். அப்பொழுது அதன் நீட்சி (extension), $\omega=1$, $dbG=20 \log K$) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லவேண்டும்.

7. முதல் நேர்கோட்டின் பின் முனையில் இருந்து, அடுத்த நேர்கோட்டை அதற்கு உரிய முழுச் சாய்வில் இரண்டாம் மூலை அலைவெண் வரை வரைக. இவ்வாறு கடைசி நேர்கோடு வரை வரைந்து முடிக்க.

8. மூலை அலைவெண்களிலும், முன்னும், பின்னும் தேவைப் படின் $3N_s$ N டெசிபல் வீச்சு விகிதத் திருத்தம் புரியவும்.

குறிப்பு: s-தளத்தின் வலது பாதியில் பேரெண்களை (poles in the RHP) இல்லாத செலுத்துச் சார்புகள் மீச்சிறு பருவச் செலுத் துச் சார்புகள் (minimum phase transfer functions) என அழைக் கப்படும்.

சான்று: $G(s) = \dfrac{K(s+4)}{s(s+1)(s+3)}$. இதன் பேரெண்கள்

$s=0, -1, -2$. இவற்றில் எதுவும் நேர்க்குறி எண் (positive number) அல்ல.

மாதிரி வினா 6.10

கீழ்க் காணும் செலுத்துச் சார்பில் இருந்து தோராய போடே வீச்சு விகிதப் படத்தை வரைக.

$$G(s) = \frac{16(s+0.25)}{s(s+2)(s^2+0.5\,s+1)}$$

தீர்வு :

$$G(s) = \frac{16\,(s+0.25)}{s\,(s+2)\,(s^2+0.5\,s+1)}$$

$$= \frac{2\,(1+4\,s)}{s\,(1+0.5\,s)\,(1+0.5\,s+s^2)}$$

மூலை அலைவெண்கள் : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{0.5}$, $\frac{1}{1}$

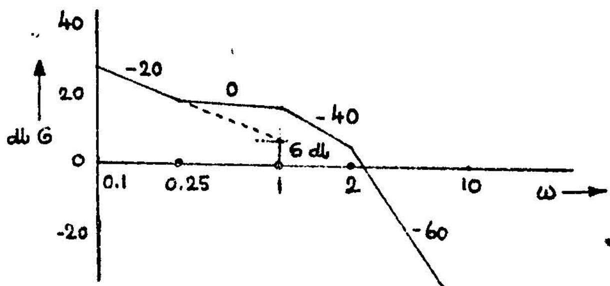
அதாவது 0,25, 1, 2.

$20 \log K = 20 \log 2 = 20 \times 0.3 = 6$ டெசிபல்

உறுப்புக்களும் சாய்வுகளும் :

உறுப்பு	தனிச் சாய்வு டெசிபல்/பதிமம்	மொத்த சாய்வு டெசிபல்/பதிமம்	அலை வரிசை ரேடியன்/ நொடி
$2\,s^{-1}$	−20	−20	$0 \rightarrow 0.25$
$(1+4\,s)$	+20	0	$0.25 \rightarrow 1$
$(1+0.5s+s^2)^{-1}$	−40	−40	$1 \rightarrow 2$
$(1+0.5s)^{-1}$	−20	−60	$2 \rightarrow \infty$

தோராய போடே வீச்சுப்படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6.34 போடே வீச்சுப் படம்

$$G(s) = \frac{(16s+0.25)}{s(s+2)\,(s^2+0.5s+1)}$$

மாதிரி வினா 6.11

$$G(s) = \frac{400\,(1+0.1\,s)}{s^2\,(1+0.01\,s)^2}$$

என்ற செலுத்துச் சார்பில் இருந்து போடே வீச்சு விகிதப் படம், போடே பருவப் படம் ஆகியவற்றின் எளி வடிவங்களை வரைக.

தீர்வு :

$$G(s) = \frac{400\,(1+0.1\,s)}{s^2\,(1+0.01\,s)^2}$$

மூலை அலை வெண்கள் : $\frac{1}{0.1}$, $\frac{1}{0.01}$ அதாவது 10, 100

$$20 \log K = 20 \log 400$$
$$= 20\,(\log 4 + \log 100)$$
$$= 20\,(0.6+2) = 52 \text{ டெசிபல்}$$

உறுப்புக்களும் சாய்வுகளும் :

உறுப்பு	தனிச் சாய்வு டெசிபல்/ பதிமம்	மொத்த சாய்வு டெசிபல்/ பதிமம்	அலை வரிசை ரேடியன்/ நொடி
$400\,s^{-2}$	−40	−40	$0 \to 10$
$(1+0.1\,s)$	+20	−20	$10 \to 100$
$(1+0.01s)^{-2}$	−40	−60	$100 \to \infty$

$$\phi = \tan^{-1} 0.1\,\omega - 2\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - 2\tan^{-1} 0.01\,\omega$$

$\omega = 0^+$ எனில் $\phi = -180^\circ$

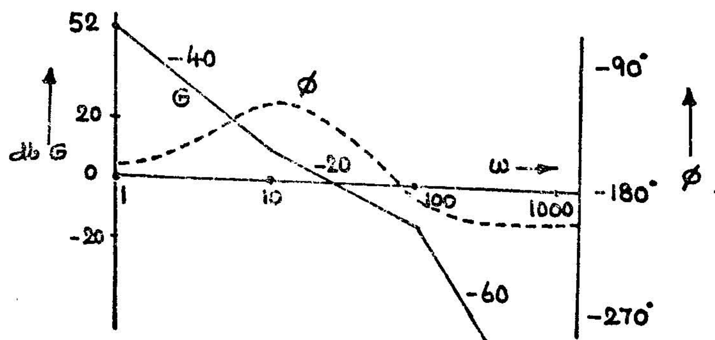
$\omega = \infty$ எனில் $\phi = -270^\circ$

$\omega = 1$ எனில் $\phi = -175.5^\circ$

$\omega = 10$ எனில் $\phi = -146^\circ$

$\omega = 100$ எனில் $\phi = -186^\circ$

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து பின்வரும் போடே படங்கள் கிடைக்கின்றன.

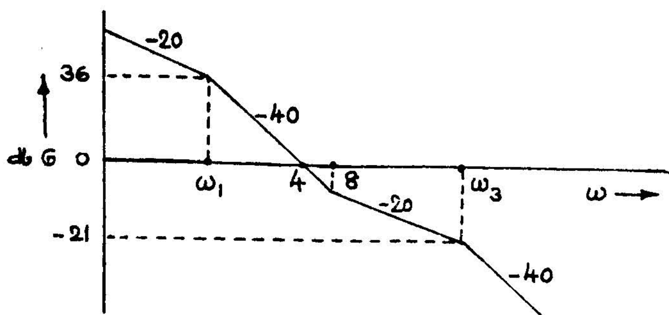


படம் 6.35 போடே படம்

$$G(s) = \frac{400(1+0.1s)}{s^2(1+0.01\,s)^2}$$

மாதிரி வினா 6.12

கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள தோராய போடே வீச்சுப் படத்தில் இருந்து செலுத்துச் சார்பை வருவிக்க. வழு மாறிலிகளையும் கணிக்கவும்



படம் 6.36 போடே வீச்சுப்படம்

$$G(s) = \frac{31.6(1+0.125s)}{s(1+2s)\,(1+0.044s)}$$

தீர்வு :

ω_1, ω_3, K இவற்றைக் கணித்து விட்டால், செலுத்துச் சார்பை எழுதுவது எளிது.

$\omega = \omega_1$ எனில் $db\ G = 36$

$\omega = 4$ எனில் $db\ G = 0$

எனவே, சாய்வு : $\dfrac{0-36}{\log \dfrac{4}{\omega_1}} = -40 \dfrac{\text{டெசிபல்}}{\text{பதிமம்}}$

$\therefore \log \dfrac{4}{\omega_1} = 0.9$
$= \log 8$

$\dfrac{4}{\omega_1} = 8$ அல்லது $\omega_1 = 0.5$ ரேடியன்/நொடி

ω_8 யின் மதிப்பைக் காண, $\omega=8$ என்கையில் $db\ G$ தெரிய வேண்டும்.

$\omega = 4$ எனில் $db\ G = 0$

$\omega = 8$ எனில் $db\ G = x$ என்க.

$\dfrac{x-0}{\log \dfrac{8}{4}} = -40$

$\therefore x = -40 \times \log \dfrac{8}{4}$

$= -40 \times 0.3 = -12$ டெசிபல்

இனி,

$\dfrac{-21-(-12)}{\log \dfrac{\omega_8}{8}} = -20$

$\therefore \log \dfrac{\omega_8}{8} = 0.45 = \log 2.82$

எனவே, $\omega_8 = 8 \times 2.82 = 22.6$ ரேடியன்/நொடி

Kயின் மதிப்பைக் காண, முதற்கோடு ($\omega = 1$, $db\ G = 20 \log K$) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்வதை நினைவிற் கொள்ளுகிறோம்.

$\omega = 0.5$ எனில் $db\ G = 36$

$\omega = 1$ எனில் $db\ G = x$ என்க.

$\dfrac{x-36}{\log \dfrac{1}{0.5}} = -20$ (முதற்கோட்டின் சாய்வு)

$$\therefore \quad x = 36 - 20 \times \log \frac{1}{0.5}$$

$$= 36 - 20 \times \log 2$$

$$= 36 - 6 = 30 \text{ டெசிபல்}$$

$$20 \log K = 30$$

$$\log K = \frac{30}{20} = 1.5 = \log 31.6$$

எனவே $K = 31.6$

சாய்வுகளும் உறுப்புக்களும்

அலை வரிசை ரேடியன்/ நொடி	மொத்த சாய்வு டெசிபல்/ பதிமம்	தனிச் சாய்வு டெசிபல்/ பதிமம்	உறுப்பு
$0 \rightarrow 0.5$	-20	-20	$31.6\, s^{-1}$
$0.5 \rightarrow 8$	-40	-20	$\left(1 + \frac{1}{0.5}\, s\right)^{-1}$
$8 \rightarrow 22.6$	-20	$+20$	$\left(1 + \frac{1}{8}\, s\right)$
$22.6 \rightarrow \infty$	-40	-20	$\left(1 + \frac{1}{22.6}\, s\right)^{-1}$

எனவே,

$$\text{செலுத்துச் சார்பு } G(s) = \frac{31.6\,(1 + 0.125\, s)}{s\,(1 + 2s)\,(1 + 0.0442 s)}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \infty \quad (\text{எல்லை})$$

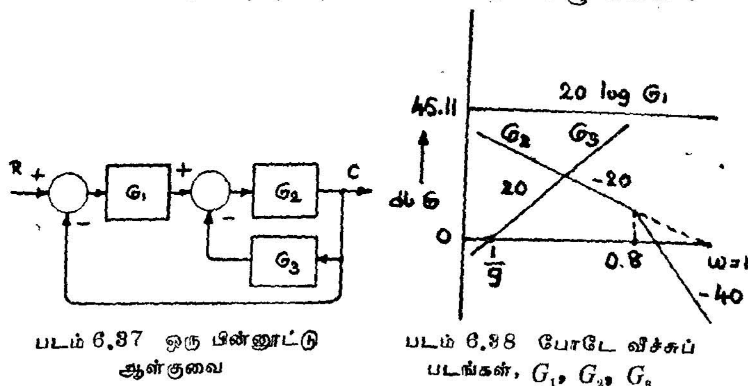
$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G(s) = 31.6 \quad (\text{எல்லை})$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2\, G(s) = 0 \quad (\text{எல்லை})$$

மாதிரி வினா 6.13

ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவையின் பெட்டிப் படமும், செலுத்துச் சார்புகள் G_1, G_2, G_3 ஆகியவற்றின் தோராய வீச்சு விகிதப் படங்களும் கீழே காட்டப் பட்டுள்ளன.

ஆள் குவையின் δ, ω_d ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க. ஊட்டம் 10 ரேடியன்/நொடி எனில் கடைநிலை வழு என்ன ?



படம் 6.37 ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவை

படம் 6.38 போடே வீச்சுப் படங்கள், G_1, G_2, G_3

தீர்வு 1

$$G_1 = K \qquad 20 \log K = 45.11$$

$$\therefore \quad K = 180$$

$$G_2 = \frac{K}{s\left(1 = \frac{1}{0.8}\, s\right)} \qquad 20 \log K = 0$$

$$\therefore \quad K = 1$$

$$G_3 = T_s \quad T = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{1/9} = 9$$

கொடுத்துள்ள பெட்டிப் படத்தைச் சுருக்கி, ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை ஆக்கினால்

$$G = G_1 \cdot \frac{G_2}{1 + G_2 G_3}$$

$$= 180 \; \frac{\dfrac{1}{s\,(1+1.25\, s)}}{1 + \dfrac{1}{s\,(1+1.25\, s)} \cdot 9s}$$

$$= \frac{180}{s(1+1.25s)+9s}$$

$$= \frac{18}{s(1+0.125s)}$$

சிறப்பியற் சமன்பாடு $1+G = 0$

$$1+\frac{18}{s(1+0.125s)} = 0$$

$$s(1+0.125s)+18 = 0$$

$$s^2+8s+144 = 0$$

இதை $s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2 = 0$ என்ற பொது உருவுடன் ஒப்பிட,

$$2\delta\omega_n = 8$$

$$\omega_n^2 = 144$$

எனவே $\omega_n = 12$

$$\delta = \frac{8}{2\times 12} = \frac{1}{3}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

$$= 12\sqrt{1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$= 11.3$ ரேடியன்/நொடி

$r = 10t$

$$R = \frac{10}{s^2}$$

$$e_{ss} = \text{எல்லை}_{s\to 0} \frac{sR}{1+G}$$

$$= \text{எல்லை}_{s\to 0} \frac{s.\frac{10}{s^2}}{1+G}$$

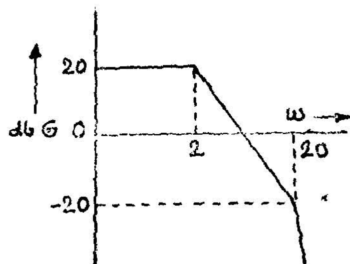
$$= \frac{10}{\text{எல்லை}_{s\to 0} sG}$$

$$= \frac{10}{18}$$

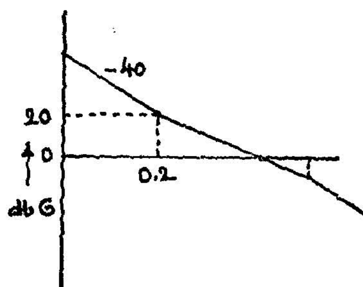
எனவே கடை நிலை வழு $\frac{5}{9}$ ரேடியன் ஆகும்.

மாதிரி வினா 6.14.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து கடை நிலை வழு மாறிலிகளைக் காண்க.



படம் 6.39
K_p இன் மதிப்பு



படம் 6.40
K_v-இன் மதிப்பு

தீர்வு :

கடைநிலை வழு மாறிலிகளைக் காண, முழுச் செலுத்துச் சார்பையும் வருவிக்கத் தேவை இல்லை.

எவ் வகைக் குலைவயிலும் சுழியற்ற வரம்புடை எண்ணுக (finite and non-zero number) ஒரே ஒரு வழு மாறிலிதான் இருக்கும்.

வகை '0' குலைவயில் $K_p = K$

வகை '1' குலைவயில் $K_v = K$

வகை '2' குலைவயில் $K_a = K$

என்பவையே அவை.

தோராய வீச்சு விகிதப் படத்தில் முதற் கோட்டின் சாய்வு குலைவயின் வகையையும் $\omega = 1$ என்ற அலைவெண்ணில் அதன் உயரம் 20 log Kயின் மதிப்பையும் தருகின்றன.

சாய்வு — 0 டெசிபல் 1 பதிமம் எனில் வகை '0'

சாய்வு —20 ,, எனில் வகை '1'

சாய்வு —40 ,, எனில் வகை '2'

(அ) முதற்கோட்டின் சாய்வு '0' டெசிபல்/பதிமம். எனவே குலைவ வகை '0' இதில் $K_p = K$, $K_v = 0$, $K_a = 0$. $\omega = 1$ என்ற அலைவெண்ணில் முதற் கோட்டின் உயரம் 20 டெசிபல் $20 \log K = 20$ $\therefore K = 10$. எனவே $\underline{K_p = 10}$.

(ஆ) முதற் கோட்டின் சாய்வு −40 டெசிபல்/பதிமம். எனவே குலைவ வகை 2. இதில் $K_p = \infty$, $K_v = \infty$, $K_a = K$. $\omega = 1$ என்ற அலைவெண்ணில் முதற் கோட்டின் உயரம் x என்க.

$\omega = 0.2$ எனில் $db\ G = 20$

$\omega = 1$ எனில் $db\ G = x$

$$\frac{x - 20}{\log \frac{1}{0.2}} = -40$$

$x = 20 - 40 \log 5 = 20 - 28 = -8$ டெசிபல்

$$20 \log K = -8$$

$$\log K = -0.4$$

$$= -1 + 0.6$$

$$= \log \frac{1}{10} + \log 4$$

$$= \log \frac{4}{10}$$

எனவே $K = 4/10$. $\therefore K_a = \frac{4}{10}$

6.3 குறை சுற்று-செலுத்துச் சார்பும் நிறை சுற்று அலை விளைவும் : (Open loop Transfer function and closed loop frequency response).

6.6.1 மாறு M, N வட்டங்கள் (Constant M and N circles),

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு $G(s)$ என்க. நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

அதன் அலை விளைவு

$$M(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

$P,(x+jy)$ என்பது $G(j\omega)$—வில் ஒரு புள்ளி என்க. அதாவது, அலைவெண் ω-வின் குறிப்பிட்ட ஒரு மதிப்பிற்கு உரிய $G(j\omega) = x+jy$ என்று பொருள்.

$$M(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \frac{x+jy}{1+x+jy}$$

எனவே, $M = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \tan^{-1}\frac{y}{1+x}$$

$N = \tan\theta$, என்க.

M இன் மதிப்பு மாறுவண்ணம் நகரும் $G(j\omega)$வில் உள்ள $P, (x+jy)$ எனும் புள்ளியின் நியமப் பாதை ஒரு வட்டம் ஆகும்.

M இன் வேறுபட்ட மதிப்புக்களுக்கு ஒரு வட்டக் குடும்பமே கிடைக்கிறது. இவ் வட்டங்களை மாறு M வட்டங்கள் (constant M circles) என அழைக்கிறோம்.

N இன் மதிப்பு மாறுவண்ணம் நகரும் $G(j\omega)$வில் உள்ள புள்ளி $P, (x+jy)$ ஒன்றின் நியமப் பாதையும் ஒரு வட்டம் ஆகும்.

N இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு ஒரு வட்டக் குடும்பமே கிடைக்கிறது. இவ் வட்டங்களை 'மாறு-N வட்டங்கள்' (constant N circles) என அழைக்கிறோம்.

6.3.2 மாறு-M, மாறு-N வட்டங்களை வருவித்தல் (Derivation of constant M and N circles)

மாறு-M வட்டங்கள் :

$$M = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \quad \text{[பகுதி 6. 3 1 இல் இருந்து]}$$

$=$ மாறிலி என்க.

எனவே,

$$M^2 = \frac{x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$(1+x)^2+y^2 = \frac{1}{M^2}(x^2+y^2)$$

$$\left(1-\frac{1}{M^2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{M^2}\right)y^2+2x=-1$$

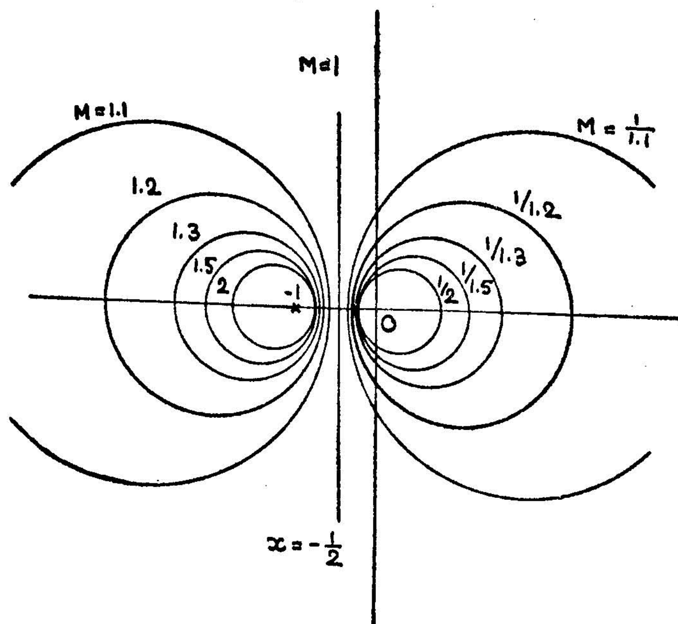
$$x^2+y^2+\frac{2M^2}{M^2-1}x=-\frac{M^2}{M^2-1}$$

$$x^2+2\frac{M^2}{M^2-1}x+\left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2-\frac{M^2}{M^2-1}$$

$$\left(x+\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2+(y-0)^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2}$$

இது $(x+a)^2+(y+b)^2=c^2$ என்ற வட்டச் சமன்பாட்டின் உருவில் இருக்கிறது.

எனவே, $P_2(x+jy)$ இன் நியமப் பாதை, $\left(\frac{-M^2}{M^2-1},\ 0\right)$ என்ற மையமும், $\left|\frac{M}{M^2-1}\right|$ என்ற ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் என்பது ஒரு தெளிவு.



படம் 6.41 : மாரு-M வட்டங்கள்

M இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு, மாறு-M வட்டங்கள் கிடைக்கின்றன. (படம் 6.41)

மாறு-N வட்டங்கள் :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \tan^{-1}\frac{y}{1+x} \quad \text{[பகுதி 6.3.1 இல் இருந்து]}$$

$$N = \tan\theta$$

$$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} - \tan^{-1}\frac{y}{1+x}\right) = \text{மாறிலி, என்க.}$$

குறிப்பு: $\tan(\tan^{-1}A) = A$

$$\tan(A-B) = \frac{\text{tun } A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

எனவே,

$$N = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{1+x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{1+x}}$$

$$= \frac{y(1+x) - xy}{x(1+x) + y^2}$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2+x}$$

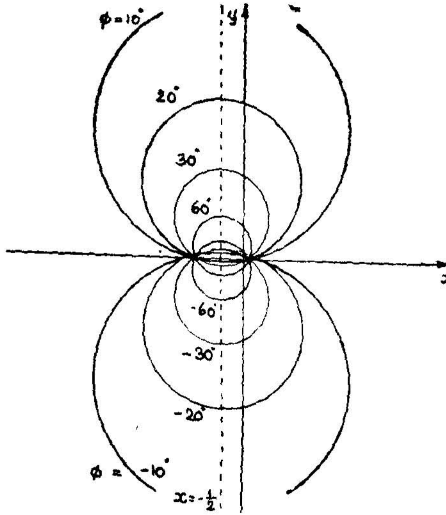
$$\therefore \quad x^2+y^2+x = \frac{1}{N}y$$

$$x^2+2\times\tfrac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2-2\times\frac{1}{2N}y + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2+1}{4N^2}$$

இது $(x+a)^2 + (y+b)^2 = c^2$ என்ற வட்டச் சமன்பாட்டின் உருவை ஒத்து உள்ளது.

எனவே, P, $(x+jy)$ என்பதன் நியமப் பாதை $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right)$ என்ற மையமும், $\left|\frac{\sqrt{N+1}}{2N}\right|$ என்ற ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் என்பது தெளிவு.



படம் 6.42 மாறு-N வட்டங்கள்

N இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு, மாறு-N வட்டங்கள் கிடைக்கின்றன. (படம் 6-42)

6.3.3 M, N வட்டங்களும் நிறை சுற்று அலை விளைவும்: (M, N circles and closed loop frequency response)

மாறு M, N வட்டங்களின் உதவியால், ஓர் ஆள்குவையின் $G(s)$ என்னும் குறைசுற்று-செலுத்துச் சார்பில் இருந்து நிறை சுற்று அலை விளைவைக் கணிக்கலாம். இதன் படிகள் வருமாறு :

1. M, N வட்டங்களும், ஆள்குவையின் $G(s)$உம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. $G(s)$இன் அலை விளைவு $G(j\omega)$வை எழுதிக் கோண தூரப் படத்தைக் கண்ணறடித் தாளில் வரைக.

2. இப் படத்தை, மாறு-M, N வட்டப் படங்களின்மீது ஆயப் புள்ளிகளும், அச்சுக்களும் பொருந்துமாறு வைக்கவும்.

3. அலை வெண்களின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு, $G(j\omega)$வின் கோண தூரப் படமும், மாறு-M வட்டங்களும் வெட்டும்புள்ளிகள் Mஇன் மதிப்புக்களைக் கொடுக்கின்றன.

இதுபோல், கோணதூரப் படமும், மாறு-N வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகள் $N = \tan\theta$ வின் (எனவே θ) மதிப்புக்களைத் தருகின்றன.

4. இவற்றில் இருந்து M, θ அல்லது M, ω ; θ, ω படங்களை வரைதல் இயலும். இவை நிறைசுற்று அலை விளைவைத் தருகின்றன.

5. $G(j\omega)$வின் கோண தூரப் படத்தை எந்த மாறு-M வட்டம், வெட்டாமல் தொட்டுச் செல்கிறதோ, அவ் வட்டத்தின் Mஇன் மதிப்பே M_p ஆகும். தொடும் புள்ளிக்கு ஏற்ற அலைவெண் ωவின் மதிப்பே ω_p ஆகும்.

இவ்வாறு, ஆள்குவையின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பில் இருந்து நேராகவே, நிறைசுற்று அலை விளைவைக் கணித்தல் இயல்கிறது.

6.3.4 ஒத்திசை உச்சத்திற்கு ஏற்ற பெருக்கவெண் ; (K for a specefied M_p)

ஆள்குவைகளின் ஆக்கப் பணியில், குறிப்பிட்ட ஒத்திசை உச்சத்தைத் (resonant peak) தரக்கூடிய பெருக்கவெண்ணைக் (gain K) காணல் அவசியம் ஆகிறது. மாறு-M வட்டங்களைக் கொண்டு இதைக் கணிக்கும் முறை கீழே தரப்படுகிறது.

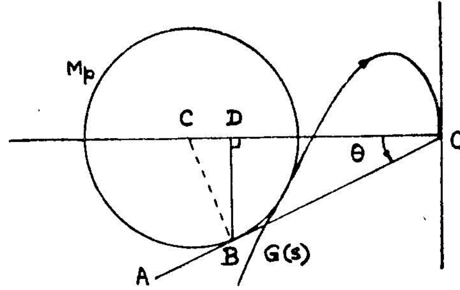
1. $K = 1$ எனக் கொண்டு $G(j\omega)$வின் கோணதூரப் படத்தை வரைக.

2. எதிர்க் குறி-கிடை அச்சுக்குக் (negative real axis) கீழே $\theta = \sin^{-1}\dfrac{1}{M_p}$ என்ற கோணத்தில், ஆயப் புள்ளியில் இருந்து ஒரு நேர்கோடு வரைக.

3. இந்த நேர்கோடு, $G(j\omega)$வின் கோண தூரப் படம் இரண்டையும் தொட்டுச் செல்லுமாறு ஒரு மாறு-N வட்டம் வரைக. பிழை-திருத்த முறையிலேயே (Trial and error method) இதை வரைதல் இயலும்.

4. θ பாகையில் வரையப்படும் நேர்கோடு OA. இதுவும் மாறு-M வட்டமும் தொடுபுள்ளி B. இதில் இருந்து கிடை அச்சுக்கு BD என்ற குத்துக் கோடு வரைக.

5. கிடையச்சைக் குத்துக் கோடு வெட்டும் புள்ளி D. ஆயப் புள்ளியில் இருந்து இதன் தூரம் ODஐ அளக்கவும். OD-யின் தலைகீழ் மதிப்பே, தேவையான பெருக்கவெண் ஆகும். $K = \frac{1}{OD}$



படம் 6.48 M_p-க்கு உகந்த K-யின் மதிப்பு

நிறுவுதல் : படம் 6.43 இல் இருந்து,

$$\sin\theta = \frac{BC}{OC} = \frac{1}{M_p}$$

$$\cos\theta = \frac{OD}{OB} = \frac{OB}{OC}$$

எனவே $OD = \frac{OB^2}{OC}$

$$OB^2 = OC^2 - BC^2$$

$$= \left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 - \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2$$

$$= \frac{M^2(M^2-1)}{(M^2-1)^2}$$

$$= \frac{M^2}{M^2-1}$$

$$OD = \left| \frac{\frac{M^2}{M^2-1}}{\frac{M^2}{M^2-1}} \right| = 1$$

$G(j\omega)$-வின் கோண தூரப் படம் $K = 1$ எனக் கொண்டு வரையப் பட்டுள்ளதால், பெருக்க அலகு K ஆகும்.

அதாவது, உண்மையான $G(j\omega)$ வின் படத்தில்,

அளக்கப் பட்ட $OD \times K = 1$.

எனவே, $$K = \frac{1}{OD}$$

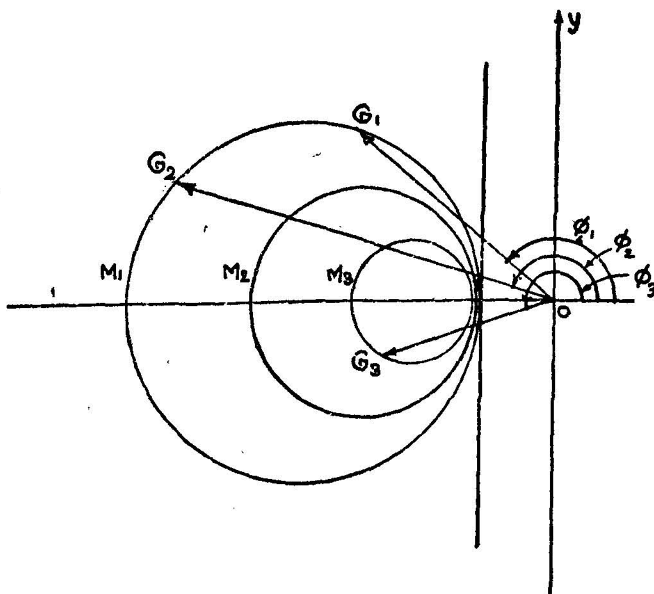
6.3.5 நிக்கல்சு ஆதாரப் படம் (Nichols chart).

வீச்சு - பருவத் தளம் (gain-phase plot) என்பது, டெசிபல் வீச்சு விகிதத்தை நேர் அளவை நிலை அச்சிலும் (linear scale y-axis), பருவப் பெயர்ச்சியை நேர் அளவைக் கிடை அச்சிலும் (linear scale x-axis) கொண்ட தளம் ஆகும்.

வீச்சு-பருவத் தளத்தில் வரையப்படும் மாறு-M, N நியமப் பாதைகளே (இவை வட்டங்களாக இரா) ஒன்றாக நிக்கல்சு ஆதாரப் படம் எனப் பெயர் பெறுகின்றன.

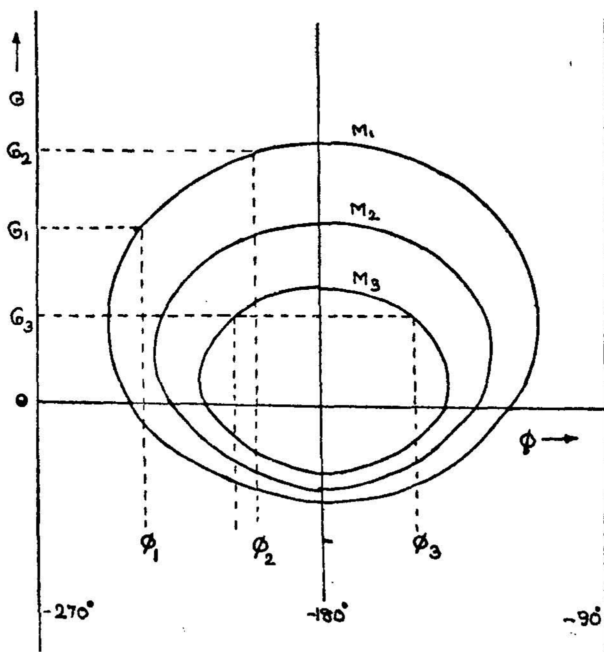
வரைமுறை :

வரைமுறை 1 படி 1



படம் 6.44 நிக்கல்சு ஆதாரப் படம்

வரைமுறை 1 படி 2

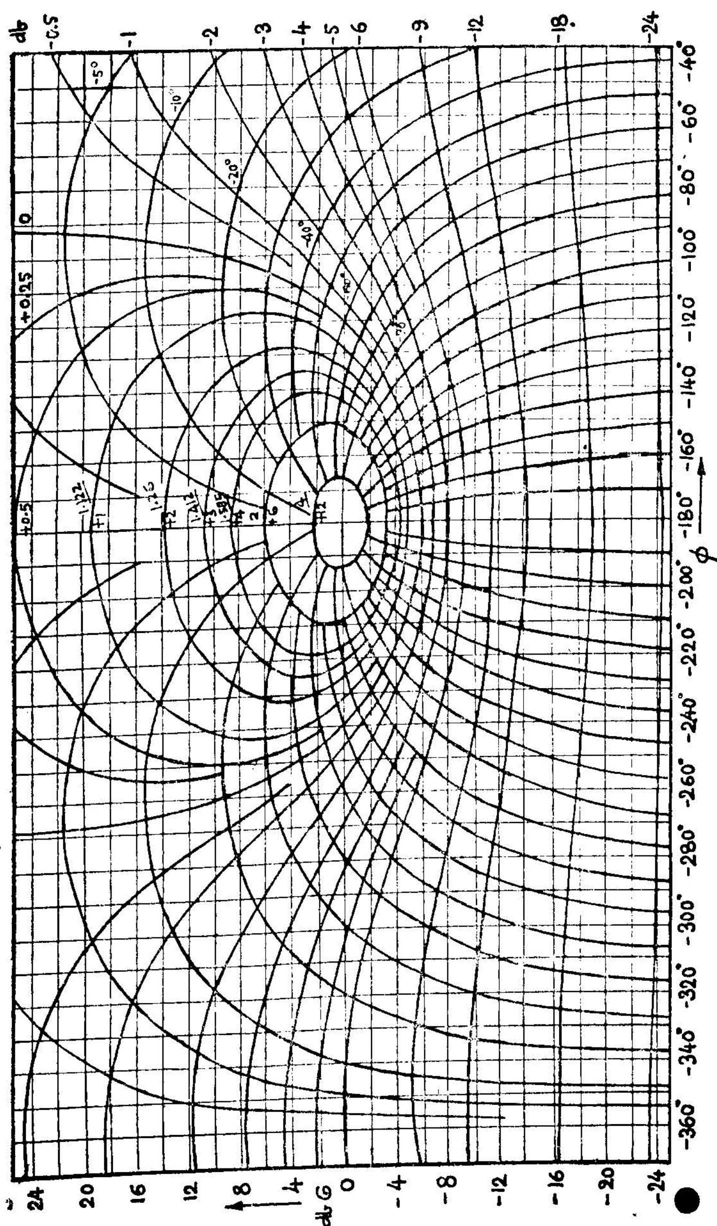


படம் 6.45 நிக்கல்சு ஆதாரப் படம்

ஆயப் புள்ளியில் இருந்து மாரு-M வட்டம் ஒன்றில் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு திசைக் கோடு வரைக. அதன் நீளம் G_1. பருவக் கோணம் ϕ_1 ஒரே பருவக் கோணத்திற்கு இரண்டு வெட்டுப் புள்ளிகளும், எனவே இரண்டு நீளங்களும் G_1, G_1^1.

டெசிபல் நீளம் G_1, பருவக் கோணம் ϕ_1 இவை வீச்சு-பருவத் தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கின்றன. இவ்வாறு, அதே மாரு-M வட்டத்தில் பல புள்ளிகளை ஒன்றன்பின் ஒன்ருக எடுத்துக் கொண்டு, மேற் கூறிய முறையில் வீச்சு-பருவத் தளப் புள்ளிகளைக் குறித்து, அவற்றை இணைத்து, மாரு-M நியமப் பாதையை வரையலாம்.

மீதி உள்ள மாரு-M வட்டங்களும், அவ்வாறே மாரு-N வட்டங்களும் இதே முறையில் வீச்சு-பருவத் தளத்திற்கு மாற்றப் படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைப்பதே நிக்கல்சு ஆதாரப் படம் (படம் 6.46)



படம் 6.46 நிக்கல்சு ஆதாரப்படம்

நிக்கல்சு ஆதாரப் படப் பயன்கள்.

1. $G(j\omega)$வின் வீச்சு-பருவப் படத்தை (gain-phase plot) நிக்கல்சு ஆதாரப் படத்தின்மீது வைத்து, நிறை சுற்று அலை விரைவை உடனே அறியலாம்.

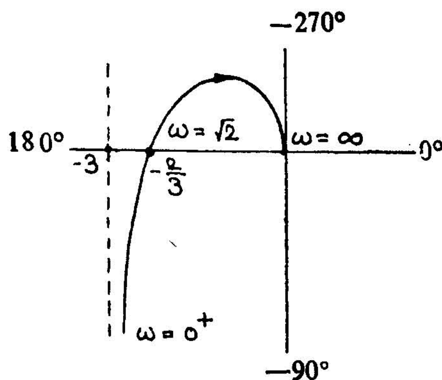
2. M_p, ω_p : நிக்கல்சு படத்தின்மீது பொருந்த வைத்த $G(j\omega)$ படம் எந்த மாறு-M நியமப் பாதையை வெட்டாது தொடுகிறதோ, அதற்குரிய M தான் M_p. அதற்கு உரிய அலைவெண் ω-வே ω_p ஆகும்.

3. ஆள்குவையின் நிலையுறுதி, பெருக்க நிறைவெண் (gain margin), பருவ நிறைவெண் (phase margin) ஆகியவற்றையும் நிக்கல்சு படத்தின் உதவியால் அறியலாம். இவை அடுத்த அத்தியாயத்தில் விளக்கப்படும்.

4. குறிப்பிட்ட M_pக்கு ஏற்ற Kயின் மதிப்பை அறியவும் இது உதவுகிறது.

மாதிரி வினா 6.15

பின்வரும் கோண தூரப் படத்தில் இருந்து செலுத்துச் சார்பைக் கணிக்க.



படம் 6.47 கோண தூரப் படம்

தீர்வு :

கோண தூரப் படத்தில், $\omega = 0^+$ என்கையில் $G(j\omega) = -3 - j\infty$

எனவே $G = \infty$, $\phi = -90°$

$\omega = \infty$ என்கையில் $G = 0$, $\phi = -270°$

எனவே $G(s)$-இன் உருவம் வருமாறு :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$

$$s(s+a)(s+b) = s(s^2+\overline{a+b}s+ab)$$
$$= (a+b)s^2 + s(ab+s^2)$$

$$\therefore \quad G(j\omega) = \frac{K}{-(a+b)\omega^2 + j\omega(ab-\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$ab-\omega^2_c = 0 \qquad \therefore \quad \omega^2_c = ab$$

$$\therefore \quad Gx = \left| \frac{K}{-(a+b)\,ab+0} \right| = \frac{K}{ab(a+b)}$$

கோண தூரப் படத்தில் இருந்து $\omega_c = \sqrt{2}$, $Gx = \frac{2}{3}$

எனவே $ab = \omega_c^2 = 2$ ... (1)

$K/ab\,(a+b) = 2/3$ ... (2)

$$G(j\omega) = K\left[\frac{-(a+b)\omega^2 - j\omega(ab-\omega^2)}{(a+b)\omega^4 + \omega^2(ab-\omega^2)^2}\right]$$

இதன் மெய்ப் பகுதி $Re\ G(j\omega) = \dfrac{-(a+b)\omega^2 K}{\omega^2[(a+b)\omega^2 + (ab-\omega^2)^2]}$

$\omega = 0^+$ எனில்,

$$Re\ G(j\omega) = \frac{-(a+b)\,K}{(ab)^2}$$

இதன் மதிப்பு —3. எனவே,

$$\frac{K(a+b)}{a^2\,b^2} = 3 \qquad \text{... (3)}$$

(1) இல் இருந்து, $a^2b^2 = 4$

$\therefore$ (3) இல் இருந்து, $K(a+b) = 12$

(2) இல் இருந்து, $\dfrac{K}{(a+b)} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore \quad K^2 = 12 \times \frac{4}{3} = 16$ அல்லது $K = 4$

எனவே $a+b = 3$

$$a-b = \sqrt{(a+b)^2-4ab}$$
$$= \sqrt{9-8} = 1$$

கூட்டவும், $2a = 4 \quad \therefore \quad a = 2,$ மேலும் $b = 1.$

எனவே, செலுத்துச் சார்பு

$$G(s) = \frac{4}{s(s+1)\ (s+2)}$$

குறிப்பு : இவ்வாறு அலைவிளைவு சோதனையில் இருந்து, கோணதூரப் படத்தை வரைந்து, முக்கியப் புள்ளிகளின் இருப்பிடங்களின் துணை கொண்டு செலுத்துச் சார்பைக் காண முடிகிறது. போடே படங்களின் வழியிலும் இத்தகைய செலுத்துச் சார்பைக் காணலாம். இம் முறையை அடுத்த மாதிரி வினவில் காண்க.

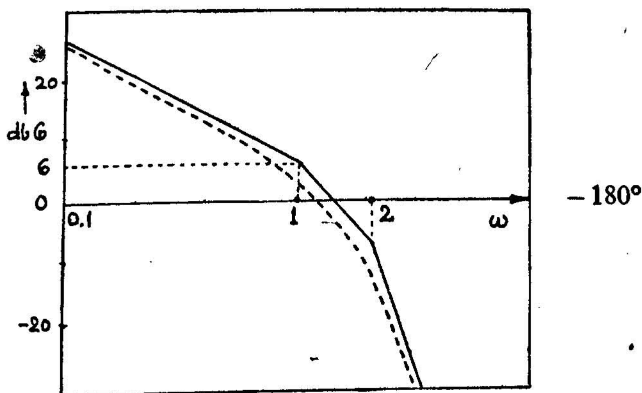
மாதிரி வினு 6.16

அலை விளைவு சோதனை ஒன்றின் முடிவுகள் கீழே ஓர் அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. போடே படங்களின் உதவியால் சோதனைக்கு உட்பட்ட குலையின் செலுத்துச் சார்பைத் தோராயமாகக் காண்க.

ω ரேடியன்/ நொடி.	0.1	0.3	0.6	1.0	1.3
G டெசிபல்	26	16	8.7	5.08	−2.4
ϕ பாகை	−98.6°	−115.2°	−137.7°	−161.5°	−175.4°
ω ரேடியன்/ நொடி	1.6	2.0	2.5	3.0	4.0
G டெசிபல்	−5.8	−10	−14.6	−18.6	−35.2
ϕ பாகை	−186.6°	−198.5°	−209.6°	−218.0°	−229.5°

தீர்வு :

அலை விளைவின் போடே படம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6.48 அலை விளைவு சோதனையில் இருந்து போடே படம்

பருவக் கோணம் $-90°$ முதல் $-270°$வரை செல்வதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, $G(s)$இன் உருவம் பின்வருமாறு இருக்கும்.

$$G(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)\ (1+T_2s)}$$

வீச்சு விகிதப் படத்தை ஒரு மூலைப் படமாக மாற்றி அமைக்கவும் தோராயமாக -20, -40, -60 டெசியல்|பதிமம் சாய்வுகளில் மூன்று ஈற்றணுக்கள் (asymptotes) கிடைக்கின்றன. மூலை அலை வெண்கள் சுமாராக 1, 2. மேலும், $\omega=1$ என்னும் அலை வெண்ணில் டெசிபல் வீச்சு விகிதம் தோராயமாக 6 எனக் கொண்டால், கிடைப்பது $20 \log K \cong 6$ அல்லது $K \cong 2$.

$$\text{எனவே,}\quad G(s) = \frac{2}{s(1+s)\ (1+\frac{1}{2}s)} = \frac{4}{s(s+1)\ (s+2)}$$

இதுவே தேவையான செலுத்துச் சாரிபு.

பயிற்சி 6

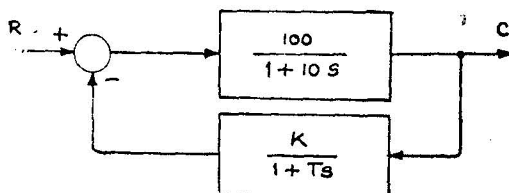
6.1 ஓர் அடிமைக் குவையின் அலை விளைவில் மீப்பெரிய வீச்சு விகிதம் 2.5; அது 8 சுழற்சி/நொடி (cycles/second) என்னும் அலைவெண்ணில் ஏற்பட்டால், தடையூட்ட விகிதம், இயற்கை அலைவெண் இவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

6.2 முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை ஒன்றின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு வருமாறு :

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + 10\frac{d\theta_0}{dt} = 100\,(\theta_i - \theta_0)$$

இதன் ஒத்திசை உச்சத்தையும் (M_p), ஒத்திசை அலை வெண்ணையும் (ω_p) கணிக்க.

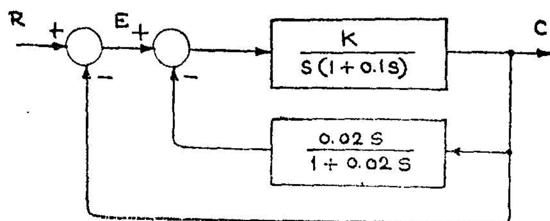
6.3 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு இருபடி ஆள்குவையில், $M_p = 1\ 3$, $\omega_p = 8.2$ ரேடியன்/நொடி. கீழே காட்டப்பட்டுள்ள (படம் 6.49) குவைக்கும் இதே கால விளைவும், தடையூட்டு விகிதமும், அலைவெண்ணும் இருக்க வேண்டும் எனில், K,T ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.



படம் 6.49 இருபடி ஆள்குவை

$$G = \frac{100}{1+10\,s} \quad H = \frac{K}{1+Ts}$$

6.4 படம் 6.50 இல் உள்ள ஆள்குவையில் $M_p = 1.8$ இருக்க வேண்டும் எனில் Kயின் மதிப்பு என்ன ?



படம் 6.50 M_p க்கு உரிய K இன் மதிப்பு

$$G = \frac{K}{s(1+0.1s)} \quad H = \frac{0.02\,s}{1+0.02\,s}$$

6.5 ஒரு குவையின் நிறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு ($C/R = 1/(1+0.1s)\,(1+0.05s+0.01s^2)$). இதன் ஒத்திசை உச்சம், ஒத்திசை அலைவெண் ஆகியவற்றைக் கணிகக. இதே அளவு

M_p, ω_p உடைய ஓர் ஈரடுக்குக் குலையின் (second order system) இயற்கை அலைவெண், தடையூட்டு விகிதம் இவற்றைக் கணிக்க.

6.6 ஓர் இருபடி அடிமைக் குலையின் அலை விளைவில் மீப் பெரிய வீச்சு விகிதம் 1.04 ; அது கிடைக்கும் அலைவெண் 1.06 எனில் ஒருமைப் படிப் பெயர்ச்சி ஊட்ட உச்ச விலக்கத்தையும், இயற்கை அலைவெண்ணையும் கணிக்க.

6.7 ஓர் எளிய இருபடிக் குலையில் $J = 10$, $B = 100$, $K = 1000$ (பொருந்திய அலகுகளில்) எனில் ஒத்திசை உச்சம், ஒத்திசை அலைவெண் இவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

6.8 ஒரு கட்டுப்பாட்டுக் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் வருமாறு : $s = -2 \pm j3$. இக் குலையின் தடையூட்டம், இயற்கை அலைவெண், ஒத்திசை உச்சம், ஒத்திசை அலைவெண் ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்க.

6.9 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்-குலை ஒன்றின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \dfrac{1}{1+2s}$. குலையின் அலை வரிசை அகலம் (bandwidth) என்ன ?

6.10 பின் வரும் சிக்கல் எண்களின் (complex numbers) கோணங்களை எழுதுக :

(அ) $1+j1$ (இ) $-1+j1$ (உ) $1+j\omega-\omega^2$

(அ) $1-j1$ (ஈ) $-1-j1$ (ஊ) $\omega+j(1-\omega^2)$

6.11 கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள அலைவு எண் இணைகளுக்கு இடையே உள்ள பதிமங்களைக் (decades) கணிக்க :

(அ) $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4$

(ஆ) $\omega_1 = 3.5$, $\omega_2 = 80$

6.12 கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள அலைவு எண் இணைகளுக்கு இடையே உள்ள இருமங்களைக் (octaves) கணிக்க :

(அ) $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 100$

(ஆ) $\omega_1 = 0.5$, $\omega_2 = 3$

6.13 கொடுக்கப் பட்டுள்ள செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து அலை விளைவுகளை எழுதிக் கோண தூரப் படங்களை வரைக !

(அ) $G(s) = \dfrac{50}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{s}{(1-0.2s)}$

6.14 அலை விளைவு கோண தூரப் படங்கள் வரைக !

(அ) $G(s) = \dfrac{10}{s(1+0.2s)(s-1)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{5(1-0.5s)}{s(1+0.1s)(1-0.25s)}$

6.15 கீழ்க் காணும் செலுத்துச் சார்புகளின் கோண தூரப் படங்கள் எதிர்க் கிடை அச்சைக் (negative x-axis) கடக்கின்றனவா இல்லையா என்று காண்க. கடக்கும் எனில் அதற்கு உரிய அலைவெண், வீச்சு விகிதம் ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

(அ) $G(s) = \dfrac{K(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+3)(s+5)}$

6.16 கொடுக்கப் பட்டுள்ள செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து அலை விளைவுகளை எழுதி, போடே வீச்சு விகிதப் படங்களை வரைக !

(அ) $G(s) = \dfrac{90(s+4)}{s^2(s+0.5)(s+22.7)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{4\times10^5(s+20)}{s^2(s+2000)}$

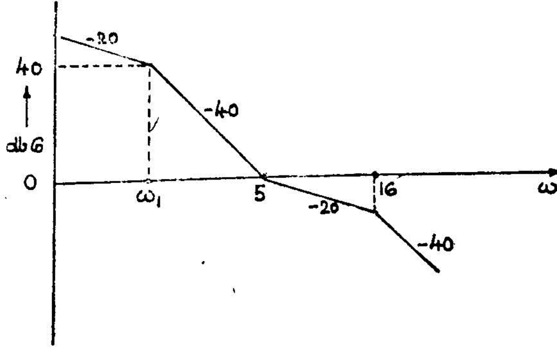
6.17 போடே வீச்சு விகிதப் படம் வரைக !

(அ) $G(s) = \dfrac{100s^2}{(1+2.5s)(1+s)(1+0.2s)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{(s+1)(s+40)}{(s^2+14s+40)}$

[குறிப்பு : இருபடிக் கோவைகளை, மெய்க் காரணிகளாகப் பிரிக்க இயலும் எனில், பிரித்து விடவேண்டும்.]

6.18 கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள அலை விளைவு மூலைப் படத்தில் (corner plot) இருந்து, செலுத்துச் சார்பை வருவிக்க. மேலும், $\omega = 8$ என்னும் புள்ளியில், வீச்சு விகிதத்தில் செய்ய வேண்டிய திருத்தம் எவ்வளவு என்று எழுதுக :



படம் 6.51 அலை விளைவு மூலப் படம்

6.19 செலுத்துச் சார்பைக் கணிக்க :

மொத்தச் சாய்வு (overall slope) டெசிபல்/பதிமம்	அலைவெண் எல்லைகள் (range of frequency)
-20	$\omega < 2$
-40	$2 < \omega < 4$
-60	$\omega > 4$

வேக வழு மாறிலி $K_v = 200$

6.20 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையில் $G(s) = \dfrac{K}{s(s+10)}$, $M_p = 1.4$ எனில் K இன் மதிப்பு என்ன ?

7. நிலையுறுதி
(Stability)

7.1 நிலையுறுதியும் இரவுத்து விதியும்: (Stability-Rauth's criterion)

7.1.1 நிலையுறுதி வரையறை : (stability definition)

அமைதியாக இருக்கும் குலை ஒன்றில் இடர் ஊட்டத்தால் (disturbance) தோன்றும் இடைநிலை விளைவு (transient response) காலப் போக்கில் முழுதும் அழிந்து விடுமானால் குலை "முழு நிலையுறுதி" (absolute stability) உடையது என்றும், இடைநிலை விளைவு முழுதும் அழியாமல் வரம்புக்கு உட்பட்டு (bounded) நின்று விட்டால், "வரம்புடை நிலையுறுதி" (limited stability) உடையது என்றும் கூறுவர்.

நிலையுறுதிக்கு இரு வரையறைகள் கூறலாம். ஈற்றணுகி நிலையுறுதி (Asymptotic stability) :

அமைதியாக இருக்கும் குலை ஒன்றின் அதிர்ச்சி விளைவு (impulse response), காலம் வரம்பிலியை நோக்கிச் செல்கையில் முழுதும் அழியுமானால், குலை ஈற்றணுகி நிலையுறுதி உடையது (asymptotically stable.)

நிலையுறுதிக்கு : $\underset{t \to \infty}{\text{எல்லை}} \; \omega(t) \to 0$

$\omega(t)$: அதிர்ச்சி விளைவு.

(2) வரம்புடை ஊட்ட ஈட்ட நிலையுறுதி (Bounded input bounded output stability) :

வரம்புடை ஊட்டத்தால் ஒரு குலையில் தோன்றும் ஈட்டமும் வரம்புடையதாக இருப்பின் குலை நிலையுறுதி உடையது.

இவை இரண்டில், ஈற்றணுகி நிலையுறுதி இறுக்கமும், வரம்புடை ஊட்ட ஈட்ட நிலையுறுதி தளர்ச்சியும் உடையன என்பது தெளிவு.

7.1.2 நிலையுறுதியும் சிறப்பியல் சமன்பாட்டு மூலங்களும் : (Stability and the roots of the characteristic equation)

நேர் உறவு ஆள் குவைகளில் (linear control systems) நிலை யுறுதி என்பது குவையின் தன்மையைப் பொருத்ததே அன்றி, ஊட்டத்தைப் பொருத்தது அல்ல.

குவையின் விளைவை நிர்ணயிப்பவை, அதன் சிறப்பியற் சமன் பாட்டு மூலங்களே என முன் அத்தியாயங்களில் அறிந்தோம்.

மூலங்கள் (i) நேர் மெய்யெண்களாக (positive & real) இருந் தால் காலத்தால் வளரும் அடுக்கு சார்பு விளைவும் (increasing exponential response)

(ii) எதிர் மெய்யெண்களாக (negative & real) இருந்தால் காலத்தால் தேய்ந்து மறையும் அடுக்குச் சார்பு விளைவும் (decaying exponential response)

(iii) கற்பனை எண்களாக (imaginary) இருந்தால், தொடர் அலைவு விளைவும் (continuous oscillatory response)

(iv) நேரெண் மெய்ப்பகுதி சிக்கலெண்களாக (complex numbers with positive real parts) இருந்தால் காலத்தால் வளரும் அலைவுகளை உடைய விளைவும்

(v) எதிரெண் மெய்ப் பகுதி சிக்கலெண்களாக (complex numbers with negative real parts) இருந்தால் காலத்தால் தேய்ந்து மறையும் அலைவுகளை உடைய விளைவும், கிடைக்கின்றன.

இவற்றுள் (i), (iii), (iv) மூன்றும் நிலையுறுதி இல்லாமையை யும் ; (ii), (v) இரண்டும் முழு நிலையுறுதியையும் காட்டுகின்றன. முதல் வகையில் (i), (iv) முற்றும் நிலையுறுதி அற்ற குவைகள், (iii) தொடர் அலைவுக்குவை ஆகும்.

எனவே, சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களுக்கும் குவையின் நிலையுறுதிக்கும் நெருங்கிய தொடர்பு உண்டு என்று தெரிகிறது.

ஒரு குலை நிலையுறுதி உடையதாக இருக்கத் தேவையானதும், போதுமானதும் ஆன தகுதி அக் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் அவ்வளவும் எதிர் எண் மெய்ப்பகுதி மூலங்களாக (roots with negative real parts) இருத்தல் வேண்டும்.

இனி, s–தளத்தில் மூலங்களின் இடங்களுக்கும், குலையின் நிலையுறுதிக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்போம்.

1.	நிலையுறுதி உடைய குலை : (stable system)	எல்லா மூலங்களும் s-தளத்தின் இடது பாதியில் இருக்கும்.
2.	நிலையுறுதி அற்ற குலை : (unstable system)	ஏதாவது ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலங்கள் s-தளத்தின் வலது பாதியில் இருக்கும். அல்லது பன்மை மூலங்கள் (multiple roots) ஆயப் புள்ளியிலோ, கற்பனை அச்சிலோ இருக்கும்.
3.	வரம்புடை நிலையுறுதிக் குலை : (limitedly stable system)	ஏதாவது ஒரே ஒரு சிக்கல் மூல இணை கற்பனை அச்சிலும் (அல்லது ஒரே ஒரு மூலம் ஆயப் புள்ளியிலும்) மற்ற எல்லா மூலங்களும் s-தளத்தின் இடது பாதியிலும் இருக்கும்.
4.	கட்டுப் பாட்டு நிலையுறுதிக் குலை : (conditinally stable system)	குலையின் சுற்றுப் பெருக்க எண் (loop gain constant) போன்ற ஏதாவது ஒரு துணை அலகின் (parameter) குறிப்பிட்ட மதிப்பு வரிசைக்கே (range of values) எல்லா மூலங்களும் s–தளத்தின் இடது பாதியில் இருக்கும்.

முழு நிலையுறுதிக்கும், நிலையுறுதி முற்றும் அற்ற நிலைக்கும் இடைப் பட்டது தொடர் அலைவு நிலை. எல்லா மூலங்களும் கற்பனை அச்சில் இருப்பின் இது நிகழும்.

மாதிரி வினா 7.1

கீழ்க் காணும் மூலங்களையும், சிறப்பியற் சமன்பாடுகளையும் உடைய குலைகள் நிலையுறுதி உடையவையா அல்லவா என்று எழுதுக !

மூலங்கள் :

1. $-1, -2, -3+j2, -3-j2$
2. $-1, +1, -3, -2+j2, -2-j2$
3. $-2, -3, 0$
4. $-1, -2, -3+j2, -3-j2, 0, 0$
5. $-2, -3, +j2, +j2, -j2, -j2, -3+j4, -3-j4$
6. $-2, -3, +j3, -j3$

சிறப்பியற் சமன்பாடுகள் :

7. $s^2+4s-6 = 0$
8. $s^3+6s^2+11s+6 = 0$
9. $s^3+s^2+2s+24 = 0$
10. $s^4+7s^3+17s^2+17s+6 = 0$

தீர்வு :

1. எல்லா மூலங்களும் s–தளத்தின் இடது பகுதியில் உள்ளன. எனவே, குலை முழு நிலேயுறுதி உடையது.

2. ஒரு மூலம் $(s = +1)$ s-தளத்தின் வலது பாதியில் உள்ளது. எனவே, குலை நிலேயுறுதி அற்றது.

3. ஒரு மூலம் $(s = 0)$ ஆயப் புள்ளியிலும், மற்ற எல்லா மூலங்களும் s தளத்தின் இடது பகுதியிலும் உள்ளன. எனவே குலை வரம்புடை நிலேயுறுதி பெற்றது.

4. ஆயப் புள்ளியில் $s = 0, 0$ என்ற பன்மை மூலங்கள் இருப்பதால், குலை நிலேயுறுதி அற்றது.

5. கற்பனே அச்சில் $s = \pm j2, \pm j2$ என்ற பன்மை மூலங்கள் இருப்பதால், குலை நிலேயுறுதி அற்றது.

6. கற்பனே அச்சில் $s = \pm j3$ என்ற ஒரே ஒரு கற்பனே மூல இணேயும், பிற மூலங்கள் s-தளத்தின் இடது பாதியிலும் உள்ளதால் குலை வரம்புடை நிலேயுறுதி பெற்றது.

7. $s^2+4s-6 = 0$

குறிப்பு : $s^2+bs+c = 0$ எனில்

$$s = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

இங்கு,

$$s = -2 \pm \sqrt{2^2-(-6)}$$
$$= -2 \pm 3.16$$
$$= -5.16, +1.16$$

ஒரு மூலம் s-தளத்தின் வலது பாதியில் உள்ளது. எனவே, குலை நிலையுறுதி அற்றது.

8. $s^3+6s^2+11s+6 = 0$

குறிப்பு : $s = -1, -2, -3$ போன்ற சோதனை மூலங்களைக் (trial roots) கொண்டு, தொகு முறை வகுத்தல் (synthetic division) முறையில் சரி பார்க்கலாம். $-1, -2, -3$ இவை மீதம் இன்றி வகுத்தால் மூலங்கள் ஆகின்றன.

இங்கு, $s = -1$, என்க.

தொகு முறை வகுத்தல் :

-1	1	6	11	6
		1×-1	5×-1	6×-1
	1	5	6	0 மீதி

ஈவு s^2+5s+6

அல்லது $(s+2)(s+3)$

எனவே சிறப்பியற் சமன்பாடு : $(s+1)(s+2)(s+3) = 0$

இதன் மூலங்கள் . $s = -1, -2, -3$.

எல்லா மூலங்களும் s-தளத்தின் இடது பாதியில் உள்ளன. எனவே குலை முழு நிலையுறுதி உடையது.

9. $s^3+s^2+2s+24 = 0$

$s = -1, -2, -3$ என்ற சோதனை மூலங்களைப் பிரதியிட,

-1	1	1	2	24
		-1	0	-2
	1	0	2	22 மீதி

$$\begin{array}{r|rrrrl} -2 & 1 & 1 & 2 & 24 & \\ & & -2 & 2 & -8 & \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \llcorner 16 & \text{மீதி} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl} -3 & 1 & 1 & 2 & 24 & \\ & & -3 & 6 & -24 & \\ \hline & 1 & -2 & 8 & 0 & \text{மீதி} \end{array}$$

மீதி சுழி ஆவதால் $s=-3$ என்பது ஒரு மூலம் ஆகிறது.

ஈவு s^2-2s+8.

$$(s+3)(s^2-2s+8) = 0$$

இதன் மூலங்கள் $s=-3$

$$s = 1 \pm \sqrt{1-8}$$

அதாவது $s = 1 \pm j\sqrt{7}$.

இரண்டு மூலங்கள் நேரெண் மெய்ப் பகுதி (positive real part) உடையனவாய் இருத்தலால் குவை நிலையுறுதி உடையது அல்ல.

10. $s^4+7s^3+17s^2+17s+6 = 0$

$s=-1$ என்க.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 7 & 17 & 17 & 6 \\ & & -1 & -6 & -11 & -6 \\ \hline & 1 & 6 & 11 & 6 & \llcorner 0 \end{array}$$

எனவே, சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$(s+1)(s^3+6s^2+11s+6) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \llcorner 0 \end{array}$$

எனவே $(s+1)(s+1)(s^2+5s+6) = 0$

அதாவது,

$$(s+1)^2(s+2)(s+3) = 0$$

மூலங்கள் : $s = -1, -1, -2, -3$

எல்லா மூலங்களும் s-தளத்தின் இடது பாதியில் உள்ளன. எனவே குவை முழு நிலையுறுதி உடையது.

7.1.3 இரவுத்து நிலையுறுதி விதி (Routh's stability criterion)

ஆள்குவைகளின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களைக் கொண்டே, அவற்றின் நிலையுறுதியை அறிய முடிகிறது. ஆனால் இம் முறை எளிய குவைகளுக்கே பொருந்தும். பெரிய சிக்கலான குவைகளின் சிறப்பியற் சமன்பாடுகளின் அடுக்கு (degree) மூன்றுக்கு மேற் போவதால், அவற்றின் மூலங்களைக் காண்பது எளிதன்று.

உண்மையில், நிலையுறுதியைக் கணிக்க, மூலங்களின் மதிப்புக்கள் தேவையில்லை. அவை நேர்க் குறி உடையனவா அல்லது எதிர்க் குறி உடையனவா என்று தெரிந்தால் போதும். இதை அறிய உதவுவது இரவுத்து விதி.

ஓர் எளிய இயற் கணித முறையில், நேர் உறவு ஆள்குவைச் சிறப்பியற் சமன்பாட்டினுடைய நேர் எண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களின் எண்ணிக்கையைத் தருவது 'இரவுத்து விதி'.

தற் புனைவுகள் :

1. ஓர் ஆட்குவை நேர் உறவு வகையினது;

2. அதன் சிறப்பியற் சமன்பாடு மெய் எண்களையே உறுப்புக் கெழுக்களாகக் (coefficients of terms) கொண்ட இயற் கணிதப் பல அடுக்குக் கோவையால் ஆனது என்க.

இரவுத்து விதி : (Routh's criterion) மேற்கண்ட ஆள் குவையின் நிலையுறுதிக்குத் தேவையானதும், போதுமானதும் ஆன தகுதி—"இரவுத்து அணி"யின் (Routh's array) முதல் தூணில் (column) உள்ள எண்கள் சுழி ஆகாமலும், ஒரே குறியீட்டை உடையனவாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

மேலும், எவ்வளவு குறியீட்டு மாறுதல்கள் உள்ளனவோ, அவ்வளவு நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்கள் சிறப்பியற் சமன் பாட்டில் இருக்கும்.

இரவுத்து அணி (Routh's array)

இனி, இரவுத்து அணி என்பது என்ன என்று காண்போம்.

கொடுத்துள்ள குவையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + \ldots\ldots a_1 s + a_0 = 0 \text{ என்க.}$$

இதன் உறுப்புக் கெழுக்களை முறையாக வைத்து ,அவற்றில் இருந்து கணிக்கப் படுவதே இரவுத்து அணியாகும். இதை எழுதும் முறை வருமாறு :

படி 1 : உறுப்புக் கெழுக்களை இரு வரிசைகளாகப் பின்வருமாறு எழுதுக.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	...

படி : 2 மூன்றுவது வரிசையை (s^{n-2}) முதல் இரண்டு வரிசைகளில் இருந்து பின் வருமாறு பெறுக.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	...
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...	...

இங்கு, $b_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$

$b_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$,....

படி 3 : நான்காவது வரிசையை (s^{n-3}) இரண்டு, மூன்றும் வரிசைகளில் இருந்து இவ்வாறு எழுதுக :

s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	...	...

இங்கு, $c_{n-1} = \dfrac{b_{n-1}.a_{n-3} - a_{n-1}.b_{n-3}}{b_{n-1}}$,

$c_{n-3} = \dfrac{b_{n-1}.a_{n-5} - a_{n-1}.b_{n-5}}{b_{n-1}}$, ...

படி 4 : இதே முறையில் $(n+1)$வது வரிசை (s^0) வரை எழுதிச் செல்க. கடைசி இரு வரிசைகளிலும் (s^1, s^0) ஒரே ஒரு உறுப்புத்தான் இருக்கும். இவ்வாறு கிடைப்பதே இரவுத்து அணி ஆகும்.

குறிப்பு : இரவுத்து அணியை எழுதுகையில் எந்த வரிசையில் உள்ள உறுப்புக்களையும் ஒரு நேரெண்ணுல் (positive number) பெருக்கிஞலோ, வகுத்தாலோ, குறியீடுகள் (signs) பாதிக்கப் படமாட்டா.

மாதிரி வினு 7.2

இரவுத்து விதியைக் கொண்டு பின்வரும் சிறப்பியற் சமன் பாட்டை உடைய ஆள் குவையின் நிலையுறுதியைக் காண்க.

$s^4+7s^3+17s^2+17s+16=0$

தீர்வு :

இரவுத்து அணி:

$s^4 \quad 1 \quad 17 \quad 16$

$s^3 \quad 7 \quad 17$

$$s^2 \quad \left(\frac{7\times17-1\times17}{7}\right) \quad \left(\frac{7\times16-1\times0}{7}\right)$$

$$= 14.58 \qquad\qquad =6$$

$$s^1 \quad \left(\frac{14.58\times17-7\times6}{14.58}\right)$$

$$= 14.12$$

$$s^0 \quad \left(\frac{14.12\times6-14.58\times0}{14.12}\right)$$

$$=6$$

இதையே மீண்டும் எழுத,

s^4	1	17	16
s^3	7	17	
s^2	14.58	6	
s^1	14.12		
s^0	6		

இதில் முதல் தூண் உறுப்புக்களின் குறியீடுகள் :

+
+
+
+
+

குறியீட்டு மாறுதலே இல்லை. எனவே, சிறப்பியற் சமன்பாட்டில் நேர் எண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களே இல்லை. குவை முழு நிலையுறுதி உடையது.

குறிப்பு (1): மூலங்களின் இடக் குறிப்பும், எண்ணிக்கையும் :

சிறப்பியற் சமன்பாட்டில் இருந்து ரௌத்து அணியை எழுதி, அதில் இருந்து நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களின் எண்ணிக்கையை அறியலாம்.

சிறப்பியற் சமன்பாட்டில் sக்குப் பதில் $-s$ எனப்பொருத்த, ஒரு புதிய சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதன் ரௌத் அணியை எழுதி, அதில் இருந்து எதிரெண் மெய்ப்பகுதி மூலங்களின் எண்ணிக்கையை அறியலாம்.

மூலங்களின் மொத்த எண்ணிக்கையில் இருந்து, இவற்றின் கூட்டுத் தொகையைக் கழித்து விட, கற்பனை அச்சில் உள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கை கிடைக்கிறது

மாதிரி வினா 7.3

கீழ்க் காணும் சமன்பாட்டில் s-தளத்தின் வலதுபாதி, இடதுபாதி, கற்பனை அச்சு ஆகியவற்றின் உள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கையை எழுதுக.

$$s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 21s + 10 = 0.$$

தீர்வு :

s — சமன் பாட்டின் இரவுத்து அணி :

s^6	1	4	15	10	
s^5	(3)	(6)	(21)		$\div 3$
	1	2	7		
s^4	(2)	(8)	(10)		$\div 2$
	1	4	5		
s^3	(−2)	(2)			$\div 2$
	−1	1			
s^2	(5)	(5)			$\div 5$
	1	1			
s^1	2				ஓர் உறுப்பு வரிசைகளை வகுக்கத் தேவை இல்லை
s^0	1				

முதல் தூண் உறுப்புக்களின் குறியீட்டு வரிசை

$+$
$+$
$+)$ 1
$\frac{-}{+})$ 1
$+$

இதில் இரண்டு குறியீட்டு மாற்றங்கள் ($+\rightarrow -$, $-\rightarrow +$) உள்ளன. எனவே, இரண்டு மூலங்கள் s-தளத்தின் வலது பாதியில் உள்ளன.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் $s = -s$ என்று பிரதியிடப் பின் வரும் புதிய சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$s^6 - 3s^5 + 4s^4 - 6s^3 + 15s^2 - 21s + 10 = 0$$

இதன் இரவுத்து அணியை அடுத்து எழுதுவோம் :

s^6	1	4	15	10	
s^5	(−3) −1	(−6) −2	(−21) −7		÷3
s^4	(2) 1	(8) 4	(10) 5		÷2
s^3	(2) 1	(−2) −1			÷2
s^2	(5) 1	(5) 1			÷5
s^1	−2				
s^0	1				

இதில் முதல் தூண் குறியீட்டு வரிசை :

$\frac{+}{-})$ 1
$+)$ 1
$+$
$\frac{+}{-})$ 1
$+)$ 1

குறியீட்டு மாற்றங்கள் 4. எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் 4 மூலங்கள் s—தளத்தின் இடதுபாதியில் உள்ளன.

மூலங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை	6
s-தள வலது பாதி மூலங்கள்	2
s-தள இடது பாதி மூலங்கள்	4
∴ கற்பனை அச்சு மூலங்கள்	0

குறிப்பு (2): சிக்கல் பிரிவு 1: சுழி முதலெண் (zero term in the first column)

இரவுத்து அணியை எழுதும் பொழுது ஒரு சிக்கல் தோன்றலாம். ஏதாவது ஒரு வரிசையில் முதல் உறுப்பு மாத்திரம் சுழி ஆதலே இது. இவ்வாறு நேர்ந்தால் இரவுத்து அணியை முற்றும் எழுதப் பின்வரும் முறைகளுள் ஏதாவது ஒன்றைக் கையாளலாம். இது மூலங்களின் இருப்பிடங்களை அறிய உதவும்.

1. '0' என்ற முதல் உறுப்புக்குப் பதில் மிகச் சிறிய நேரெண் அல்லது எதிரெண் ஒன்றை (± 0.01, $\pm \epsilon$) எழுதி, அணி அமைப்பைத் தொடரலாம். பிறகு, குறியீட்டு மாற்றங்களில் இருந்து, மூலங்களின் இருப்பிடம் அறியலாம்.

2. $s = \dfrac{1}{u}$ என்று பிரதியிட்டு வரும் புதிய சமன்பாட்டின் இரவுத்து அணியை எழுத, இதிற் சுழி முதலெண் வராது.

3. கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $(s+a)$ (a : ஒரு நேரெண்) ஆல் பெருக்கி வரும் புதிய சமன்பாட்டிற்கு இரவுத்து அணியை எழுதலாம். இதிலும் சுழி முதலெண் வராது.

மாதிரி வினா 7.4

$s^6+2s^4+3s^3+6s^2+6s+8=0$ என்ற சமன்பாட்டில் நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களின் எண்ணிக்கையை வருவிக்க.

தீர்வு :

இரவுத்து அணி, வழி 1 :

s^6	1	3	6	
s^5	(2) 1	(6) 3	(8) 4	÷2
s^4	(0) ϵ	(2) 2		0→6

$s^2 \quad \left(\frac{3\epsilon-2}{\epsilon}\right) \quad 4$

$\simeq -\frac{2}{\epsilon}$

$s^1 \quad \left(2 - \frac{\frac{4\epsilon}{2}}{\epsilon}\right)$

$\simeq 2$

$s^0 \quad 4$

குறியீட்டு வரிசை

+
+
$\pm$) 1
+) 1
+

குறியீட்டு மாற்றங்கள் 2. எனவே, இரண்டு நேரெண் மெய்ப்பகுதி மூலங்கள் (roots with positive real parts) உள்ளன.

அல்லது

s^5	1	3	6	
s^4	1	3	4	$\div 2$
s^3	$-\epsilon$	2		

$s^2 \quad \left(\frac{-3-2}{-\epsilon}\right) \simeq \frac{2}{\epsilon} \quad 4$

$s^1 \quad \left(2 - \frac{\frac{-4\epsilon}{2}}{\epsilon}\right) \simeq 2$

$s^0 \quad 4$

குறியீட்டு வரிசை !

+
$\pm$) 1
+) 1
+
+

குறியீட்டு மாற்றங்கள் இரண்டு. எனவே, இரண்டு நேர் எண் மெய்ப் பகுதி மூலங்கள் உள்ளன.

குறிப்பு ! இரவுத்து அணியில் ஏதாவது ஒரு வரிசையில் முதல் எண் மட்டும் சுழி ஆனால், குவை நிலை உறுதி அற்றது என உடனே அறியலாம். ஏனெனில் சுழி எண்ணுக்குப் பதிலாக $+\epsilon$, $-\epsilon$ எதைப் பிரதியிட்டாலும் குறியீட்டு மாற்றம் ஏற்படுகிறது. குறியீட்டு மாற்றம் நிலை உறுதி இன்மையைக் குறிக்கும்.

வழி 2 : $s = \frac{1}{u}$ என்க.

எனவே,

$$\left(\frac{1}{u}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{u}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{u}\right) + 8 = 0$$

$$8u^5 + 6u^4 + 6u^3 + 3u^2 + 2u + 1 = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதன் ரௌத் அணி;

u^5	(8)	(6)	(2)	÷ 8
	1	0.75	0.25	
u^4	(6)	(3)	(1)	÷ 6
	1	0.5	0.167	
u^3	(0.25)	(0.083)		÷ 0.25
	1	0.332		
u^2	(0.168)	(0.167)		÷ 0.168
	1	≃1		
u^1	−0.668			
u^0	1			

முதல் தூண் குறியீட்டு வரிசை +
+
+
+) 1
−) 1
+) 1

குறியீட்டு மாற்றங்கள் 2. எனவே இரண்டு நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்கள் உள்ளன.

வழி 3: கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $(s+1)$ ஆல் பெருக்க,

$$s^6+3\,s^5+5\,s^4+9\,s^3+12\,s^2+14\,s+8 = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இரவுத்து அணி :

s^6	1	5	12	8	
s^5	(3)	(9)	(14)		÷3
	1	.4	4.67		
s^4	(2)	(7.33)	(8)		÷2
	1	3.67	4		
s^3	(−0.67)	(0.67)			÷0.67
	−1	1			
s^2	(4.67)	(4)			÷4.67
	1	0.86			
s^1	0.14				
s^0	0.86				

முதல் தூண் குறியீட்டு வரிசை
+
+
+) 1
−
+) 1
+
+

குறியீட்டு மாற்றங்கள் 2. எனவே இரண்டு நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்கள் உள்ளன.

குறிப்பு 3: சிக்கல் பிரிவு 2: முழுச் சுழி வரிசை (All zero row):

இரவுத்து அணியை எழுதும் பொழுது எதிர்ப் படக் கூடிய பிறிதொரு சிக்கல், ஏதாவது ஒரு வரிசையில் எல்லா உறுப்புக்களும் சுழி ஆதல் ஆகும். [ஓர்-உறுப்பு வரிசையில் முதல் உறுப்பு சுழி ஆதல் இவ்வகையைச் சேர்ந்ததே.] முழுச் சுழி வரிசை ஆயப் புள்ளிக்குச் சம தூரம் உள்ள மூலங்களின் இருப்பைக் குறிக்கிறது.

இத்தகைய சூழலைக் கையாளும் முறை வருமாறு :

s^k வரிசை முழுதும் சுழி ஆகிறது என்க. இதற்கு முன் உள்ள s^{k+1} வரிசையில் இருந்து ஒரு துணைச் சமன்பாட்டை எழுதுகிறோம். முன் வரிசை உறுப்புக்கள் $c_1, c_2, \ldots\ldots c_j$ எனில், துணைச் சமன்பாடு $c_1\, s^{k+1}+c_2\, s^{k-1}+\ldots\ldots+c_j=0.$

இதன் வகைக் கெழுவை (derivative) எழுதுவோம்.

$(k+1)\, c_1\, s^k+(k-1)\, c_2\, s^{k-2}+\ldots=0.$ இது புதிய s^k வரிசையின் உறுப்புக்களைத் தருகிறது.

$(k+1)c_1,\ (k-1)c_2, \ldots$

இதன் பின் சாதாரணமாக இரவுத்து அணியைத் தொடரலாம்.

துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், கொடுத்துள்ள சிறப்பியல் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகவும் இருக்கும். முழுச் சுழி வரிசை ஆயத்திற்குச் சம தூரமுள்ள மூலங்களின் இருப்பைக் குறிக்கிறது. இம் மூலங்கள் இரட்டைகளாகவோ (pairs) நான்கின் கூட்டாகவோ (quadrate) $[\pm j\, 3,\ \pm 2 \pm j\, 5]$ வருவதால், இயல்பாக $(k+1)$ இரட்டைப் படை எண்ணாகவும், k ஒற்றைப்படை எண்ணாகவும் இருக்கும்.

மாதிரி வினா 7.5

ஓர் ஆள் குலையின் சிறப்பியல் சமன்பாடு

$$s^5+3\, s^4+10\, s^3+30\, s^2+24s+72=0$$

என்பதாகும். இதன் நிலையுறுதியைக் காண்க. ஆள் குலையில் தொடர் அலைவுகளுக்குச் சாத்தியக் கூறுகள் உண்டா ? உண்டு எனில் அவ் அலைவெண் யாது ?

இரவுத்து அணி :

s^5	1	10	24	
s^4	(3)	(30)	(72)	÷ 3
	1	10	24	
s^3	0	0	0	

இது ஒரு முழுச் சுழி வரிசை

துணைச் சமன்பாடு

$$s^4+10\,s^2+24=0$$

இதன் வகைக்கெழு

$$4\,s^3+20\,s=0$$

புதிய s^3 வரிசை

(4)	(20)	÷ 4
1	5	

இரவுத்து அணியைத் தொடர்ந்து எழுத,

s^5	1	10	24	
s^4	1	10	24	
s^3	1	5		
s^2	(5) 1	(24) 4 8		÷ 5
s^1	0.2			
s^0	4.8			

முதல் தூண் குறியீட்டு வரிசை +
+
+
+
+
+

இதில் குறியீட்டு மாற்றங்களே இல்லை. எனவே, நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்கள் இல்லை.

முழுச் சுழி வரிசை காட்டும் மூலங்கள் ;

$$s^4+10\,s^2+24=0$$

$$s^2=-5\pm\sqrt{25-24}=-6 \text{ or } -4$$

$$\therefore\ s=\pm j\sqrt{6},\ \pm j\,2$$

இவை $\omega = \sqrt{6}$, $\omega = 2$ என்ற அலை வெண்களில் தொடர் அலைவுகளைத் குறிக்கின்றன. எனவே, ஆள்குலை வரம்புடை நிலையுறுதி உடையதாகிறது.

குறிப்பு (4) : கையாளுதற்கு அரிய உறுப்புக் கெழுக்கள் :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

என்ற சிறப்பியல் சமன்பாட்டில் $a_n, \ldots\ldots a_0$ என்ற எண்களில் பல மிகப் பெரியனவையாக இருக்கலாம். அப்பொழுது இரவுத்து அணியை எழுதுவது மிகக் கடினமாகிறது.

அத்தகைய தருணங்களில் பின்வரும் வழியைக் கையாளலாம்.

சமன்பாட்டை b-ஆல் வகுத்து, $s = ku$ என்று பிரதியிட,

$$\frac{a_n}{b} k^n u^n + \frac{a_{n-1}}{b} k^{n-1} u^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{a_0}{b} = 0$$

என்ற புதிய சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இதில் $\frac{a_0}{b} = 1$ அல்லது வேறு ஒரு சிறிய எண்ணாக இருக்குமாறு b-ஐ தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$\frac{a_n}{b} k^n = 1$ அல்லது வேறு ஒரு சிறிய எண்ணாக இருக்குமாறு k-ஐ தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

பிறகு u-சமன்பாட்டிற்கு உரிய இரவுத்து அணியை எழுதி அதில் இருந்து கொடுத்துள்ள குலையின் நிலையுறுதி காணலாம்.

மாதிரி வினா 7.6

கொடுத்துள்ள சிறப்பியல் சமன்பாடு, நிலையுறுதி உடைய ஆள் குலை ஒன்றைக் குறிக்குமா என ஆய்க :

$$s^4 + 3.6 \times 10^6 s^3 + 7.63 \times 10^{12} s^2 + 2.12 \times 10^{17} s + 3.56 \times 10^{21} = 0$$

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை b-ஆல் வகுத்து, $s = ku$ எனப் பிரதியிட,

முதற்கெழு $\frac{k^4}{b}$, கடைக்கெழு $\frac{3.56 \times 10^{21}}{b}$

$$\frac{3.56\times10^{21}}{b} = 35.6 \text{ எனில், } b=10^{20},$$

$$\frac{k^4}{b} = 1 \text{ எனில்}$$

$k^4 = 10^{20}$ அல்லது $k = 10^5$

எனவே,

$$\frac{(10^5)^4u^4}{10^{20}} + \frac{3.6\times10^6\,(10^5)^3}{10^{20}}\,u^3 + \frac{7.63\times10^2\,(10^5)^2}{10^{20}}\,u^2$$

$$+ \frac{2.12\times10^{17}\,(10^5)}{10^{20}}\,s + \frac{3.56\times10^{21}}{10^{20}} = 0$$

அதாவது,

$$u^4+36\,u^3+763\,u^2+212\,u+35.6 = 0$$

இரவுத்து அணி :

u^4	1	763	35.6	
u^3	(36)	(212)		÷ 36
	1	5.9		
u^2	(757.1)	(35.6)		÷ 757.1
	1	0.047		
u^1	5.85			
u^0	0.047			

முதல் தூண் குறியீட்டு வரிசை +
+
+
+
+

குறியிட்டு மாற்றங்களே இல்லை. எனவே, நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களும் இல்லை. குவை நிலையுறுதி உடையது.

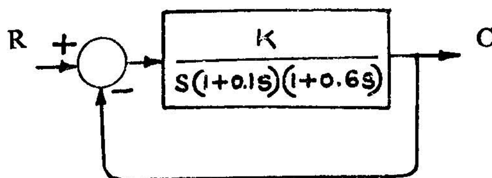
குறிப்பு : 5 Kயின் நிலையுறுதி வரம்புகள் :

சுற்றுப் பெருக்க எண் K-இன் குறிப்பிட்ட ஒரு மதிப்பு வரிசைக்கே, நிலை உறுதி உடைய குவைகள், கட்டுப்பாட்டு நிலை

யுறுதி உடையன (Conditionally stable systems) ஆகும். இத் தகைய குலைகளில் K-யின் நிலையுறுதி வரம்புகளைக் காண இரவுத்து விதி உதவுகிறது. இதை ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.

மாதிரி வினா 7.7

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையின் படத்தைக் கீழே காண்க. இதில் K-இன் நிலையுறுதி வரம்புகளை இரவுதது அணியின் உதவி யால் நிறுவுக.



படம் 7.1 ஒருமுழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலை

தீர்வு :

சிறப்பியல் சமன்பாடு, $1+GH=0$

அதாவது $$1+\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.6s)}=0$$

,, $s(1+0.1s)(1+0.6s)+K=0$

,, $s(1+0.7s+0.06s^2)+K=0$

,, $0.06s^3+0.7s^2+s+K=0$

,, $6s^3+70s^2+100s+100K=0$

இரவுத்து அணி :

s^3	6	100
s^2	70	$100K$
s^1	$\frac{7000-600K}{70}$	
s^0	$100K$	

கவனிக்க !

நேர்மெய்ப் பகுதி மூலங்களின் எண்ணிக்கையை அறியக் குறியீட்டு மாற்றங்களைப் பற்றிய செய்தியே போதுமானது. எனவே, இரவுத்து அணியை எழுதுகையில் நேரெண்களால் வரி

சைகளை வசதிக்காக வகுத்துத் தோராய மதிப்புக்களை எழுதினுல் போதும்.

மாருகக் K-யின் மதிப்பைக் காணும் கணக்குகளில், தோராய மதிப்பின்றி, உண்மையான எண்களையே எழுதுதல் நலம்.

ஆள்குலை நிலையுறுதி உடையதாக இருக்க, முதல் தூணில் குறியீட்டு மாறுதல்கள் கூடாது. அதாவது எல்லா எண்களும் நேரெண்களாக இருத்தல் வேண்டும்.

எனவே,

$$\frac{7000-600K}{70} > 0 \quad \text{அல்லது} \quad K < \frac{70}{6}$$

$$100\,K > 0 \quad \text{அல்லது} \quad K > 0$$

அதாவது, K-யின் நிலையுறுதி வரம்புகள் $0 < K < \frac{70}{6}$

குறிப்பு 6 : பெருக்க நிறைவெண் (Gain margin) :

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டில் K-யின் மதிப்பு $\frac{1}{6}$ என்க. குலை நிலையுறுதி உடையதாக இருக்கிறது. $K=1, 2, 5, 10$ என இருந்தாலும் குலை நிலையுறுதி பெற்றிருக்கும்.

$K=\frac{70}{6}$ என்கையில் நிலையுறுதி மாறு நிலையில் இருக்கும்.

$K>\frac{70}{6}$ எனில் நிலையுறுதி அற்றுவிடும்.

எனவே, ஆள்குலையின் தற்போதய $\frac{1}{6}$ என்ற பெருக்க எண்ணின் மதிப்பை, 70 மடங்கு உயர்த்தினுலும் நிலையுறுதி குலைவது இல்லை. அதற்கு (70க்கு) மேல் அதிகப் படுத்தினுல் நிலையுறுதி அற்றுப் போகிறது. இந்த '70' 'பெருக்க நிறைவெண்' (Gain margin) எனப்படுகிறது.

பெருக்க நிறைவெண் G_m =

$$\frac{\text{விளிம்பு நிலையுறுதியைத் தரும் பெருக்க எண் } K_m}{\text{ஆள்குலையின் உண்மையான பெருக்க எண் } K}$$

மாதிரி வினா 7.8

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவையின் குறைசுற்று செலுத் சார்பு $G(s) = \frac{8}{s(s+1)(s+4)}$.

இக் குவையின் பெருக்க நிறைவெண்ணை இரவுத்து விதியின் உதவியால் கணிக்க.

தீர்வு :

சிறப்பியல் சமன்பாடு, $1+G=0$

அதாவது $1+\frac{K}{s(s+1)(s+4)}=0$; $K=8.$

எனவே,

$$s(s+1)(s+4)+K=0$$
$$s^3+5s^2+4s+K=0$$

அணி :

s^3	1	4
s^2	5	K
s^1	$\frac{20-K}{5}$	
s^0	K	

நிலையுறுதி பெற, $\frac{20-K}{5}>0$ அல்லது $K<20$

$$K>0$$

அதாவது $0<K<20.$

எனவே, விளிம்பு நிலையுறுதிக்கு ஏற்ற பெருக்கவெண் $K_m=20$
உண்மையான பெருக்க வெண் $K=8$

ஆக, பெருக்க நிறைவெண் $G_m=\frac{K_m}{K}$

$$=\frac{20}{8}$$

$$=2.5$$

7.1.4 ஹர்விட்சின் நிலையுறுதி விதி (Hurwitz stability criterion)

ஹர்விட்சு விதி, இரவுத்து விதி ஆகியவற்றின் அடிப்படை ஒன்றே. தனித் தனியாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட இவ் இரு இயற் கணித விதிகளும் உருவில் தான் வேறுபட்டவை.

ஹர்விட்சு விதி :

ஓர் ஆள் குவையின் சிறப்பியல் சமன்பாடு

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

என்க. $a_0, a_1, \ldots a_n$ எல்லாம் மெய் மாறிலிகள் (real·constants) ஆக இருக்கட்டும்.

இவ் ஆள் குவை நிலையுறுதி பெற்றிருக்க,

(1) எல்லா உறுப்புக் கெழுக்களும் சுழி ஆகாமலும், ஒரே குறியீடு உடையனவாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

(2) ஹர்விட்சு தீர் அணி (Hurwitz determinants) யாவும் நேர்க் குறியீடு உடையனவாக இருத்தல் வேண்டும்.

ஹர்விட்சு தீர் அணி

$$\begin{array}{llllllllll}
D_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
D_2 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
D_3 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots \\
D_4 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
D_n & a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & &
\end{array}$$

இங்கு $D_1 = |a_1|$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots$$

இவைகளில், $a_{n+1}, \ldots a_{2n-1} = 0$. சான்றாக ஒரு 4 படிச் சமன்பாட்டில் a_5, a_6, a_7 எல்லாம் சுழி ஆகும்.

மாதிரி வினா 7.9

ஹர்விட்சு விதியைக் கொண்டு பின்வரும் சிறப்பியல் சமன்பாட்டை உடைய ஆர் குவையின் நிலையுறுதியைக் காண்க.

$$s^4+3s^3+6s^2+9s+12 = 0$$

தீர்வு :

D_1	9	12	0	0	0	0
D_2	3	6	9	12	0	0
D_3	0	1	3	6	9	12
D_4	0	0	0	1	3	6

$$D_1 = 9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \times 6 - 3 \times 12 = 18$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 9\,(18-9) - 12\,(9-0) = -27$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 9\,[6\,(3-0) - 9\,(1-0) + 12\,(0-0)] = -27$$

D_3, D_4 என்ற இரு தீர் அணிகளும் எதிர்க் குறியீடு உடையவையாக இருப்பதால் குவையில் நிலையுறுதி இல்லை.

7.1.5 இரவுத்து ஹர்விட்சு விதிகளின் நிறை குறைகள் :

நிறை :

1. சிறப்பியல் சமன்பாட்டைத் தீர்க்காமலேயே, நேரெண் மெய்ப் பகுதி மூலங்களின் இருப்பை அறிய இவ் விதிகள் உதவுகின்றன.

2. பெருக்க எண்ணின் எந்த வரம்புகளுக்குள் ஆள்குலை நிலையுறுதி உடையதாக இருக்கும் என அறிய உதவுகின்றன.

3. பெருக்க நிறைவெண்ணைக் கணிக்கப் பயன் படுகின்றன.

4. மூலப் பாதை (root locus) வரைகையில், அது கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளியை அறிய உதவுகின்றன.

குறை :

1. ஆள் குலையின் சிறப்பியல் சமன்பாடு, மெய்யெண் உறுப்புக் கெழுக்களை உடைய இயற் கணிதச் சமன்பாடாக இருந்தால்தான் இவ் விதிகளைப் பயன் படுத்தல் இயலும்.

2. ஆள் குலையின் ஆக்கப் பணிக்குத் தேவையான வழி முறைகளை இவ் விதிகளால் எளிதில் கணித்தல் இயலாது. இதற்கு மூலங்களின் மதிப்புக்கள் தேவைப் படுகின்றன.

மாதிரி வினா 7.10

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

இக் குலைகளின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் யாவும் $s = -a$ என்ற நேர் கோட்டிற்கு இடது புறத்தில் இருக்க விரும்புகிறோம். ஏனெனில் இது, நிலையுறுதி உடைய குலையைத் தருவதோடு, குறிப்பிட்ட ஒரு தடையூட்ட விகிதக் கீழ் வரம்பிற்கும் வழி செய்கிறது.

இரவுத்து ஹர்விட்சு முறையைப் பயன்படுத்தி, ஒரு மூலமும் $s = -a$ என்ற நேர் கோட்டிற்கு வலப் புறம் இருக்கக் கூடாது எனில் K, T இவற்றின் மதிப்புக்கள் என்ன என்று கணிக்கவும்.

இரவுத்து—ஹர்விட்சு விதி s—தள வலது பாதியில் உள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கையையே தருகிறது.

இங்கு $s = -a$ என்ற நேர் கோட்டிற்கு வலப்புறம் உள்ள மூலங்களின் எண்ணிக்கை தேவைப்படுகிறது.

இதற்கு இரவுத்து ஹர்விட்சு விதியைப் பயன்படுத்த ஆயப் புள்ளியை $s=0$ இல் இருந்து இடப்புறமாக நகர்த்தி $s=-a$ க்கு மாற்றவேண்டும்.

அதாவது $s=s-a$ என்று $G(s)$ இல் பிரதியிட வேண்டும். அப்பொழுது,

$$G(s-a) = \frac{K}{(s-a)(1+T\overline{s-a})}$$

சிறப்பியற் சமன்பாடு $1+G(s-a)=0$

$$1+\frac{K}{(s-a)(1+Ts-Ta)}=0$$

$$(s-a)(1+Ts-Ta)+K=0$$

$$Ts^2+(1-2Ta)s-a(1-Ta)+K=0$$

இரவுத்து அணி

s^2	T	$-a(1-Ta)+K$
s^1	$+\ (1-2Ta)$	
s^0	$-a(1-Ta)+K$	

நிலையுறுதிக்கு $T>0$

$1-2Ta>0$ அல்லது $\boxed{T<\frac{1}{2a}}$

$K-a(1-Ta)>0$ அல்லது $K>a(1-Ta)$

எனவே $K>a\left(1-\frac{1}{2a}.a\right)$

அல்லது $\boxed{K>\frac{a}{2}}$

எனவே, $K>\frac{a}{2}$, $T<\frac{1}{2a}$ எனக் கொண்டால், விரும்பிய வண்ணம், சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் $s=-a$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு இடது புறமே இருக்கும்.

7.2 நைக்விச்டு நிலையுறுதி விதி: (Nyquist Stability Criterion)

7.2.1 நைக்விஸ்ட் விதி அறிமுகம்:

நைக்விச்டு விதி என்பது ஓர் ஆள்குவையின் நிலையுறுதியைக் காண உதவும் ஒரு வரைபட உத்தி (technique) ஆகும்.

சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு *GH* இன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை (number of positive pole), *GH* இன் கோண தூரப் படம் (−1,0) என்னும் புள்ளியை வலம் வரும் எண்ணிக்கை இவற்றின் கூடுதல் சுழி ஆனல் குவை நிலையுறுதி உடையது என்பதே நைக்விச்டு விதியின் சாரம்.

இவ் விதியை நிறுவப் பின் வரும் விளக்கங்கள் பெரிதும் உதவும்.

ஓர் ஆள்குவையின் நிலையுறுதிக்கு, அதன் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் *s*−தள வலது பாதியில் இருத்தல் கூடாது.

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையில் $G = \frac{2}{s(s+3)}$ என்க.

$$1 + GH = 1 + \frac{2}{s(s+3} = \frac{s(s+3)+2}{s(s+3)}$$

$$= \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)}$$ ஆகிறது.

இதன் சிறப்பியற் சமன்பாடு $s^2+3s+2=0$

GH இன் பேரெண்கள் $s=0,-3$

1+*GH* இன் பேரெண்கள் $s=0,-3$

சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் $s= -1,-2$

1+ *GH* இன் சுழியெண்கள் $s= -1,-2$

எனவே,

1+*GH* இன் பேரெண்கள் ≡ *GH* இன் பேரெண்கள்

1+*GH* இன் சுழியெண்கள் ≡ சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் என அறிகிறோம்.

மேலும், ஓர் ஆள்குலையின் நிலையுறுதிக்கு அதனுடைய $1+GH$இன் சுழியெண்கள் s–தள வலதுபாதியில் இருத்தல் கூடாது என்பது தெளிவு.

7.2.2 ஒரு துணைத் தேற்றமும், நைக்விச்டு பாதையும்.

துணைத் தேற்றம் :

இனி ஒரு துணைத் தேற்றத்தை (lemma) நிறுவுவோம்.

தேற்றம் :

$F(s)$ என்ற s-இன் சார்பில், Z சுழி எண்களும் P பேரெண்களும் C என்னும் ஏதாவது ஒரு சுற்றுப்பாதையின் உள் இருப்பதாகக் கொள்க.

s-என்பது ஒரு சிக்கல் மாறி (Complex variable). s-தளத்தில் அதற்குப் பல மதிப்புக்களைக் கொடுத்தால், $F(s)$ தளத்தில் $F(s)$ அவற்றிற்கு ஏற்ற மதிப்புக்களைப் பெறுகிறது.

s-இன் மதிப்புக்கள் C என்னும் சுற்றுப் பாதையில் அமைந்தால், $F(s)$ இன் மதிப்புக்களும் $F(s)$ தளத்தில் ஒரு பொருத்தமான சுற்றுப் பாதையில் அமையும்.

ஏதாவது ஒரு புள்ளி 's' Cயில் நகர்ந்து ஒரு வலஞ் சுழிச் சுற்றை முடித்துத் தொடக்க நிலைக்கே வந்தால், $F(s)$ இலும் இதற்கு ஏற்ற ஒரு புள்ளி நகர்ந்து ஆயப் புள்ளியை N தடவைகள் வலமாகச் சுற்றி வரும்.

அங்கு $\boxed{N=Z-P}$ ஆக இருக்கும்.

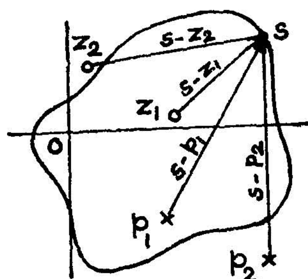
நிறுவுதல் :

$$F(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots}$$

என்க.

s–தளத்தில் C என்னும் சுற்றுப் பாதையும், $F(s)$ இன் சில சுழியெண்களும், பேரெண்களும் காட்டப்பட்டுள்ளன.

(படம் 7.2).



படம் 7.2 சுற்றுப்பாதை C
z_1, z_2 : சுழி எண்கள்
p_1, p_2 : பேரெண்கள்

$(s-z_1)$, $(s-p_1)$... போன்ற உறுப்புக்கள், அந்த அந்த மாறு நிலைப் புள்ளிகளை (Critical Points) s-உடன் இணைக்கும் நேர் கோடுகளால் காட்டப் பட்டுள்ளன.

s எனும் புள்ளி, Cயின் மேல் ஒரு முறை வலம் வருகையில், $(s-z_1)$, $(s-p_1)$ போன்ற உள்-புள்ளிகளை s-உடன் இணைக்கும் திசைக்கோடுகளின் பருவப் பெயற்சி 2π ரேடியன்கள் ஆகும். $(s-z_2)$, $(s-p_1)$ போன்ற வெளிப் புள்ளிகளை s-உடன் இணைக்கும் திசைக்கோடுகளின் பருவப் பெயற்சி சுழி ஆகும்.

Cயின் உள் இருக்கும் Z சுழியெண்களால் ஏற்படும் மொத்தப் பெயர்ச்சி $2\pi Z$ ரேடியன்கள்.

Cயின் உள் இருக்கும் P பேரெண்களால் ஏற்படும் மொத்தப் பெயர்ச்சி $2\pi P$ ரேடியன்கள்.

மீதி உள்ள சுழிப் பேரெண்களின் மொத்தப் பெயர்ச்சி சுழி ஆகும்.

எனவே. $F(s)$ இன் மொத்த பருவப் பெயர்ச்சி $2\pi Z-2\pi P$ அல்லது $(Z-P)2\pi$ ரேடியன்கள். ஒரு சுற்றுக்கு 2π ரேடியன்கள் ஆதலால், $F(s)$ ஆயப் புள்ளியை வலமாக Z-P தடவைகள் சுற்றி இருக்கும். அதாவது $\boxed{N=Z-P}$

நைக்விச்டு பாதை :

அடுத்து நைக்விச்டு பாதை (Nyquist path) என்றால் என்ன என்று பார்ப்போம்.

மேற்கண்ட தேற்றத்தில் $F(s)=1+GH$ என்க. மேலும், C என்னும் சுற்றுப் பாதை s-தளத்தின் வலது பாதி முழுவதையும் தன்னுள் அடக்குவதாக இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது Z என்பது $1+GH$ இன் சுழி யெண்களில், s-தள வலது பாதியில் உள்ளவைகளின் எண்ணிக்கையைத் தரும். இதனால் ஆள்குவையின் நிலையுறுதியை அறிய இயலும்.

இவ்வாறு நிலையுறுதி காண்பதற்காகப் பெரிதாக்கப் பட்ட s-தள சுற்றுப் பாதையே 'நைக்விச்டு பாதை' என அழைக்கப்படுகிறது. இதன் படத்தை (படம் 7.3) அடுத்த பக்கத்தில் காண்க.

இதன் பகுதிகள் :

பகுதி AB :

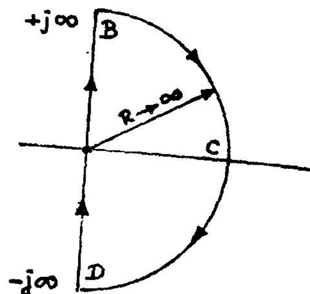
$s=j0$ முதல் $s=j\infty$ வரை, நிலையச்சில்.

பகுதி BCD :

$s=+j\infty$ முதல் $s=-j\infty$ வரை, ஆரம் $R\to\infty$ உடைய அரை வட்டத்தில்,

பகுதி DA :

$s=-j\infty$ முதல் $s=j0$ வரை, நிலையச்சில்.



படம் 7.3 நைக்விச்டு பாதை சுழி வகைக்குவை

ஒரு முக்கியக் குறிப்பு : மேற் கண்ட துணைத் தேற்றத்தின் உண்மைக்கு, சுற்றுப் பாதை C, F(s) இன் சுழியெண், பேரெண் எதன் வழியாகவும் செல்லக் கூடாது. எனவே படம் 7.3 இல் காட்டப் பட்டுள்ள நைக்விச்டு பாதை வகை '0' குவைகளுக்கே பொருந்தும். வகை 1, 2, ... குவைகளில் ஆயப் புள்ளியில் உள்ள பேரெண்ணை சுற்றுப் பாதை தொடாது சென்றால் தான் நிலையுறுதி காண இத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தல் இயலும். எனவே, சுற்றுப் பாதை கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி வரையப் படுகிறது.

இதன் பகுதிகள் :

பகுதி AB :

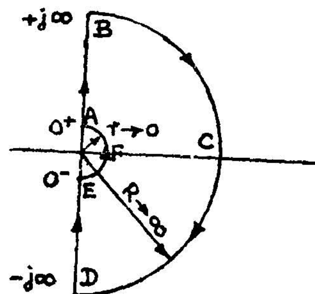
$s=j0^+$ முதல் $s=+j\infty$ வரை, நிலையச்சில்.

பகுதி BCD :

$s=+j\infty$ முதல் $s=-j\infty$ வரை, வலமாக ஆரம் $R\to\infty$ உள்ள அரை வட்டத்தில்.

பகுதி DE :

$s=-j\infty$ முதல் $s=j0^-$ வரை, நிலையச்சில்.



படம் 7.4 நைக்விச்டு பாதை n-வகைக் குவை ($n\neq0$)

பகுதி EFA :

$s = j0^-$ முதல் $s = j0^+$ வரை, இடமாக ஆரம் $r \rightarrow 0$ உள்ள அரை வட்டத்தில்

7.2.3 நைக்விச்டு நிலையுறுதி விதி (Nyquist stability criterion)

நைக்விச்டு விதி :

ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவையின் நிலையுறுதிக்கு, அதன் சுற்று-செலுத்துச் சார்பு GH இன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை, GH இன் கோணதூரப் படம் $(-1,0)$ என்னும் புள்ளியை வலமாகச் சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை, இவற்றின் கூடுதல் சுழியாக வேண்டும்.

நிறுவுதல் : குவையின் $1+GH$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

Z : $1+GH$ இன் நேர்க் குறியீட்டுச் சுழியெண்கள்

P : $1+GH$ இன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்கள்

N : $1+GH$ இன் கோண தூரப்படம் ஆயப் புள்ளியை வலமாகச் சுற்றும் சுற்றுகள், என்க.

's' என்னும் மாறி நைக்விச்டு பாதையில் வலமாக வரும் பொழுது, அதற்கு ஏற்ப வரையப் படுவதே $1+GH$ இன் கோண தூரப் படம் என்க. இது நைக்விச்டு படம் எனப்படுகிறது.

எனவே, துணைத் தேற்றத்தின் படி,

$$N = Z - P$$

அல்லது $N+P = Z$.

குவையின் நிலையுறுதிக்கு, $1+GH$ இன் சுழியெண்கள் s – தள வலது பாதியில் இருத்தல் கூடாது. அதாவது $Z = 0$.

எனவே $N+P = 0$.

மேலும் $1+GH$ இன் நைக்விச்டு படம் $(0,0)$ ஐ வலமாகச் சுற்றும் சுற்றுக்கள் எனில் N , GH இன் நைக்விச்டு படம் $(-1,0)$ ஐ வலமாகச் சுற்றும் சுற்றுக்களும் N ஆகும்.

$1+GH$ இன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்கள் P எனில், GH இன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்களும் P ஆகும்.

ஆகவே, $N+P=0$ என்பதை விரிக்க.

ஓர் ஆள்குலையின் நிலையுறுதிக்கு, குலையின் சுற்று-செலுத்துச் சார்பின் (GH) நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை, GH இன் நைக்விச்டு படம் $(-1,0)$ என்னும் புள்ளியை வலமாகச் சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை இவற்றின் கூடுதல் சுழி ஆக வேண்டும் என்பது தெளிவு.

இதுவே நைக்விச்டு நிலையுறுதி விதி ஆகும்.

குறிப்பு : குறைசுற்று நிலையுறுதி (open loop stable) ஆள் குலைகள்

ஓர் ஆள்குலை நிலையுறுதி உடையதாய் இருக்க அதன் முழுச் செலுத்துச் சாரபில் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்கள் (positive poles in the overall transfer function) இருக்கக் கூடாது.

[ஏனெனில் முழுச் செலுத்தச் சார்பின் பேரெண்கள் $\equiv 1+GH$ இன் சுழியெண்கள் $\equiv$ சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள்]

பின்னூட்டு இல்லாத (ஒரு குறை சுற்றுக்) குலையில் Gயின் பகுதியே (Denominator) சிறப்பியற் சமன்பாட்டைத் தருவதால், அதன் நிலையுறுதிக்கு, அக்குறை சுற்று—செலுத்துச் சார்பில் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்கள் இருக்கக் கூடாது. அதாவது $P=O$.

எனவே, குறை சுற்று நிலையுறுதி உடைய பின்னூட்டு ஆள்குலைகளில் $P=O$. அவற்றின் நிலையுறுதிக்கு நைக்விச்டு விதி $N=O$ என ஆகிறது.

அதாவது,

குறைசுற்று நிலையுறுதி உடைய பின்னூட்டு ஆள்குலையின் நிலையுறுதிக்கு, அதன் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பின் நைக்விச்டு படம் $(-1,0)$ என்ற புள்ளியை உள் அடக்கக் கூடாது. அதாவது $(-1,0)$ என்ற புள்ளி முழுதும் உள்ளே இல்லாது வெளியே இருக்க வேண்டும்.

7.2.4 நைக்விச்டு விதியால் நிறுயுறுதி காணல்

நிலையுறுதி காண வேண்டிய பின்னூட்டு ஆள்குலையின் சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு கொடுக்கப் பட்டுள்ளது என்க.

(1) G மட்டும் கொடுக்கப் பட்டால், $H=1$ என்று கொள்க. GH ஐ எழுதி, அதன் நேர்க் குறியீட்டுப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை P என்ன என்று அறிக.

(2) $GH(s)$-இல் $s=j\omega$ என்று பிரதியிட்டு வரும் $GH(j\omega)$-இல் இருந்து வீச்சு விகிதம் GH, பருவப் பெயர்ச்சி ϕ இவற்றை எழுதுக.

(3) $\omega=0^+$, $\omega=\infty$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, GH, ϕ இவற்றைக் கணித்து GH-இன் கோண தூரப் படம் (எளி வடிவம்) வரைக.

(4) $P=O$ எனில், $(-1,0)$ என்ற புள்ளிக்கு வலது புறத்திலேயே GH–இன் கோண தூரப் படம் அமைந்தால், குலை நிலையுறுதி உடையது ஆகும்.

(5) $P\neq O$ எனில் முழு நைக்விச்டு படமும் வரைதல் வேண்டும்.

(i) GH-இன் கோண தூரப்படம், நைக்விச்டு பாதையில் $s=j0^+$ முதல் $s=j\infty$ வரை உள்ள பகுதி ABயின் மாற்றுப் படம் (mapping) ஆகும்.

(ii) மெய் அச்சை ஆடியாகக் கொண்ட அதன் பிம்பமே (Mirror image with respect to the real axis) $s=-j\infty$ முதல் $s=j0^-$ வரை உள்ள பகுதி CDயின் மாற்றுப் படம் ஆகும்.

(iii) பொதுவாக $s\to\infty$ என்கையில் $GH \propto \frac{1}{s^m}$ என்க.

எனவே நைக்விச்டு பாதையில் $s=j\infty$ முதல் $s=-j\infty$ வரை ஆரம் $R\to\infty$ உடைய வலஞ்சுழி அரை வட்டத்தின் (பகுதி BCD) மாற்றுப்படம், ஆயம் $r\to 0$ உடைய m இடஞ்சுழி வட்டங்கள் ஆகும். (சுழி ஆரம் உள்ள இவ் அரை வட்டங்களை எளிமை கருதி ஒரு புள்ளியாகவே குறித்து விடுதல் வழக்கம்).

குறிப்பு: வகை '0' குலைகளின் மேற் கண்ட மூன்று படிகளில் நைக்விச்டு படம் முற்றுப் பெற்று விடுகிறது.

ஆனால், வகை 'N' குலைகளில் ($N = 1, 2, \ldots$) படி 4 ஒன்று உண்டு.

(iv) பொதுவாக $s \to 0$ என்கையில் $GH \propto \frac{1}{s^n}$ என்க.

எனவே, நைக்விச்டு பாதையின் $s = j0^-$ முதல் $s = j0^+$ வரை ஆரம் $r \to 0$ உடைய இடஞ்சுழி அரைவட்டத்தின் (பகுதி EFA) மாற்றுப்படம் ஆரம் $R \to \infty$ உடைய n வலஞ்சுழி அரைவட்டங்கள் ஆகும். இவ்வாறு நைக்விச்டு படம் முற்றுப் பெறுகிறது.

(6) s-இன் மதிப்பு அதிகம் ஆகும் திசையில் அம்புக் குறி இட்டு, $(-1,0)$ என்ற மாறுநிலைப் புள்ளியின் இடத்தைக் குறித்து, அப்புள்ளியை GH இன் நைக்விச்டு படம் வலஞ் சுழியாகச் சுற்றும் நிகர சுற்றுக்களைக் (Net encirclements) கணக்கிடுக.

இதற்கு $(-1,0)$ புள்ளியில் இருந்து GH படத்தின் ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு ஆரக் கோடு வரைக. அக்கோட்டின் முனையை GH-இன் மீது, அம்புக் குறியின் திசையிலேயே நகர்த்திச் செல்க. மீண்டும் தொடக்கப் புள்ளிக்கே வரும் வரை ஆரக்கோடு எவ்வளவு நிகர வலஞ் சுழிச் சுற்றுக்களைத் தருமோ அதுவே 'N' ஆகும்.

$N+P=0$ எனில் ஆள்குலை நிலையுறுதி உடையது.

7.2.5 சார்பு நிலையுறுதி (Relative stability)

சார்பு நிலையுறுதி என்பது நிலையுறுதியின் தரத்தைக் குறிக்கிறது. அதாவது, ஓர் ஆள்குலை நிலையுறுதி பெற்றிருந்தால் அதை இழக்கா வண்ணம் குலையின் பெருக்க எண்ணையோ (K), பருவப் பெயர்ச்சியையோ (ϕ) எவ்வளவு அதிகப் படுத்தலாம், நிலையுறுதி இல்லாவிடில் இத் துணை அலகுகளை (parameters) எந்த அளவு குறைத்து நிலையுறுதியை நிறுவலாம் என்பன பற்றிப் பேசுவதே சார்பு நிலையுறுதி ஆகும்.

ஓர் ஆள்குலையின் சார்பு நிலையுறுதியை அறிய உதவும் அலகுகள் இரண்டு. அவையே பெருக்க நிறைவெண் (gain margin), பருவ நிறைவெண் (phase margin) என்பன.

பெருக்க நிறைவெண் (gain margin) :

ஆள்குலையின் நிலைப் பெருக்க எண்ணை (static gain) எவ்வளவு மடங்கு அதிகம் ஆக்கினால், அது விளிம்பு நிலையுறுதியில்

(marginal stability) இருக்குமோ, அந்த மடங்கு எண்ணே "பெருக்க நிறைவெண்" எனப்படும். அப்பொழுது பருவப் பெயர்ச்சி மாறிலி ஆகும்.

GH-இன் நைக்விச்டு படம் $(-1,0)$ புள்ளிக்கு வலது புறம் சென்றால் குவை நிலையுறுதி உடையது! இடது புறம் சென்றால் நிலையுறுதி அற்றது ; புள்ளியின் வழியே சென்றால் விளிம்பு நிலை யுறுதி உடையது.

எனவே, விளிம்பு நிலையுறுதிக்கு, $\phi = -180°$ என்கையில், $GH = 1$ ஆக வேண்டும்.

பொதுவாக, $\phi = -180°$ எனில் $GH = GH_x$ என்க. $GH = 1$ எனில் விளிம்பு நிலையுறுதி கிடைக்கும். உண்மையான மதிப்பு GH_x. இதை $\frac{1}{GH_x}$ ஆல் பெருக்க $GH = 1$ ஆகிறது.

எனவே, பெருக்க நிறைவெண் (gain margin)

$$G_m = \frac{1}{GH_x}$$

$$G_m = 20 \log \frac{1}{GH_x} \text{ டெசிபல் } = -20 \log GH_x \text{ டெசிபல்}$$

பருவ நிறைவெண் (phase margin) :

நிலைப் பெருக்க எண் மாறிலியாக இருக்கையில், பருவப் பெயர்ச்சி எவ்வளவு மாறினால் ஆள் குவை விளிம்பு நிலையுறுதியில் இருக்குமோ, அந்த மாற்றுக் கோணமே 'பருவ நிறைவெண்' (phase margin) ஆகும்.

ஆரம் $GH = 1$ எனக் கொண்டு, ஆயத்தை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வில் வரைக. அது $GH(s)$ படத்தை வெட்டும் இடத்தில் உள்ள பருவப் பெயர்ச்சி ϕ எவ்வளவு என்று கணிக்க. இப்பொழுது *GH* ஐ மாற்றாமல் பருவக் கோணத்தை ϕ_m என்ற அளவு மாற்றவும் $GH(s)$ படம் $(-1,0)$ புள்ளியின் வழிச் செல்கிறது. அதாவது குவை விளிம்பு நிலையுறுதியை அடைகிறது. ϕ_m என்பதே பருவ நிறைவெண் ஆகும்.

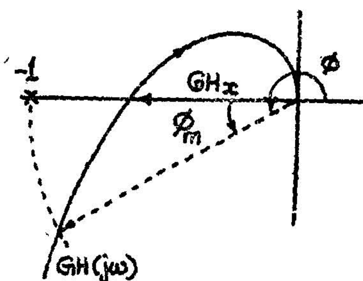
$$\phi_m = \phi - 180$$

$$= \phi - 180 + 360 = \phi + 180°$$

எனவே,

பருவ நிறைவெண் (phase margin) $\phi_m = 180° + \phi$

*குறிப்பு : $\phi = 210°$ என்க. இதை $\phi = -150°$ என்றும் எழுதலாம். நேர் அச்சில் (real axis) இருந்து வலமாக அளந்தால் GH-இன் கோணம் $-150°$ என்றே வரும். எனவே, பருவ நிறை வெண் $= 180 + (-150°) = 30.°$



$$G_m = \frac{1}{GH_x}$$

$$\phi_m = 180 + \phi$$

படம் 7.5 G_m, ϕ_m காணல் : கோண தூரப் படம் (நைக்விச்டு படம்)

7·3 செவ்வகப் படங்களும் நிலையுறுதியும் (Rectangular plots and Stability)

7.3.1 சில வரையறைகள் :

போடே படம் (Bode diagram) :

போடே வீச்சு விகிதப் படத்தில் அலைவெண் ω (மடக்கை அளவையில்) x-அச்சிலும், டெசிபல் வீச்சு விகிதம் $db\ G$ (நேர் அளவையில்) y-அச்சிலும் கொள்ளப்படுகின்றன.

போடே பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்தில் அலைவெண் ω (மடக்கை அளவையில்) x-அச்சிலும், பருவப் பெயர்ச்சிப் பாகை (நேர் அளவையில்) y-அச்சிலும் கொள்ளப் படுகின்றன.

இவ் இரண்டு படங்களுக்கும் x-அச்சில் அலைவெண் ω பொதுவாக இருப்பதால், இவற்றை ஒன்றன் மேல் ஒன்று பொருத்த இயலும். இவ்வாறு பொருத்தும் பொழுது x-அச்சுக்கு நேராக 0-டெசிபல் அளவும், $-180°$ அளவும் இருக்குமாறு பொருத்தினால், நிலையுறுதிக் கணிப்பிற்கு வசதியாக இருக்கும். இத்தகைய படமே 'போடே படம்' எனப்படுகிறது.

எனவே, வீச்சு விகிதப் படம், பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் இரண்டையும் 0 டெசிபல் கோடும், -180° பருவப் பெயர்ச்சிக் கோணத்தின் கோடும் பொருந்துமாறு ஒன்றன்மேல் ஒன்று வைத்து வரையப் படுவது 'போடே படம்' (Bode diagram).

பெருக்கக் கடப்பு (gain cross-over) என்பது வீச்சு விகிதப் படம் கிடை அச்சைக் (-180° கோடு) கடக்கும் அலைவெண் ஆகும்.

பருவக் கடப்பு (phase cross-over) என்பது பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் கிடை அச்சைக் (0 டெசிபல் கோடு) கடக்கும் அலைவெண் ஆகும்.

7.3.2 போடே படத்தில் இருந்து நிலையுறுதி காணல்

நைக்விச்டு விதியில் இருந்து நாம் அறிவது என்ன ? GH-இன் கோண தூரப் படத்தில், $GH_x < 1$ எனில் குலை நிலையுறுதி உடையது. அதாவது, $\phi = -180^\circ$ என்கையில், $GH < 1$.

$GH < 1$ என்பதை $GH < 20 \log 1$ டெசிபல்

அல்லது $GH < 0$ டெசிபல்

என எழுதலாம். இதன் பொருள் :

பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில் (phase cross-over frequency), பருவப் பெயர்ச்சி $= -180^\circ$. அங்கு, டெசிபல் வீச்சு விகிதம் 0-க்குக் கீழே (அதாவது எதிர்க் குறியீட்டு எண் ஆக) இருப்பின் குலை நிலையுறுதி உடையது.

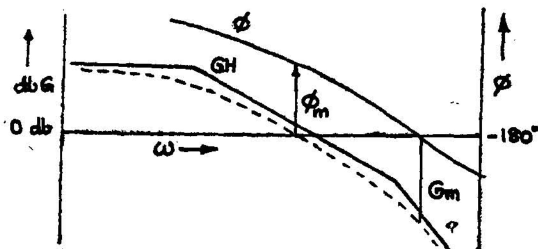
இவ்வாறு, போடே படத்தைப் பார்த்த அளவிலேயே குலை நிலையுறுதி உடையதா, அற்றதா என்று கூறலாம்.

பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில், டெசிபல் வீச்சு விகிதம் எதிர்க் குறியீடு உடையதாயின் குலை நிலையுறுதி உடையது; நேர்க் குறியீடு உடையதாயின் குலை நிலையுறுதி அற்றது.

மேலும், பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில் இருந்து, வீச்சு விகிதப் படத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடு பெருக்க நிறை வெண்ணை டெசிபலில் தருகிறது. [ஏனெனில், பருவக் கடப்பில் $\phi = -180^\circ$. எனவே $GH = GH_x$. குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= -20 \log GH_x$. இதுவே பெருக்க நிறைவெண்.]

பெருக்கக் கடப்பு அலைவெண்ணில் இருந்து, பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடு பருவ நிறை வெண்ணைப் பாகையில் தருகிறது.

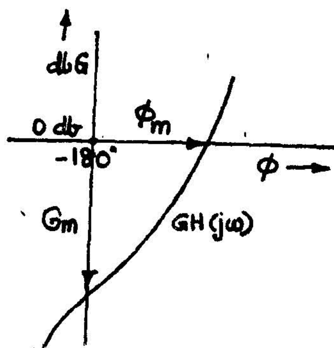
[ஏனெனில், பெருக்கக் கடப்பில், டெசிபல் $GH = 0$ அல்லது $GH = 1$. இதற்கு உரிய பருவப் பெயர்ச்சி ϕ. குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \phi - 180 = 180 + \phi$. இதுவே பருவ நிறைவெண்.]



படம் 7.6 G_m, ϕ_m காணல் 'போடே' படம்

7.3.3 நிக்கல்சு படமும் நிலையுறுதியும் : (Nichols plot and stability)

டெசிபல் வீச்சு விகிதத்தை நேர் அளவையில் y-அச்சிலும், பருவப் பெயர்ச்சிக் கோணத்தை நேர் அளவையில் x-அச்சிலும் கொண்டு, 0 டெசிபலும் $-180°$ யும் ஆயப் புள்ளியில் அமையுமாறு வரைவதே நிக்கல்சு படமாகும்.



G_m, ϕ_m காணல் டெசிபல் வீச்சு-பருவப்படம்

படம் 7.7 நிக்கல்சு படம்

குவையின் நிலையுறுதி : $GH(s)$ – இன் நிக்கல்சு படம் y-அச்சை, ஆயப் புள்ளிக்குக் கீழே கடந்தால், குவை நிலையுறுதி

உடையது என்று பொருள். எவ்வாறு எனில், y-அச்சில், $\phi = -180^\circ$. அங்கு $GH < 0$ டெசிபல் எனில் $GH < 1$ என்று நிலையுறுதி யின் தேவை நிறைவு செய்யப் படுகிறது.

பெருக்க நிறை வெண் : ஆயப் புள்ளியில் இருந்து y-அச்சில் $GH(s)$ படத்திற்கு உள்ள தூரம் பெருக்க நிறைவெண்ணை டெசி பலில் தருகிறது. ஏனெனில் அங்கு $\phi = -180^\circ$. எனவே $GH = GH_x$. தூரம் $-20 \log GH_x$ அல்லது G_m — ஐ தருகிறது.

பருவ நிறைவெண் : ஆயப் புள்ளியில் இருந்து x-அச்சில் $GH(s)$ படத்திற்கு உள்ள தூரம் பருவ நிறைவெண்ணை பாகை யில் (in degrees) தருகிறது. ஏனெனில், x-அச்சில் $GH = 0$ டெசிபல் அல்லது $GH = 1$, இதற்கு உரிய பருவப் பெயர்ச்சி ϕ. ஆயப் புள்ளியில் இருந்து $GH(s)$ இன் தூரம் $\phi - 180$ ஐ தரு கிறது. இதுவே பருவ நிறைவெண் ஆகும்.

7.3.4 பருவ நிறைவெண்ணும் தடையூட்ட விகிதமும் : (Phase margin and Damping ratio)

ஒரு இருபடி முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையின் பருவ நிறை வெண்ணுக்கும், தடையூட்ட விகிதத்திற்கும் உள்ள உறவை இங்கு நிறுவுவோம்.

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\delta\omega_n)}$$

$$GH(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\delta\omega_n)}$$

$$GH = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^2(\omega^2+4\delta^2\omega_n^2)}}$$

$$\phi = -90^\circ - \tan^{-1}\frac{\omega}{2\delta\omega_n}$$

பருவ நிறைவெண் காண, $GH = 1$ என்க.

எனவே, $$\frac{\omega_n^4}{\omega^2(\omega^2+4\delta^2\omega_n^2)} = 1$$

$$\omega^4 + 4\delta^2\omega_n^2\omega^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\omega^2 = -2\delta^2\omega_n^2 \pm \sqrt{4\delta^4\omega_n^4 + \omega_n^4}$$

ω^2 எதிர்க் குறியீட்டு எண்ணாக இருத்தல் இயலாது.

$$\therefore \quad \omega^2 = -2\delta^2 \omega_n^2 + \sqrt{4\delta^4 \omega_n^4 + \omega_n^4}$$

$$= \omega_n^2 [\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2]$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = [\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \phi = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{1}{2\delta} [\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2]^{\frac{1}{2}}$$

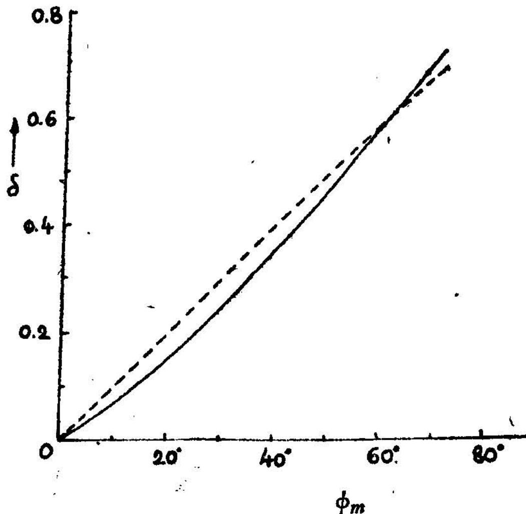
பருவ நிறைவெண்

$$\phi_m = 180^\circ + \phi$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1} = \frac{[\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2]^{\frac{1}{2}}}{2\delta}$$

$$= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{[\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2]^{\frac{1}{2}}}{2\delta}$$

$$= \tan^{-1} 2\delta \left[\frac{1}{\sqrt{4\delta^4+1} - 2\delta^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$



படம் 7.8 தடையூட்டு விகிதம்-பருவ நிறைவு எண் இடை உறவு (ϕ_m vs δ)

இச் சமன்பாடு தடையூட்டு விகிதம் δ, பருவ நிறைவெண் ϕ_m இவற்றிடையே உள்ள உறவைத் தருகிறது. இதை வரை படமாக வரைந்து, அதன் எளி வடிவமாக ஒரு நேர் கோட்டைக் கொண்டால், அதில் இருந்து,

$$\boxed{\delta = 0.01\ \phi_m}$$

என்ற உறவு கிடைக்கிறது. $\delta \leqslant 0.7$ எனில் இச் சமன்பாடு ஓரளவு சரியான மதிப்புக்களைத் தருகிறது.

சான்று $\phi_m = 40°$ என்க.

$\delta = 0.01 \times 40 = 0.4$. இதன் சரியான மதிப்பு **0.36**

7.3.5 காலத் தாழ்வுக் குலைகளின் நிலையுறுதி (Stability of Systems with time delays)

காலத் தாழ்வு (time delay) என்பது ஆள்குலை அமைப்புக் களில் அநேகமாகத் தவிர்க்க இயலாத ஒரு அம்சம் ஆகி விடுகிறது. எந்தத் தொடர் செயலிலும் கட்டுப்படுத்த வேண்டிய வெப்ப நிலையோ, அழுத்தமோ, உலோகப் பருமனோ அளக்கப்படும் நேரத்திற்கும், வழு கணிக்கப்பட்டு திருத்தும் செயலைத் தூண்டும் நேரத்திற்கும் இடையே சிறிது காலத் தாழ்வு இருக்கும். இதனை

$$\text{காலத் தாழ்வு}\ T = \frac{\text{தூரம்}\ \ d}{\text{வேகம்}\ \ v}$$

என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம். இத் தகைய காலத் தாழ் வின் செலுத்துச் சார்பு e^{-sT} ஆகும்.

இதன் விளைவு என்ன? e^{-sT} யின் அலைவிளைவு $e^{j\omega T} = 1 \angle -\omega T$. இது குலையின் வீச்சு விகிதத்தை ஒன்றும் செய்வ தில்லை. ஆனால் $-\omega T$ என்ற பருவத் தாழ்வைத் (phase lag) தோற்றுவிக்கிறது. இதனால் குலையின் நிலையுறுதித் தரம் குறைகிறது.

இதை ஈடு செய்ய குலையின் நிலைச் சுற்றுப் பெருக்க வெண்ணைக் (static loop gain) குறைக்க வேண்டும். இதை எவ் வளவு குறைக்க வேண்டும் என்று போடே படங்களைக் கொண்டு எளிதிற் கணிக்கலாம்.

காலத் தாழ்வு இல்லாத குவையின் சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பில் இருந்து விகித வீச்சுப் படம், பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் இவற்றை வரைந்து பருவ நிறைவெண்ணைக் காணலாம்.

பிறகு, காலத் தாழ்வினால் விளையும் $-\omega T$ என்ற பருவத் தாழ்வைக் கொண்டு, பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்தை மட்டும் மாற்றி வரையலாம். இப் புதிய படத்தைக் கொண்டு பழைய அளவே பருவ நிறைவெண் இருக்க, வீச்சு விகிதப் படத்தில் K எவ்வளவு மாற வேண்டும் என்று கணக்கிடலாம்.

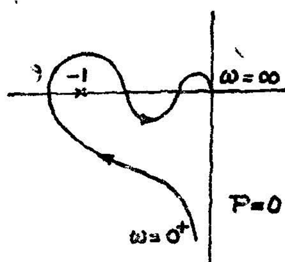
e^{-sT} என்னும் செலுத்துச் சார்பை உடைய காலத்தாழ்வு, நைக்விச்டு பாதையுள் புதிதாக சுழி எண்ணையோ, பேரெண்ணையோ புகுத்தாதலால், நைக்விச்டு நிலையுறுதி விதியை, காலத் தாழ்வு ஆள்குவைகளுக்கும் பயன் படுத்தலாம்.

காலத் தாழ்வு, வீச்சு விகித்ததை மாற்றாது, பருவப் பெயர்ச்சியை மட்டிலும் மாற்றுவதால், போடே முறையைக் கையாளுவதே எளிதாகும்.

மாதிரி வினா 7.11

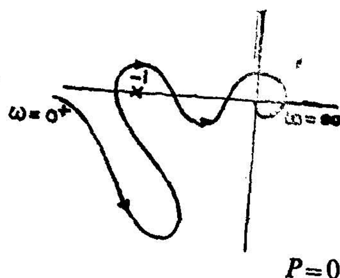
சில முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவைகளின் குறை சுற்று அலை விளைவுப் படங்கள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன. முழு நைக்விச்டு படங்களை வரைந்து இக் குவைகள் நிலையுறுதி உடையனவா அல்லவா என்று நிறுவுக. குவை வகைகளையும் எழுதுக.

(அ)



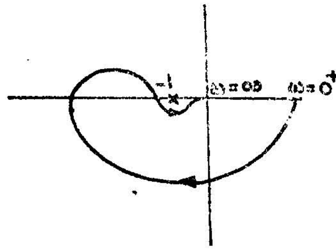
படம் 7.9 கோண தூரப் படம்

(ஆ)



படம் 7.10 கோண தூரப் படம்

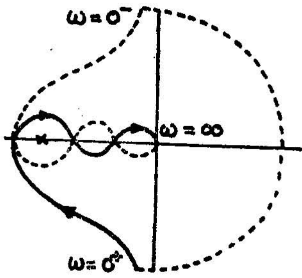
(இ)



படம் 7.11 கோண தூரப் படம்

தீர்வு :

(அ) குலை வகை—'1'. ஏனெனில் $\omega \rightarrow 0^+$ என்கையில் $\phi = -90°$ ஆக இருக்கிறது. இது s^{-1} என்ற GH-இன் உறுப்பைக் குறிக்கிறது. எனவே குலை வகை—1.



படம் 7.12 நைக்விச்டு படம்

$P = O$

$N = 2$

$Z = N + P = 2$

நைக்விச்டு விதியின் படி, இது s-தள வலது பாதியில் $1 + GH$-இன் 2 சுழியெண்கள் அல்லது சிறப்பியல் சமன்பாட்டின் 2 மூலங்களைக் குறிக்கிறது. எனவே, குலை நிலையுறுதி அற்றது.

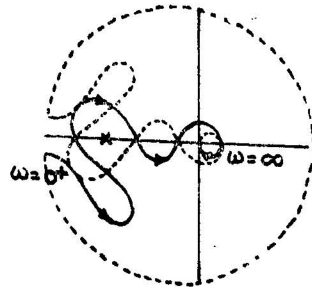
(ஆ) குலை வகை—2 : ஏனெனில் $\omega \rightarrow 0^+$ என்கையில் $\phi = -180°$ ஆக இருக்கிறது. இது s^{-1} என்ற GH-இன் உறுப்பைக் குறிக்கிறது. எனவே குலை வகை—2.

$P = O$

$N = 2$

$Z = N + P = 2$

சிறப்பியல் சமன்பாட்டில் s-தள வலது பாதி மூலங்கள் 2. எனவே குலை நிலையுறுதி அற்றது.



படம் 7.13 நைக்விச்டு படம்

குறிப்பு : இது ஒரு கட்டுப்பாட்டு நிலையுறுதிக் குவை (conditionally stable system). $(-1, 0)$ என்னும் புள்ளி நைக் விச்டு படத்தில் A என்னும் இடத்தில் அமைந்து இருந்தால்,

$$N = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore\ Z = N + P = 0$$

சிறப்பியல் சமன்பாட்டில் s-தள வலது பாதி மூலங்களே இல்லை. எனவே, குவை நிலையுறுதி உடையதாகிறது.

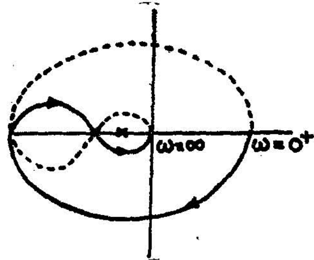
(இ) குவை வகை — O. ஏனெனில் $\omega \to 0^+$ எனில், $\phi = 0°$. இது GH—இல் s^0 என்ற உறுப்பைக் குறிக்கிறது. எனவே வகை '0'.

$$P = 0$$

$$N = 1 - 1 = 0$$

$$Z = N + P = 0$$

சிறப்பியல் சமன்பாட்டில் s-தள வலது பாதி மூலங்களே இல்லை. எனவே, குவை நிலையுறுதி உடையது.



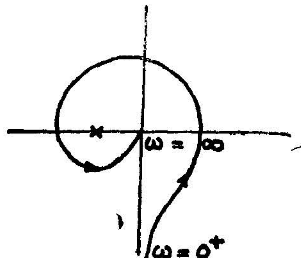
படம் 7.14 நைக்விச்டு படம்

குறிப்பு ; $(-1, 0)$ என்ற புள்ளி P_0 என்னும் பகுதியில் அமைந்தால் $N = 1 + 1 = 2$. குவை நிலையுறுதி அற்றதாகும்.

மாதிரி வினா 7.12

கீழே உள்ள படங்களில் சில ஆள்குவைகளின் $GH(j\omega)$ கோண தூரப் படங்களைக் காண்க. ஒவ்வொன்றிலும் முழு நைக்விச்டு படத்தை வரைக; GH இன் s-தள வலதுபாதியில் உள்ள பேரெண்களைக் காண்க; குவையின் முழுமை நிலையுறுதியைக் கணிக்க.

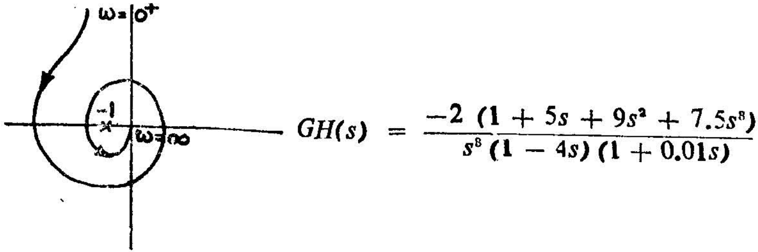
(அ)



படம் 7.15 கோண தூரப் படம்

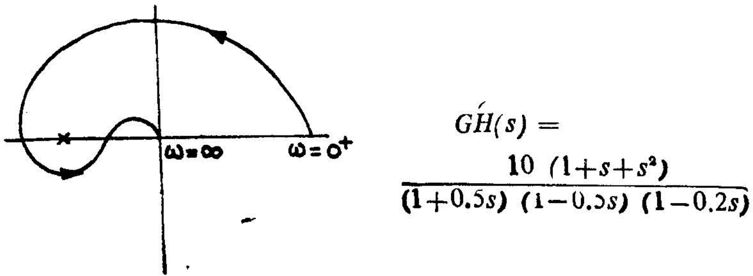
$$GH(s) = \frac{-10\,(1+0.3s)^2\,(1+0.5s)\,(1+5s)}{s(1-0.1s)\,(1+0.2s)\,(1-0.3s)\,(1+0.01s)}$$

(ஆ)



படம் 7.16 கோணதூரப்படம்

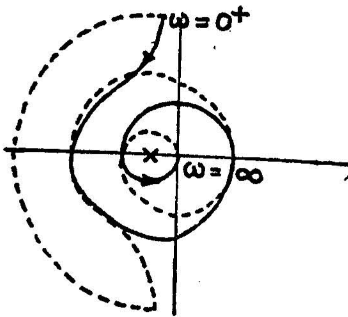
(இ)



படம் 7.17 கோண தூரப்படம்

தீர்வு :

(அ) முழு நைக்விச்டு படம்



படம் 7.18 நைக்விச்டு படம்

$w \to 0$ எனில் $GH(s) = -\frac{10}{s}$

$\omega = 0^+$ எனில் $\phi = -270°$

$\omega = 0$ எனில் $\phi = -180°$

$\omega = 0^-$ எனில் $\phi = -90°$

எனவே $\omega = 0^-$ முதல் 0^+ வரை ஒரு வலஞ் சுழி அரை வட்டத்தால் படம் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

பேரெண்கள் : $GH(s)$-இன் பேரெண்களுள் 3 நேர்க் குறியீடு உடையன. எனவே s- தள வலது பாதியில் உள்ள பேரெண்கள் $P=3$.

நைக்விச்டு படத்தில் இருந்து $N = -3$.

$\therefore Z = N + P = -3 + 3 = 0$.

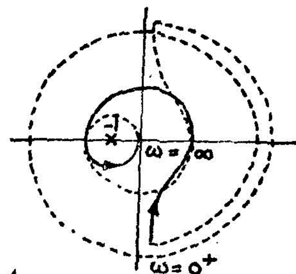
எனவே, குவை நிலையுறுதி உடையது.

(ஆ) முழு நைக்விச்டு படம்

$\omega \to 0$ எனில் $GH(s) = -\frac{2}{s^3}$

எனவே $\omega = 0^-$ முதல் $\omega = 0^+$ வரை மூன்று வலஞ்சுழி அரை வட்டங்களால் நைக்விச்டு படம் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

பேரெண்கள் : $GH(s)$-இன் பேரெண்களுள் ஒன்று நேர்க் குறியீடு உடையது. எனவே s-தள வலது பாதிப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை $P = 1$.



படம் 7.19 நைக்விச்டு படம்

நிலையுறுதி : நைக்விச்டு படத்தில் இருந்து,

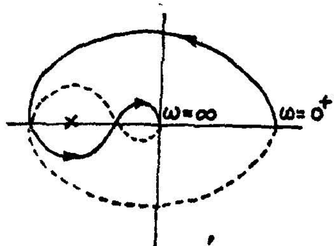
$N = -2 + 1 = -1$

$\therefore Z = N + P = -1 + 1 = 0$.

எனவே குவை நிலையுறுதி உடையது.

(இ) முழு நைக்விச்டு படம் : $\omega \to 0$ எனில் $GH(s) = \frac{10}{s^0}$

எனவே $\omega = 0^-$, $\omega = 0^+$ ஆகிய இரு புள்ளிகளும் ஒன்றுய்ப் படிந்து விடுகின்றன.



படம் 7.20 நைக்விச்டு படம்

பேரெண்கள் : $GH(s)$-இன் பேரெண்களுள் இரண்டு நேர்க் குறியீடு உடையன. எனவே, $P = 2$.

நிலையுறுதி: நைக்விச்டு படத்தில் இருந்து,

$N = -2$.

$\therefore Z = N + P = -2 + 2 = 0$

எனவே, குவை நிலையுறுதி உடையது.

மாதிரி வினு 7.13

கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சுற்றுச் செலுத்துச் சார்புகளை உடைய பின்னூட்டு ஆள்குலைகளின் நிலையுறுதியை ஆய்க.

$$(\text{அ})\quad GH(s) = \frac{0.25(1+4s)}{s^2(1+0.25s)(1+0.1s)}$$

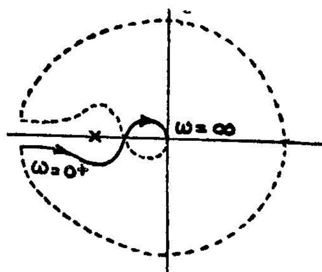
$$(\text{ஆ})\quad GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s-1)}$$

$$(\text{இ})\quad GH(s) = \frac{K(1+s)}{(1-s)}$$

தீர்வு :

இக் குலைகளின் $GH(j\omega)$ கோண தூரப் படங்கள் வினு 6.9 இல் வருவிக்கப் பட்டன. அவற்றை அப்படியே இங்கு பயன் படுத்துவோம்.

$$(\text{அ})\quad GH(s) = \frac{0.25\,(1+4s)}{s^2(4+0.25s)\;(1+0.1s)}$$



படம் 7.22 நைக்விசுடு படம்

$P=0$

$N=0$

$Z=N+P=0$

எனவே குலை நிலையுறுதி உடையது.

$$(\text{ஆ})\; GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s-1)}$$

$P=1$

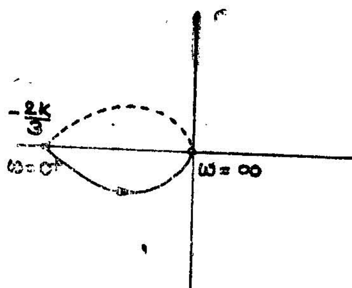
(i) $\frac{2K}{3} > 1$ எனில்,

$(-1,0)$ சுற்றினுள் இருக்கிறது.

$\therefore\quad N = -1$

$Z=N+P= -1+1=0$

எனவே, குலை நிலையுறுதி உடையது.



படம் 7.23 நைக்விசுடு படம்

(ii) $\frac{2K}{3}<1$ எனில், $N=0$

$Z=N+P=0+1=1$

எனவே குலை நிலையுறுதி உடையது அல்ல.

(iii) $\frac{2K}{3}=1$ எனில், N-ஐ கணிக்க இயலாது.

குலை விளிம்பு நிலையுறுதி உடையது, அதாவது

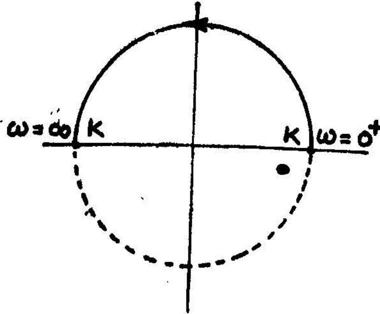
$K>1.5$: நிலையுறுதி உள்ளது.

$K=1.5$: விளிம்பு நிலையுறுதி உள்ளது.

$K<1.5$: நிலையுறுதி அற்றது.

(இ) $GH(s)=\frac{K(1+s)}{(1-s)}$

இதன் நைக்விச்டு படம் கீழே உள்ளது.



படம் 7.23 நைக்விச்டு படம் $\frac{K(1+s)}{1-s}$

$P=1$

(i) $K>1$ எனில்

$N=-1$

$Z=N+P=-1+1=0$

குலை நிலையுறுதி உள்டயது.

(*ii*) $K<1$ எனில்

$N=0$

$Z=N+P=0+1=1$

குவை நிலையுறுதி அற்றது.

(*iii*) $K=1$ எனில்

N கணிக்க இயலாதது.

குவை விளிம்பு நிலையுறுதி உடையது.

மாதிரி வினா 7.14

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையின் குறைசுற்று செலுத்துச் சார்பு.

$$G(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.001s)}$$

ஒருமை ஏற்ற ஊட்டத்தினல் (unit ramp input) ஏற்படும் கடைநிலை வழு 0.1க்குக் குறைவாக இருக்க வேண்டும் எனில் Kயின் மதிப்பு என்ன? Kயின் இந்த மதிப்பிற்கு உரிய பெருக்க நிறைவெண், பருவ நிறைவெண் ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணிக்க.

தீர்வு :

$$e_{ss} = \underset{s\to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{s.\ R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

இங்கு $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$H(s)=1$

$$G(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.001s)}$$

$$\therefore\ e_{ss} = \underset{s\to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{s.\ \frac{1}{s^2}}{1+G(s)H(s)}$$

$$= \frac{1}{\underset{s\to 0}{\text{எல்லை}}\ sG(s)H(s)}$$

$$=\frac{1}{K}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.1 \text{ எனில் } K > 10$$

$K = 10$ என்று கொள்வோம்.

$$G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)(1+0.001s)}$$

பெருக்க நிறைவெண் :

$$s(1+0.1s)(1+0.001s) = s(1+0.101s+0.0001s^2)$$
$$= 0.101s^2+s(1+0.0001s^2)$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{-0.101\omega^2+j\omega(1-0.0001\omega^2)}$$

இதில் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழி ஆக்க,

$$(1-0.0001\,\omega^2) = 0 \quad \therefore \omega^2 = 10^4;\ \omega = 100$$

$$G_x = \left|\frac{10}{-0.101\times10^4+0}\right| = \frac{1}{101}$$

பெருக்க நிறைவெண் $G_m = \frac{1}{G_x} = \boxed{101}$

பருவ நிறைவெண் :

$$G = \frac{10}{\sqrt{\omega^2(1+10^{-2}\omega^2)(1+10^{-6}\omega^2)}} = 1, \text{ என்க.}$$

எனவே,

$$\omega^2\,(1+10^{-2}\omega^2)(1+10^{-6}\omega^2) = 100;$$

இதைப் பிழைத் திருத்த முறையில் தீர்ப்போம்.

$\omega^2 = 60$ எனில் இடது புறம் $\simeq 96$

$\omega^2 = 62$ எனில் இடது புறம் $\simeq 100.5$

$\omega^2 = 61.8$ எனில் இடது புறம் $\simeq 100$

எனவே, $G = 1$ என்கையில் $\omega^2 = 61.8$ அல்லது $\omega = 7.85$

$$\phi = -90^\circ - \tan^{-1} 0.1\omega - \tan^{-1} 0.001\omega$$
$$= -90 - \tan^{-1} 0.785 - \tan^{-1} 0.00785$$
$$= -128.6^\circ$$

பருவ நிறைவெண் $\phi_m = 180° + \phi$

$$= 180° - 128\ 6°$$

$$= \boxed{51.4°}$$

குறிப்பு : இம் முடிவுகளை போடே படங்களின் உதவியாலும் வருவிக்கலாம்.

மாதிரி வினு 7.15

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையில்

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+s)}$$

(அ) பெருக்க நிறைவெண் $G_m = 20$ டெசிபல் இருக்குமாறு K-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ஆ) பருவ நிறைவெண் $\phi_m = 60°$ இருக்குமாறு K-யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+s)}$$

(அ) பெருக்க நிறைவெண் :

$$s(1+0.1s)(1+s) = s(1+1.1s+0.1s^2)$$

$$= 1.1s^2 + s(1+0.1s^2)$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{-1.1\omega^2 + j\omega(1-0.1\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழி ஆக்க,

$1 - 0.1\omega^2 = 0$ அல்லது $\omega^2 = 10$; $\omega = 3.16$

$$G_x = \left| \frac{K}{-1.1 \times 10 + 0} \right| = \frac{K}{11}$$

$$G_m = \frac{1}{G_x} = \frac{11}{K}$$

$G_m = 20$ டெசிபல் $= 10$

$$\frac{11}{K} = 10 \qquad \therefore \boxed{K = 1.1}$$

(ஆ) பருவ நிறைவெண் :

$\phi_m = 60^\circ$

$= 180^\circ + \phi$

$\therefore \phi = -120^\circ$

செலுத்துச் சார்பில் இருந்து,

$\phi = -90 - \tan^{-1} 0.1\omega - \tan^{-1}\omega$

$\therefore -90^\circ - \tan^{-1} 0.1\omega - \tan^{-1}\omega = -120^\circ$

$\tan^{-1} 0.1\omega + \tan^{-1}\omega = 30^\circ$

$\omega = 0.5$ என்க. இடதுபுறம் $= 2.89^\circ + 26.6^\circ = 29.49^\circ$

$\omega = 0.51$ என்க. இடதுபுறம் $= 2.9^\circ + 27.0^\circ = 29.9^\circ$

$\omega = 0.511$ என்க. இடதுபுறம் $= 2.9^\circ + 27.09^\circ = 30.0^\circ$

எனவே $G = 1$ எனில், $\omega = 0.511$.

$$G = \frac{K}{\sqrt{\omega^2(1+0.1\omega^2)(1+\omega^2)}} = 1$$

$$\therefore K = \sqrt{\omega^2(1+0.01\omega^2)(1+\omega^2)}$$

$$= \sqrt{0.261 \times 1.00261 \times 1.261}$$

$$= \sqrt{0.3305}$$

$$= \boxed{0.575}$$

எனவே $G_m = 20$ டெசிபல் எனில் $K = 1.1$

$\phi_m = 60^\circ$ எனில் $K = 0.575$

மாதிரி வினா 7.16

ஓர் அடிமைக் குலையில் $GH(s) = \frac{K}{sT(1+sT)^2}$

இதில் K-யின் மதிப்பு $\phi_m = 45^\circ$ இருக்குமாறு திருத்தி அமைக்கப் படுகிறது. இதற்குத் தகுந்த பெருக்க நிறைவெண் G_m என்ன?

தீர்வு :

$\phi_m = 180 + \phi = 45^\circ$

$\therefore \phi = -135^\circ$

கொடுத்துள்ள செலுத்துச் சார்பில் இருந்து,

$$\phi = -90^\circ - 2\tan^{-1}\omega T = -135^\circ$$

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}\omega T = 45^\circ$$

இதில் இருந்து $\omega T = 0.415$

அதாவது $GH = 1$ என்கையில் $\omega T = 0.415$.

$$GH = \frac{K}{\omega T\,(1+\omega^2T^2)} = 1$$

$$\therefore \quad K = \omega T\,(1+\omega^2T^2)$$
$$= 0.415 \times 1.172 = 0.486$$

$$GH(s) = \frac{0.486}{sT(1+sT)^2}$$

$$sT\,(1+sT)^2 = sT\,(1+2sT+s^2T^2)$$
$$= 2s^2T^2+sT\,(1+s^2T^2)$$

$$\therefore \quad GH(j\omega) = \frac{0.486}{-2\omega^2T^2+j\omega T\,(1-\omega^2T^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$(1-\omega^2T^2) = 0 \qquad \therefore \quad \omega T = 1$$

$$\therefore \quad GH_x = \left| \frac{0.486}{-2\times 1+j0} \right|$$

$$= \frac{0.486}{2} = 0.243$$

பெருக்க நிறைவெண் $G_m = \dfrac{1}{G_x}$

$$= \frac{1}{0.243}$$

$$= 4.11$$

எனவே பருவ நிறைவெண் $\phi_m = 45^\circ$ எனில் அதற்குத் தகுந்த பெருக்க நிறைவெண் $\boxed{G_m = 4.11}$

மாதிரி வினா 7.17

ஒரு பின்னூட்டு ஆள் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு :

$$s^3+5\,K\,s^2+(2K+3)\,s+10=0$$

நைக்விச்டு விதியின் துணை கொண்டு, K-யின் எந்த மதிப்புக்களுக்கு குலை நிலையுறுதி உடையதாய் இருக்கும் என்று கணிக்க. இரவுத்து விதியைக் கொண்டு இதனைச் சரி பார்க்க.

தீர்வு

சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$s^3+5\,Ks^2+(2K+3)\,s+10=0$$

அதாவது, $s\,(s^2+5K\,s+2K+3)+10=0$

$$,,\quad 1+\frac{10}{s\,(s^2+5Ks+2K+3)}=0$$

இதை $1+GH(s)=0$ என்ற பொது உருவுடன் ஒப்பிட,

$$GH(s)=\frac{10}{s\,(s^2+5\,Ks+2\,K+3)}$$

$$=\frac{10}{5K\,s^2+s\,(2K+3+s^2)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{10}{-5K\omega^2+j\omega\,(2K+3-\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$2K+3-\omega^2=0 \qquad \therefore\ \omega^2=2K+3$$

எனவே $GH_x=\left|\dfrac{10}{-5K\,(2K+3)+j0}\right|$

$$=\frac{2}{K\,(2K+3)}$$

குலையின் நிலையுறுதிக்கு $GH_x<1$

$$\frac{2}{K\,(2K+3)}<1$$

$$2K^2+3K-2>0$$

அதாவது, $(K+2)(2K-1)>0$

எனவே $K>0.5$

இனி, இரவுத்து விதியைக் கொண்டு இதைச் சரி பார்ப்போம்.

சிறப்பியற் சமன்பாடு :

$$s^3+5Ks^2+(2K+3)s+10=0$$

இதில் இருந்து பின் வரும் இரவுத்து அணியை எழுதலாம்.

இரவுத்து அணி :

s^3	1	$2K+3$
s^2	$5K$	10
s^1	$\dfrac{5K(2K+3)-10}{5K}$	
s^0	10	

குவையின் நிலையுறுதிக்கு,

$$5K>0 \quad \therefore \quad K>0$$

$$5K(2K+3)-10 \quad >0$$

$$\therefore \quad 2K^2+3K-2 \quad >0$$

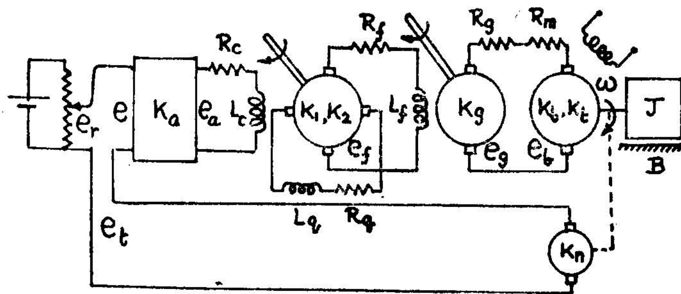
$$(K+2)\ (2K-1) \quad >0$$

எனவே $K>0.5$

நைக்விச்டு முறையிலும் இதே முடிவே வந்தது.

மாதிரி வினா 7.18

ஒரு பின்னூட்டு வேக ஒழுங்கமை பொறியின் படத்தைக் கீழே காண்க.



படம் 7.24 ஒரு நேர்மின் வேக-ஒழுங்கமை குவை

இதில்

$K_a = 12$ ஓல்ட்/வோல்ட்

$R_c = 80$ ஓம்

$L_c = 8$ ஹென்ரி

$R_q = 1.06$ ஓம்

$L_q = 0.318$ ஹென்ரி

$K_1 K_2 = 2862$ (ஓல்ட்/ஆம்பியர்)^2

$R_f = 7.75$ ஓம்

$L_f = 24.4$ ஹென்ரி

$K_g = 18.5$ ஓல்ட்/ஆம்ப்பியர்

$R_a = R_g + R_m = 0.012$ ஓம்

$K_t = 38.2$ நியூட்டன்-மீட்டர் ஆம்ப்பியர்

$K_b = \frac{120}{\pi}$ ஓல்ட்/ரேடியன்/நொடி)

$K_n = \frac{3}{\pi}$ ஓல்ட்/ரேடியன் நொடி)

$J = 6000$ கிலோ கிராம்-மீட்டர்^{2}

$B = 0$

இதன் நிலையுறுதியை ஆய்க.

தீர்வு :

கொடுத்துள்ள குவையின் மாறிய செயற் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$E = E_r - E_t$$

$$E_a = K_a E$$

$$E_a = (R_c + L_c s)\, I_c$$

$$E_q = K_l\, I_c$$

$$E_q = (R_q + L_q s)\, I_q$$

$$E_f = K_2 I_q$$

$$E_f = (R_f + L_f s)\, I_f$$

$$E_g = K_g I_f$$

$$E_g = R_a I_a + E_b$$

$$E_b = K_b \Omega$$

$$T = K_t\, I_a$$

$$T = Js\, \Omega$$

$$E_t = K_n\, \Omega$$

இவற்றில் இருந்து கிடைப்பன :

வழுக் கணிப்பி :

$$E = E_r - K_n\Omega$$

பெருக்கி :

$$\frac{E_a}{E} = K_a$$

ஆம்பிளிடைன் :

$$\frac{E_f}{E_a} = \frac{K_1\ K_2}{(R_c+L_cs)\ (R_q+L_qs)}$$

மின் ஆக்கி :

$$\frac{E_g}{E_f} = \frac{K_g}{(R_f+L_fs)}$$

மின் இயக்கி :

$$E_g = R_a.\frac{1}{K_t}.\ js\Omega + K_b\ \Omega$$

$$= \frac{(R_aJs + K_bK_t)}{K_t}\ .\ \Omega$$

$$\therefore \frac{\Omega}{E_g} = \frac{K_t}{(K_bK_t+R_aJs)}$$

எனவே, குவையின் குறைசுற்று செலுத்துச்சார்பு

$$G = \frac{\Omega}{E} = \frac{K_aK_1K_2K_gK_t}{(R_c+L_cs)(R_q+L_qs)(R_f+L_fs)(K_bK_t+R_aJs)}$$

மேலும்,

$$H = \frac{E_t}{\Omega} = K_n$$

$$\therefore GH(s) = \frac{K_aK_1K_2K_gK_tK_n}{(R_c+L_cs)\ (R_q+L_qs)\ (R_f+L_fs)\ (K_bK_t+R_aJs)}$$

$$= \frac{12\times2862\times18.5\times38.2\times3/\pi}{(80+8s)(1.06+0.318s)(7.75+24.4s)} \times$$

$$\frac{1}{\left(\frac{120}{\pi} \times 38{\cdot}2 + 0.012 \times 0000s\right)}$$

$$= \frac{24.2}{(1+0.1.s)\ (1+0.3s)\ (1+3.15s)\ (1+0\ 05s)}$$

இது ஒரு வகை 'O' குவை. இதன் நைக்விச்டு படம் கீழே வருவிக்கப் படுகிறது.

$\omega \to 0^+$ என்கையில் $GH = 24.2$

$\phi = 0°$

$\omega \to \infty$ என்கையில் $GH = 0$

$\phi = -360°$

x – அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

$(1+0.1s)(1+0.3s)(1+3.15s)(1+0.05s)$

$= (1+0.4s+0.03s^2)(1+3.2s+0.1575s^2)$

$= (1+1.4675s^2+47.25\times10^{-4}s^4) + s(3.6+0.159s^2)$

$$\therefore GH(j\omega) = \frac{24.2}{(1-1.4675\omega^2+0.004725\omega^4) + j\omega(3.6-0.159\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

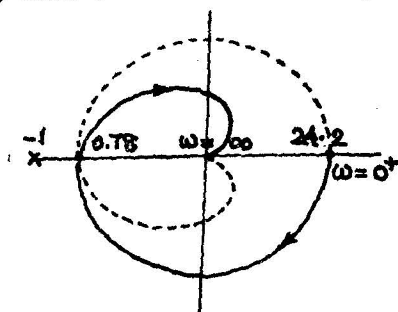
$$(3.6 - 0.159\,\omega^2) = 0$$

எனவே $\omega^2 = \dfrac{3.6}{0.159} = 22.62$

$$GH_x = \left|\frac{24.2}{1-1.4675\times24.2+0.004725\times22.62^2+j0}\right|$$

$\simeq 0.778.$

நைக்விச்டு படம் :



படம் 7.25 நைக்விச்டு படம்

குவையின் நைக்விச்டு படத்தில் இருந்து $N = 0$ எனத் தெரிகிறது. செலுத்துச் சார்பு $GH(s)$ இல் இருந்து $P = 0$.

எனவே, $Z = N+P = 0+0 = 0.$

குவை நிலையுறுதி உடையது. இதன் பெருக்க நிறைவெண்

$$G_m = \frac{1}{GH_x} = 1.285.$$

மாதிரி வினா 7.19

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குவையில், குறை சுற்று அலை விளைவு மூலைப் படத்தின் சாய்வுகள் வருமாறு :

−20	டெசிபல்/பதிமம்	$\omega < 1$
−40	,,	$1 < \omega < 4$
−60	,,	$4 < \omega < \infty$

இக் குவையின் பெருக்க நிறைவெண் 2. இதன் குறை சுற்று ஒருமை அதிர்ச்சி விளைவைக் கணிக்க.

தீர்வு :

அலை வரிசை	மொத்தச் சாய்வு டெசிபல்/பதிமம்	தனிச் சாய்வு டெசிபல் / பதிமம்	உறுப்பு
$0 < \omega < 1$	−20	−20	$\frac{K}{S}$
$1 < \omega < 4$	−40	−20	$\frac{1}{(1+s)}$
$4 < \omega < \infty$	−60	−20	$\frac{1}{(1+\frac{1}{4}s)}$

எனவே, $G(s) = \frac{K}{s(1+s)\,(1+0.25s)}$

$$s(1+s)(1+0.25s) = s(1+ 1.25\,s+0.25s^2)$$
$$= 1.25\,s^2 + s\,\,(1+0.25s^2)$$

$$\therefore\; G(j\omega) = \frac{K}{-1.25\omega^2+j\omega\,(1-0.25\omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழியாக்க,

$$(1-0.25\omega^2) = 0 \qquad \therefore\; \omega^2 = 4$$

$$\therefore\; G_x = \left| \frac{K}{-1.25\times4+j0} \right| = \frac{K}{5}$$

பெருக்க நிறைவெண் $G_m = \frac{1}{G_x} = \frac{K}{5}$

$G_m = 2$ (கொடுக்கப் பட்டுள்ளது) $\therefore K = 2.5$.

$$\therefore \quad G(s) = \frac{2.5}{s(1+s)(1+0.25s)}$$

குறிப்பு ! போடே படத்தில் இருந்து Kயின் மதிப்பை அறிதல் !

கொடுத்துள்ள பெருக்க நிறைவெண் $G_m = 2$

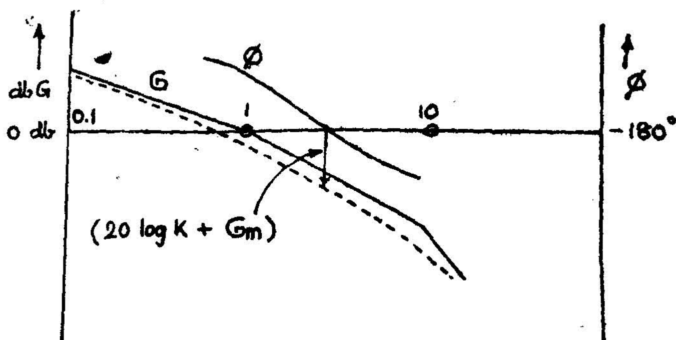
அதாவது $G_m = 20 \log 2$ டெசிபல் $= 6$ டெசிபல். $G(j\omega)$-வின் போடே படம் வரைந்து, அதில் பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில் 0 டெசிபல் கோட்டிற்கும், வீச்சு விகிதப் படத்திற்கும் உள்ள செங்குத்துத் தூரத்தை அளந்தால் கிடைப்பது டெசிபல் பெருக்க நிறைவெண்.

ஆனல், இங்கு போடே படம் வரைய K-யின் மதிப்பு தெரியாது. எனவே ($\omega = 1$, $db\ G = 20 \log K$) என்ற புள்ளியின் வழி முதல் ஈற்றணுகிக் கோடு (low frequency asymptote) வரைய இயலாது.

எனவே, வீச்சு விகிதப் படத்தை முழுதாக $20 \log K$ டெசிபல் கீழ்ப் புறம் நகர்த்தி, முதற் கோடு, ($\omega = 1$, $bd\ G = 0$) என்னும் புள்ளியின் வழிச் செல்லுமாறு வீச்சு விகிதப் படத்தை வரைந்து விடலாம்.

$$\text{மேலும், } G(j\omega) = \frac{K}{j\omega\,(1+j\omega)\,(1+0.25\,j\omega)}$$

$$\therefore \quad \phi = -\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{0.25\,\omega}{1}$$



படம் 7,26 போடே படத்தின் துணையால் N-யின் மதிப்பைக் காணல்

$\omega = 0^{+}$ எனில் $\phi = -90°$

$\omega = 1$ எனில் $\phi = -149°$

$\omega = 2$ எனில் $\phi = -180°$

$\omega = 4$ எனில் $\phi = -211°$

$\omega = \infty$ எனில் $\phi = -270°$

இம் மதிப்புக்களில் இருந்து பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்தை, $-180°$ மெய் அச்சில் பொருந்துமாறு வரையலாம்.

வீச்சு விகிதப் படத்தின் கீழ் முகப் பெயர்ச்சியால், பருவக் கடப்பு அலை வெண்ணில், கிடைக்கும் தூரம் $20 \log K +$ டெசிபல் G_m ஆகும். தூரத்தின் டெசிபல் அளவும், டெசிபல் G_m-உம் தெரியும் ஆதலால் $20 \log K$-ஐக் கணித்து அதில் இருந்து K-யின் மதிப்பை எழுதலாம். இதில் இருந்து கிடைப்பது $K = 2.5$

$$\text{எனவே } G(s) = \frac{2.5}{s(1+s)(1+0.25s)}$$

$$\text{அதாவது } G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+4)} = \frac{C(s)}{E(s)}$$

$$e(t) = \delta(t)$$

$$E(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+4)} E(s)$$

$$\text{எனவே } C(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+4)}$$

$$\equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}, \text{ என்க.}$$

இங்கு

$$A = \left. \frac{10}{(s+1)(s+4)} \right|_{s=0} = 2.5$$

$$B = \left. \frac{10}{s(s+4)} \right|_{(s+1)=0} = -\frac{10}{3} = -3.33$$

$$C = \left. \frac{10}{s(s+1)} \right|_{(s+4)=0} = \frac{10}{12} = 0.833$$

$$C(s) = 2.5 \frac{1}{s} - 3.33 \frac{1}{s+1} + 0.833 \frac{1}{s+4}$$

இதன் எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் காண,

$$C(t) = 2.5 - 3.33\, e^{-t} + 0.833^{-4t}$$

மாதிரி வினா 7.20

ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையின் குறை சுற்று செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \dfrac{K}{s(1+0.1s)(1+s)}$

இதில் (அ) பெருக்க நிறைவெண் $G_m = 20$ டெசிபல் இருக்குமாறு (ஆ) பருவ நிறைவெண் $\phi_m = 60°$ இருக்குமாறு, Kயின் மதிப்புக்களைப் போடே படங்களின் துணைகொண்டு கணிக்க.

தீர்வு :

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+s)}$$

வீச்சு விகிதப்படம் :

மூலை அலைவெண்கள் ω_c : $\dfrac{1}{0.1}$, $\dfrac{1}{1}$ அதாவது ஏறுவரிசையில், 1, 10. K-யின் மதிப்புத் தெரியாது. பொதுவாக முதற்கோடு $\omega = 1$ என்ற அலைவெண்ணில் $20\log_{10}K$ டெசிபல் உயரத்தில் இருக்குமாறு வீச்சு விகிதப் படம் வரையப்படும். இங்கு படத்தை முழுதுமாக $20\log_{10}K$ டெசிபல் கீழ்ப் புறம் நகர்த்தி வரைகிறோம். இதனால் $\omega = 1$ என்ற அலைவெண்ணில் முதற் கோட்டின் உயரம் 0 டெசிபல் (இது $K=1$ என்ற தற்புனைவுக்குச் சமம் ஆகும்).

சாய்வுகளும் அலை வரிசைகளும் :

உறுப்பு	தனிச் சாய்வு டெசிபல்/பதிமம்	மொத்தச் சாய்வு டெசிபல்/பதிமம்	அலை வரிசை ரேடியன்/நொடி
$\frac{K}{s}$	−20	−20	$0 < \omega < 1$
$\frac{1}{1+s}$	−20	−40	$1 < \omega < 10$
$\frac{1}{1+0.1s}$	−20	−60	$10 < \omega < \infty$

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து வீச்சு விகிதப் படம் வரையப் படுகிறது.

பருவப் பெயர்ச்சிப் படம் 1

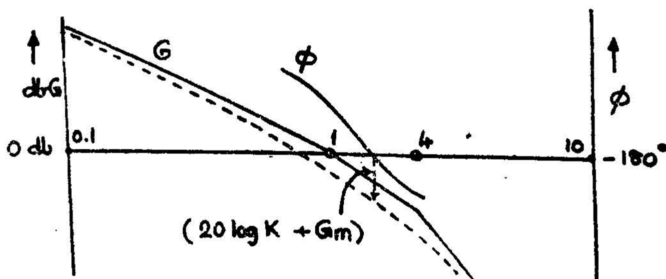
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+0.1j\omega)(1+j\omega)}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega}{0} - \tan^{-1}\frac{0.1\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{1}$$

$$= -90^\circ - \tan^{-1}0.1\omega - \tan^{-1}\omega$$

$\omega = 0^+$ எனில் $\phi = -90^\circ$
$\omega = 0.1$ எனில் $\phi \simeq -96^\circ$
$\omega = 1$ எனில் $\phi \simeq -140^\circ$
$\omega = 2$ எனில் $\phi \simeq -165^\circ$
$\omega = 3$ எனில் $\phi \simeq -178^\circ$
$\omega = \sqrt{10}$ எனில் $\phi \simeq -180^\circ$
$\omega = 10$ எனில் $\phi \simeq -220^\circ$
$\omega = \infty$ எனில் $\phi = -270^\circ$

இவற்றைக் கொண்டு பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்தை, -180° மெய் அச்சில் படியுமாறு வரையலாம்.



படம் 7.27 போடே படத்திலிருந்து K-யின் மதிப்பைக் காணல்

பெருக்க நிறைவெண்ணுக்கு உரிய K காணல் :

போடே படத்தில் பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில் 0 டெசிபல் கோட்டுக்கும், வீச்சு விகிதப் படத்திற்கும் உள்ள மீச் சிறிய தூரம் $= 20\log_{10}+(-G_m)$. இதை அளந்தால் -20 டெசிபல் கிடைக்கிறது. $G_m = 20$ டெசிபல்.

$\therefore -20$ டெசிபல் $= 20\log K - 20$ டெசிபல்

அதாவது $20\log_{10}K = 0$ அல்லது $\boxed{K=1}$

பருவ நிறைவெண்ணுக்கு உரிய K காணல்

பெருக்கக் கடப்பு அலைவெண்ணில், $-180°$ கோட்டில் இருந்து பருவப் பெயர்ச்சிப் படத்தின் மீச் சிறிய தூரம் பருவ நிறை வெண்ணைத் தருகிறது. இது $60°$ இருக்குமாறு உள்ள அலை வெண்ணைக் காண்க. இதுவே பெருக்கக் கடப்பு எண்ணாக இருந்தல் வேண்டும். எனவே இப் புள்ளியில் இருந்து, வீச்சு விகிதப் படத்திற்குள்ள மீச் சிறிய தூரமே $20 \log K$ ஆகும். (இது கீழ்முகப் பெயர்ச்சியின் விளைவு). படத்தில் இத் தூரம்

$20 \log K = -6$ டெசிபல். எனவே $\boxed{K = 0.5}$

எனவே, $G_m = 20$ டெசிபல் எனில் $K = 1$

$\phi_m = 60°$ எனில் $K = 0.5$

இவை தோராய மதிப்புகளே. சரியான மதிப்புகள் $K = 1.1$, $K = 0.575$ என்று மாதிரி 7.15-இல் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன.

பயிற்சி 7

7.1 பின் வரும் சிறப்பியற் சமன்பாடுகளில் இருந்து, குவைகளின் நிலையுறுதியைக் காண்க.

(அ) $s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10 = 0$

(ஆ) $s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 15 = 0$

(இ) $s^7 + 2s^6 + 4s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$

(ஈ) $s^5 + 11s^4 + 90s^3 + 1050s^2 + 1.2 \times 10^4 s + 10^6 = 0$

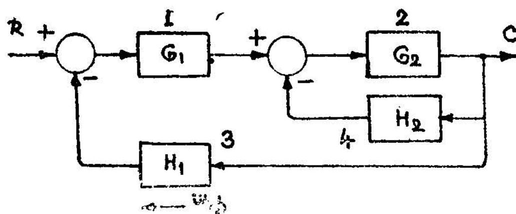
7.2 கீழே உள்ள குவைகளின் சிறப்பியற் சமன்பாடுகளில் இருந்து, அக் குவைகளில் நிலையுறுதிக்கான K-யின் மதிப்புகளைக் கணிக்க. மேலும், அவை தூய அலைவாக்கிகளாக இயங்குகையில் அலைவெண் என்ன என்றும் எழுதுக.

(அ) $s^3 + 4s^2 + 3s + K = 0$

(ஆ) $s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K = 0$

7.3 ஒரு வானூர்தி புரள்வதைத் (roll) தடுக்கும் ஆள்குவையின் பெட்டிப் படம் பின்னர்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குவை நிலையுறுதி உடையதா என்று கண்டு பிடிக்க.

$$G_1 = 1000 \quad G_2 = \frac{1.72}{s(1+0.329s)(1+0.025s)}$$

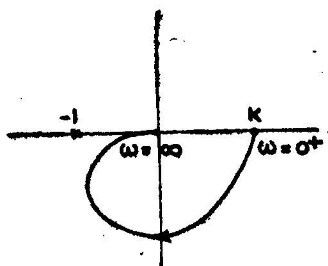


படம் 7.28 வானூர்தி புரள்வதைத் தடுக்கும் ஆள்குவை

1. முன் பெருக்கி, 2. வானூர்தி, 3. மாற்றி, 4. வேக ஜைரோ.

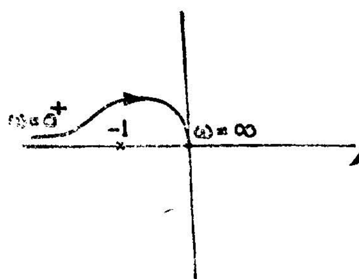
7.4 இரு கோண தூரப் படங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. (படங்கள் 7.29, 7.30). இவை குறிக்கும் இரு வெகு எளிய செலுத்துச் சார்புகளை எழுதுக. குவைகளின் நிலையுறுதியை ஆய்க.

(அ)



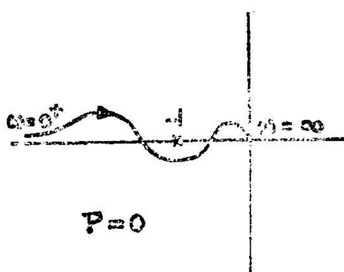
படம் 7.29
(சுழிவகைக் குவை)

(ஆ)

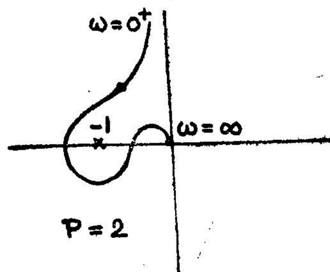


படம் 7.30
(இரண்டாம் வகைக் குவை)

7.5 கொடுக்கப் பட்டுள்ள கோணதூரப் படங்களில் இருந்து நைக்விச்டு படம் வரைந்து நிலையுறுதியை ஆய்க.

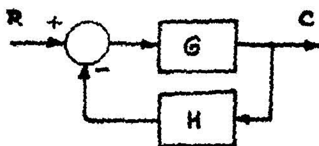


படம் 7.31
வகை 2

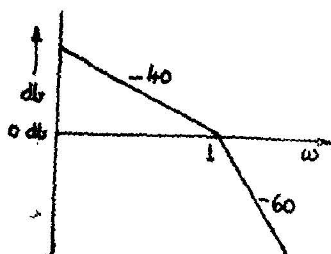


படம் 7.32
வகை 3

7.6 ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குலையும், அதன் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பின் முழுப் படமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 7.33 (அ)



படம் 7.34 (ஆ)

(அ) $H = 1$, எனில் நிலையுறுதியை ஆய்க.

(ஆ) $H = 1+4s$, எனில் நிலையுறுதி இருக்குமா ?

7.7 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையின் குறைசுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s^2+2s+2)}$.

இதன் நிலையுறுதியை நைக்விச்டு விதியின் துணையால் ஆய்க. இரவுத் முறையில் சரிபார்க்க.

7.8 கொடுக்கப்பட்டுள்ள குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்புகளில் இருந்து, அலை விளைவுப் படங்களை வரைந்து, பருவ நிறை வெண், பெருக்க நிறைவெண் இவைகளைக் கணிக்க !

(அ) $G(s) = \dfrac{3}{s(s+1)(s+2)}$

(ஆ) $G(s) = \dfrac{8}{s(s+1)(s+4)}$

7.9 பின்வரும் சுற்றுச் செலுத்துச் சார்புகளை உடைய குலைகளின் நிலையுறுதியை, நைக்விச்டு படங்களை வரைந்து ஆய்க !

(அ) $G(s)\,H(s) = \dfrac{-2}{(s-1)(4s+1)}$

(ஆ) $G(s)\,H(s) = \dfrac{1-s}{s+2}$

7.10 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவையின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு வருமாறு:

$$G(s) = \frac{K}{(1+s)^3}$$

(அ) நிலையுறுதி அற்றுப் போகாமல் K-யின் மீப் பெரிய மதிப்பைக் காண்க.

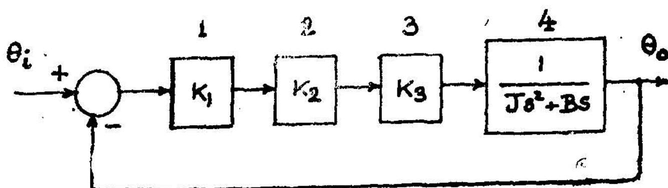
(ஆ) $K = 4$ எனில், குவையின் பெருக்க நிறைவெண், பருவ நிறைவெண் ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணிக்க.

8. மூலப் பாதை
(Root Locus)

8.1 மூலப்பாதை வரைதல்

8.1.1 மூலப்பாதை அறிமுகம்

ஓர் அலை வாங்கியின் திருப்பக் கட்டுப்பாட்டுக்கு உரிய ஆள் குலையின் பெட்டிப் படத்தைக் கீழே காண்க.



படம் 8.1 அலைவாங்கி ஆள்குலையின் பெட்டிப்படம்

1. மின் பிரித்தி; 2. மின் பெருக்கி; 3. மின் இயக்கி; 4. மின் அலைவாங்கி

இதில் $K_1=1$, $K_2=K$, $K_3=1$, $J=1$, $B=4$ என்க.

எனவே, $G(s) = \dfrac{K_1K_2K_3}{s(Js+B)}$

அதாவது $G(s) = \dfrac{K}{s(s+4)}$

இக் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு $1+G(s)=0$

அதாவது $s^2+4s+K=0$

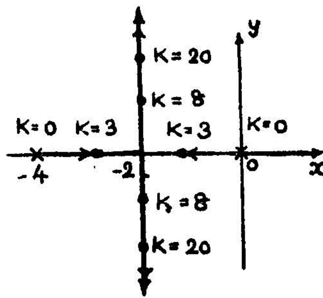
இதன் மூலங்கள் $s = -2\pm\sqrt{4-K}$

s-தளத்தில் இம் மூலங்களின் இருப்பிடங்கள் Kயின் மதிப்பைப் பொறுத்து மாறுகின்றன. இதை அட்டவணை 8.1, படம் 8.2 ஆகியவை விளக்குகின்றன.

அட்டவணை 8.1

K	0	1	2	3
s	-2 ± 2	$-2\pm\sqrt{3}$	$-2\pm\sqrt{2}$	-2 ± 1

K	4	8	20	∞
s	-2 ± 0	$-2\pm j2$	$-2\pm j4$	$-2\pm j\infty$



படம் 8.2 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+4)}$ இன் 'மூலப்பாதை'

> $K = 0$ முதல் ∞ வரை மாறும்பொழுது, அதற்கு ஏற்ப, சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் நகரும் பாதையே 'மூலப் பாதை' (root locus) ஆகும்.

படம் 8.2, $G(s) = \dfrac{K}{s(s+4)}$ என்பதன் மூலப்பாதையைக் காட்டுகிறது. இதில் இருந்து தெரிய வரும் செய்திகள்:

(1) K-இன் எந்த மதிப்பிற்கும் மூலங்கள் s-தளத்தின் வலப் பாதிக்கு வரவில்லை. குவையின் முழு நிலையுறுதியை இதில் இருந்து அறியலாம். மூலப்பாதை s-தளத்தின் வலப் பாதிக்குத் திரும்பினுல் குவை நிலையுறுதி அற்றது என்பது தெளிவு.

(2) $K = 20$ எனில், மூலப் பாதையின் படத்தில் இருந்து, அதற்கு உரிய சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் $s = -2\pm j4$ என அறிகிறோம். இது போல், K-இன் எந்த மதிப்பிற்கும், சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களின் மதிப்பை அறிய மூலப் பாதை உதவுகிறது.

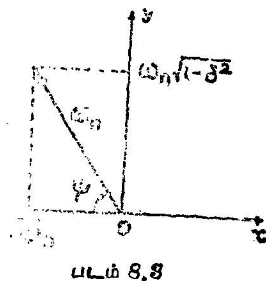
(3) $K = 20$ எனில், $s = -2 \pm j4$ என அறிந்தோம். பொதுவாக இருபடிக் குவைகளில் $s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$

படம் 8.3-லிருந்து,

$$\cos\phi = \frac{\delta\omega_n}{\omega_n}$$

எனவே $\delta = \cos^{-1}\phi$

எனவே, குறிப்பிட்ட δ அல்லது M_p-க்கு உரிய K-யின் மதிப்பை மூலப் பாதையில் இருந்து கணிக்கலாம்.



படம் 8.3

சான்றாக, $M_p = 1.3$ என்க. $M_p = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

எனவே, $\delta = 0.5$. $\cos\phi = \delta = 0.5$. $\therefore \phi = 60°$. ஆயப் புள்ளியில் இருந்து இடது மெய் அச்சை அடியாகக் கொண்டு, 60°-இல் ஒரு நேர்கோடு வரைந்தால் அது மூலப் பாதையை வெட்டும் புள்ளி, K-யின் மதிப்பைக் காட்டும்.

மூலப் பாதை என்றால் என்ன ? அதன் பயன்கள் யாவை ? என்பனவற்றைப் பற்றிச் சுருக்கமாக அறிந்தோம். மூலப் பாதையை விரைவில் வரையும் முறை, அதில் இருந்து நிலையுறுதியை அறிதல், உருவியல் கெழுக்களின் மாறுதல்களுக்கு ஏற்ப ஆள்குவையில் தோன்றும் விளைவுகள் பற்றி அறிதல், பெரிய சமன்பாடுகளின் மூலங்களை அறிதல், செயற் குறிப்புகளுக்கு ஏற்ப ஆள்குவைகளை அமைத்தல் ஆகியவற்றை விவரமாக அடுத்து வரும் பகுதிகளிற் காணலாம்.

8.1.2 மூலப் பாதை வரையறையும் விதிகளும்

மூலப் பாதையின் வரையறை :

நிலைப் பெருக்கவெண் K, 0 முதல் ∞ மாறுகையில், அதற்கு ஏற்பச் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் s-தளத்தில் நகரும் பாதையே ‘மூலப் பாதை’ (root locus) எனப்படும்.

விதிகள் :

சிறப்பியற் சமன்பாடு $1 + GH = 0$ எனில், s-தளத்தில் மூலத்தைக் குறிக்கும் எந்தப் புள்ளியிலும் $1 + GH = 0$ என்ற சமன்பாடு பொருந்த வேண்டும்.

அதாவது $GH = -1$

எனவே $|GH| = 1$

$\angle GH = 180° \pm k\,360° \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

ஆகவே, s–தளத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி, மூலப் பாதையில் இருக்க வேண்டும் என்றால், அது பின் வரும் விதிகளுக்குக் கட்டுப் பட வேண்டும்.

வீச்சு விதி (magnitude criterion)	$\|GH\| = 1$
கோண விதி (Angle criterion)	$\angle GH = 180° \pm k\,360°$

சான்றாக, அலைவாங்கித் திருப்ப ஆள்குவையில்

$$GH = \frac{K}{s(s+4)}$$

s_0 என்பது மூலப் பாதையில் ஒரு புள்ளி என்க.

எனவே, $1 + \dfrac{K}{s_0(s_0+4)} = 0$

வீச்சு விதி : $\dfrac{K}{|s_0||s_0+4|} = 1$

கோணவிதி : $-\angle s_0 - \angle s_0+4 = 180° \pm k360°$

பிழை திருத்தல் முறையில் (trial and error method) கோண விதி பொருந்துமாறு s_0 என்ற புள்ளியைக் காண்போம்.

பிறகு $\dfrac{K}{|s_0||s_0+4|} = 1$ என்னும் வீச்சு விதி பொருந்துமாறு, K-இன் மதிப்பைக் காண்போம், $[K = |s_0||s_0+4|]$

இவ்வாறு, s_0 போன்ற பல மூலப் பாதைப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து, மூலப் பாதையை வரையலாம். பிறகு ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் நேர் அதற்கு உரிய K-யின் மதிப்பைக் குறித்துவிட, மூலப் பாதைப் படம் முழுமை அடைகிறது.

பொருத்தமான சோதனைப் புள்ளிகள் (trial points) தெரிந்தால் அன்றி இவ்வழி நடைமுறைக்கு ஒவ்வாதது ஆகும். மூலப் பாதையின் தோராயப் படம் ஒன்று, பொருத்தமான சோதனைப் புள்ளிகளைக் காணப் பெரிதும் உதவுகிறது. இத்தகைய படத்தை வரையச் சில சுருக்க வழி விதிகள் உண்டு. இவ்விதிகளை அடுத்த பகுதியில் விரிவாகப் படிக்கலாம்.

ஒரு முக்கியக் குறிப்பு :

மூலப்பாதை வரைவது சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களின் இருப்பிடங்களை அறியவே. பகுதி 8.1.1—இல் உள்ள எடுத்துக் காட்டில் மூலங்களின் மதிப்புகள் கணிக்கப்பட்டு, மூலப்பாதை வரையப்பட்டது. இது விளக்கத்திற்காக உண்மையில், நடைமுறையில் உள்ள பெரிய ஆள்குவைகளின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களை இவ்வளவு எளிதிற் காண இயலாது.

கொடுக்கப்பட்ட ஆள்குவையின் சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பில் இருந்து, நிறைச்சுற்று சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களை அறிய உதவுவது மூலப்பாதை. அதன் வரைமுறையே இங்கு விளக்கப் படுகிறது.

8.1.3 தோராய மூலப்பாதை வரைய உதவும் விதிகள்

விரைவாகவும், எளிதாகவும் மூலப் பாதையின் தோராய வடிவை வரைவது பின்வரும் விதிகளால் முடிகிறது:

குறிப்பு GH : சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு

n_p : GH-இன் வரம்புடைப் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை

n_z : GH-இன் வரம்புடைச் சுழியெண்களின் எண்ணிக்கை

$n_p > n_z$, பொதுவாக.

(1) தொடக்கமும் முடிவும்

மூலப் பாதையின் மொத்தக் கிளைகள் n_p. இவை GH இன் பேரெண்களில் தொடங்கும் ; GH-இன் சுழியெண்களில் முடியும். அதாவது, n_z கிளைகள் வரம்புடைச் சுழியெண்களிலும், $n_p - n_z$ கிளைகள் வரம்பிலியிலும் முடியும்.

கிளைகள் மெய்யச்சுக்குச் சமச்சீராக இருக்கும்.

(2) மெய்யச்சுக் கிளைகள்

மெய் அச்சில் எப் பகுதிகளுக்கு வலப்புறம் பேரெண்களின் எண்ணிக்கை, சுழியெண்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றின் கூடுதல் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருக்கிறதோ அப் பகுதிகளில் மூலப்பாதைக் கிளைகள் இருக்கும்.

(3) ஈற்றணுகிகள் (asymptotes)

$K \to \infty$ எனில் $(n_p - n_z)$ கிளைகள்

$$C = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z}$$ என்ற மெய் அச்சுப் புள்ளியின் வழி

$$\phi = \pm \frac{180° + k360°}{n_p - n_z}$$ என்ற கோணங்களில் செல்லும்

ஈற்றணுகிகளை ஒட்டி, வரம்பிலிக்குச் செல்லும்.

(4) வெளிச் செல் கோணம் உள் வரு கோணம் (Angles of departure and arrival)

$s = -\beta$ என்ற பேரெண்ணில் இருந்து மூலப்பாதை வெளிச் செல் கோணம்.

$$\theta_d = 180° + \underline{|(s+\beta)\, GH(s)}\Big|_{s=-\beta}$$

$s = -\alpha$ என்ற சுழியெண்ணில் மூலப்பாதை உள் வரு கோணம்.

$$\theta_a = 180° - \underline{|(s+\alpha)^{-1}\, GH(s)}\Big|_{s=-\alpha}$$

குறிப்பு 1 பன்மைப் பேரெண்களில் வெளிச் செல் கோணமும் பன்மைச் சுழியெண்களில் உள் வரு கோணமும்

$s = -\beta$ என்ற m அடுக்குப் பேரெண்ணில் வெளிச் செல் கோணம் 1

$$\theta_d = \frac{1}{m}\left[180° + \underline{|(s+\beta)^m GH(s)}\Big|_{s=-\beta} + k360°\right]$$

இங்கும் $k = 0$ முதல் $\pm \frac{m}{2}$ அல்லது $\pm \frac{m-1}{2}$ வரை உள்ள முழு எண்கள்.

$s = -\alpha$ என்ற m அடுக்குச் சுழியெண்ணில் உள் வரு கோணம் :

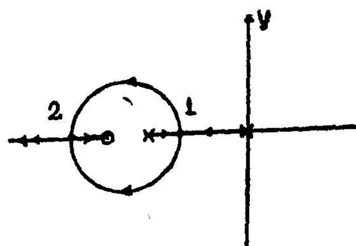
$$\theta_a = \frac{1}{m}\left[180° - \left. \underline{/(s+\alpha)^{-m}GH(s)} \right|_{s=-\alpha} + k\,360°\right]$$

இங்கும் $k = 0$ முதல் $\pm \frac{m}{2}$ அல்லது $\pm \frac{m-1}{2}$ வரை உள்ள முழு எண்கள்.

(5) மெய் அச்சில் பிரியும் (அல்லது கூடும்) புள்ளி (Breakaway and Break-in points)

மூலப் பாதையின் கிளைகள் மெய் அச்சில் பிரியும் (அல்லது கூடும்) புள்ளிகள்

$$\frac{d}{ds}\left[1+GH(s)\right] = 0$$ என்ற சமன் பாட்டில் தரப்படுகின்றன.

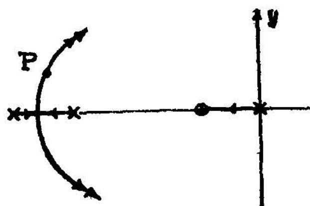


படம் 8.4 பிரியும் புள்ளிகள்

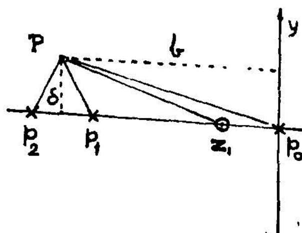
1. மெய் அச்சில் பிரியும் புள்ளி, 2. மெய் அச்சில் கூடும் புள்ளி

மற்றொரு முறை : (அ) சிக்கல் பேரெண்களோ, சுழியெண்களோ (complex poles or zeros) இல்லை என்க. அப்பொழுது எல்லா மாறுநிலைப் புள்ளிகளும் (critical points) மெய் அச்சில் படியும்.

அடுத்தடுத்து இரண்டு பேரெண்களோ, சுழியெண்களோ உள்ள மூலப் பாதைக் கிளைகளில் 'பிரியும் புள்ளிகள்' அமையும்.



படம் 8.5 மூலப் பாதையில்
சோதனைப் புள்ளி
O சுழியெண், X பேரெண்



படம் 8.6

மூலப் பாதையில் மெய் அச்சுக்கு வெகு அருகில் P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. அங்கு $s = -b + j\delta$ என்க.

படம் 8.6 இல் இருந்து கிடைக்கும் பின்வரும் சமன்பாட்டில் இருந்து 'b'-யின் மதிப்பை அறியலாம்.

$$-\frac{\delta}{p_2 - b} - \left(180^\circ - \frac{\delta}{b - p_1}\right) + \left(180^\circ - \frac{\delta}{b - z_1}\right)$$

$$-\left(180^\circ - \frac{\delta}{b - p_0}\right) = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \Sigma \frac{1}{z_1 - b} - \Sigma \frac{1}{p_1 - b} = 0$$

(ஆ) சிக்கல் பேரெண்கள், சுழியெண்கள் இருப்பின், ஒவ்வொரு சிக்கல் பேரெண் இரட்டைக்கும் ($p = \sigma_p \pm j\omega_p$)

$\dfrac{\sigma_p - b}{(\sigma_p - b)^2 + \omega_p^2}$ என்ற உறுப்பைக் கழித்துக் கொள்க.

ஒவ்வொரு சிக்கல் சுழியெண் இரட்டைக்கும் ($z = \sigma_z \pm j\omega_z$)

$\dfrac{\sigma_z - b}{(\sigma_z - b)^2 + \omega_z^2}$ என்ற உறுப்பைக் கூட்டிக் கொள்க.

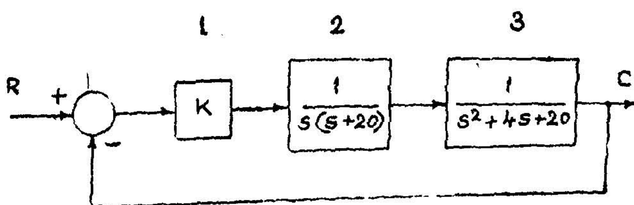
(6) கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள்

சிறப்பியற் சமன்பாட்டில் இருந்து இரவுத்து அணியை எழுதி s^1 வரிசையைச் சுழியாக்கக் கிடைக்கும் K-யின் மதிப்போடு, s^2 வரிசைச் சமன்பாட்டை எழுதித் தீர்க்க. கிடைக்கும் s-இன் மதிப்புகள் கற்பனை அச்சை மூலப் பாதைகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

மேலே கண்ட விதிகளை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்பதை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் இங்கு விளக்குவோம்.

மாதிரி வினு 8.1

ஒரு வான ஊர்தியின் இயக்கக் கட்டுப்பாட்டுக் குலையின் பெட்டிப் படம் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் மூலப் பாதையைத் தோராயமாக வரைக.



படம் 8.7 வான ஊர்தி இயக்க ஆள்குலை

1. பெருக்கி; 2. இயக்கி; 3. வான ஊர்தி

தீர்வு :

$$GH = \frac{K}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$$

1. தொடக்கமும் முடிவும் :

பேரெண்கள் p : $0, -20, -2 \pm j4$ எனவே $n_p = 4$

சுழியெண்கள் z : ஒன்றும் இல்லை. எனவே $n_z = 0$

$\therefore$ மூலப் பாதையின் கிளைகள் 4.

அவை $0, -20, -2 \pm j4$ என்ற 4 புள்ளிகளில் தொடங்குகின்றன ; வரம்பிலியில் முடிகின்றன.

கிளைகள் மெய் அச்சிற்குச் சமச்சீராக உள்ளன.

2. மெய் அச்சுக் கிளைகள் : மெய் அச்சில் $0, -20$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியில் மூலப் பாதைக் கிளை ஒன்று இருக்கும்.

3. ஈற்றணுகிகள் :

$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(0-20-2+j4-2-j4)-(0)}{4-0} = -6$$

$$\phi = \pm \frac{180+k360^\circ}{n_p-n_z}$$

$$= \pm\frac{180}{4}, \pm \frac{540}{4}, \pm\frac{900}{4}$$

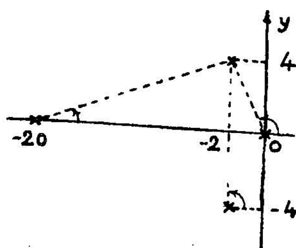
$$= \pm 45, \pm 135, \pm 225$$

→ [$\pm 225, \pm 135$ இவை ஒரே கோணத்தைத் தருகின்றன]

எனவே, $K\to\infty$ எனில் மூலப்பாதையின் 4 கிளைகளும் மெய் அச்சில் $c\ (-6, 0)$ என்ற புள்ளியில் தொடங்கி $\pm 45^\circ$, $\pm 135^\circ$ என்ற கோணங்களில் பிரியும் ஈற்றணுகிகளை ஒட்டி வரம்பிலிக்குச் செல்லும்.

4. வெளிச் செல் கோணம் :

$s=-2+j\,4$ என்ற பேரெண்ணில் இருந்து மூலப்பாதைக் கிளை வெளிச் செல் கோணம்:



படம் 8.8

$$\theta_d = 180+\phi$$

$$\phi = \left|(s+2-j4)GH(s)\right|_{s=-2+j4}$$

$$= \left|\frac{K}{s\ (s+4)\ (s+2+j4)}\right|_{s=-2+j4}$$

$$= 0 - \left[\left(90+\tan^{-1}\frac{2}{4}\right)+90+\tan^{-1}\frac{4}{18}\right]$$

$$= -219^\circ$$

$$\theta_d = 180^\circ-219^\circ = -39^\circ$$

சமச் சீர்மையால் $s=-2-j4$ என்ற பேரெண்ணில்

$$\theta_d = +39^\circ$$

5. மெய் அச்சில் பிரியும் புள்ளி :

$$1+GH=0, \ 1+\frac{K}{s\,(s+20)\,(s^2+4s+20)}=0$$

∴ சிறப்பியற் சமன்பாடு,

$$s^4+24s^3+100\,s^2+400\,s+K=0$$

$$\frac{d}{ds}\,[s^4+24\,s^3+100\,s^2+400\,s+K]=0$$

அதாவது $4\,s^3+72\,s^2+200\,s+400=0$

,, $s^3+18\,s^2+50\,s+100=0$

,, $s^2\,(s+18)+100\,(0.5\,s+1)=0$

இதைப் பிழை திருத்தல் முறையில் தீர்ப்போம்.

$s=-15$ எனில் இடப் புறம் $=675-650=25$

$s=-15.1$,, ,, $=661-655=6$

$s=-15.14$,, ,, $=656-656=0$

எனவே $s=-15.14$ ஒரு மூலம் ஆகும்.

-15.14	1	18	50	100
		-15.14	-43.3	-101
	1	2.86	6.7	$\simeq 0$

எனவே, $(s+15.14)\,(s^2+2.86\,s+6.7)=0$

$s=-15.14$ தவிர மற்ற இரண்டும் சிக்கல் எண்கள்.

எனவே, மூலப்பாதை மெய் அச்சில் பிரியும் புள்ளி $b=(-15.40,)$.

6. கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் :

சிறப்பியற் சமன்பாடு : $s^4+24\,s^3+100\,s^2+400\,s+K=0$

இரவுத்து அணி :	s^4	1	100	K	
	s^3	~~24~~	~~400~~		$\div$ 24
		1	16,67		

$$\begin{array}{ll} s^2 & 83.33 \quad K \\ s^1 & \dfrac{83.33\times16.67-K}{83.33} \\ s^0 & K \end{array}$$

s^1 வரிசையைச் சுழியாக்க, $83.33\times16.67-K=0$

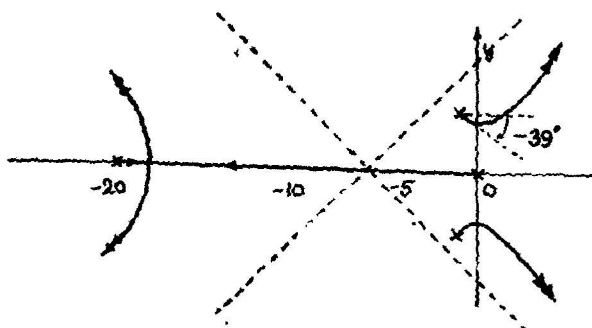
$$\therefore \quad K=83.33\times16.67$$

துணைச் சமன்பாடு : $83.33s^2+83.33\times16.67=0$

$$s^2+16.67=0 \qquad \therefore \quad s=\pm j\,4.08$$

எனவே, மூலப் பாதைக் கிளைகள் கற்பனை அச்சை $s=\pm j4.08$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

மேற்கண்ட குறிப்புகளின் துணையால் வரையப்பட்ட தோராய மூலப்பாதை:



படம் 8.9 மூலப்பாதை $GH = \dfrac{K}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$

8.1.4 வரைமுறை விதிகளை வருவித்தல் (Derivati on of the rules for rapid construction of the root locus)

1. தொடக்கமும், முடிவும் :

$GH = K\,GH_1$ என்க.

மூலப் பாதையில் எந்தப் புள்ளியிலும் $GH=-1$, அல்லது $KGH_1=-1$.

$K\to0$ எனில், $KGH_1=-1$ ஆக இருக்க, $GH_1\to\infty$.

[GHஐ வரம்பிலிக்குச் செலுத்துவன அதன் பேரெண்களே (Poles)]

அதாவது $s \rightarrow$ (பேரெண்கள்). எனவே மூலப்பாதையின் கிளைகள் GH இன் பேரெண்களில் தொடங்குகின்றன.

$K \rightarrow \infty$ எனில், $KGH_1 = -1$ ஆக, இருக்க, $GH_1 \rightarrow 0$.

[GH ஐ சுழியாக்குவன அதன் சுழியெண்களே (zeros)]

அதாவது $s \rightarrow$ (சுழியெண்கள்). எனவே மூலப்பாதையின் கிளைகள் சுழியெண்களில் முடிகின்றன.

உருவியற் குவைச் சமன்பாடுகளில் (equations of physical systems) சிக்கல் மூலங்கள் பிரியா இணைகளாகவே வருகின்றன. எனவே மூலப் பாதை மெய் அச்சுக்குச் சமச் சீராக இருக்கிறது.

2. மெய் அச்சுக் கிளைகள் :

மெய் அச்சில் ஒரு சோதனைப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால்—

(அ) அதற்கு சிக்கற் பேரெண்கள், சுழியெண்கள் இவற்றிடம் இருந்து வரையப் படும் திசைக் கோடுகளின் மொத்தக் கோணம், சமச் சீர்மையால், சுழியாகும்.

(ஆ) அதற்கு இடது புறம் மெய் அச்சில் உள்ள எந்த பேரெண், சுழியெண்ணின் கோணமும், '+' திசையில் படிவதால் சுழியாகும்.

(இ) அதற்கு வலது புறம் மெய் அச்சில் உள்ள எந்த பேரெண், சுழி யெண்ணின் கோணமும், '—' திசையில் படிவதால் 180° ஆகும்.

எனவே மெய் அச்சில் சோதனைப் புள்ளிக்கு வலப்புறம் உள்ள பேரெண்கள், சுழியெண்கள் ஆகியவற்றின் மொத்த எண்ணிக்கை ஒற்றைப் படை எண்ணானால் மொத்தக் கோணம் 180°-இன் ஒற்றைப் படைப் பெருக்காக இருக்கும். $\theta = 180° \pm K\ 360°$ என்ற கோண விதி பொருந்துவதால், சோதனைப் புள்ளி மூலப் பாதையில் அமையும். சோதனைப் புள்ளிக்கு இரு புறமும் உள்ள மாறுநிலைப் புள்ளிகள் வரை மூலப் பாதையின் கிளை நீண்டு இருக்கும்.

3. ஈற்றணுகிகள் :

(அ) கோணம் : ஆயப் புள்ளிக்கு வெகு தொலைவில் மூலப் பாதையில் P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. மாறுநிலைப்

புள்ளிகளில் இருந்து Pக்கு வரையப்படும் திசைக்கோடுகள் யாவும், தொலைத் தூரத்தால் ஆயத்திற்கு அருகில் உள்ள ஒரே புள்ளியில் இருந்து வருவன போல் தோன்றும். எனவே மாறுநிலைப் புள்ளிகளின் கோணங்களும் சமமாகத் தெரியும். எனவே, கோண விதியை பொருத்த,

$$(n_z - n_p)\,\phi = \mp\,(180^\circ + k\,360^\circ)$$

$$\therefore \quad \boxed{\phi = \pm\,\frac{180 + K\,360^\circ}{n_p - n_z}} \qquad (\because n_p > n_z)$$

(ஆ) மையப் புள்ளி : சமச் சீர்மையால், ஈற்றணுகிகள் தோன்றும் இடம் மெய் அச்சில் இருக்கும். இதன் இருப்பிடத்தைக் $(s = -c)$ காண, $n_p - n_z$ பேரெண்களை, $s = -c$ என்ற புள்ளியில் உடைய ஒரு கற்பனைக் குவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இனி, உண்மைக் குவையின் ஈற்றணுகிகளும், கற்பனைக் குவையின் ஈற்றணுகிகளும் c யின் எந்த மதிப்பிற்கு ஒன்றாக இருக்கும் என்று காண்போம்.

இதற்கு இரு குவைகளின் GH விரிவுகளையும் எழுதி அவற்றின் உருவமைப்பு ஒன்றாக வரும் அளவு s-இன் சிறிய அடுக்குகளை விட்டு விட்டு எழுதுவோம்.

கற்பனைக் குவை :

$$GH = \frac{1}{(s+c)^{n_p - n_z}}$$

$$= \frac{1}{s^{n_p - n_z} + cs^{n_p - n_z - 1} + \ldots\ldots} \qquad \ldots (1)$$

உண்மைக் குவை:

$$GH = \frac{(s+z_1)\ldots}{(s+p_1)\ldots}$$

$$= \frac{s^{n_z} + \Sigma\, z_1\, s^{n_z - 1} + \ldots\ldots}{s^{n_p} + \Sigma\, P_1\, s^{n_p - 1} + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{1}{s^{n_p - n_z} + (\Sigma P_1 - \Sigma z_1)\, s^{n_p - n_z - 1} + \ldots} \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றை ஒப்பிட,

$$c = \frac{\Sigma P_1 - \Sigma z_1}{n_p - n_z}$$

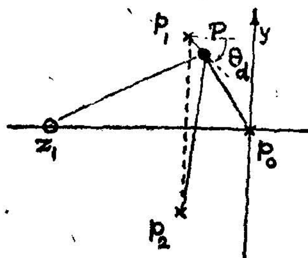
இதுவே சுற்றணுக்களின் மெய்யச்சு மையப்புள்ளி (centroid) ஆகும்.

4. வெளிச் செல் கோணம், உள்வரு கோணம் :

(அ) வெளிச் செல் கோணம் : $s = -\beta$ என்ற சிக்கற் பேரெண்ணிற்கு வெகு அருகில் மூலப் பாதையில் அமையும் P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. மற்ற மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் இருந்து வரும் திசைக் கோடுகள் $-\beta$-வில் தாங்கும் கோணமும் P-இல் தாங்கும் கோணமும் ஏறத்தாழச் சமம் ஆகும். எனவே, புள்ளி P-இல் கோண விதியைப் பொருத்த,

$$-\theta_d + \underline{|(s+\beta)\ GH(s)|}_{\ s=-\beta} = \pm 180° + K\ 360°$$

$$\therefore \quad \theta_d = \pm 180° + \underline{|(s+\beta)\ GH(s)|}_{\ s=-\beta}$$



படம் 8.10 வெளிச் செங்கோணம்

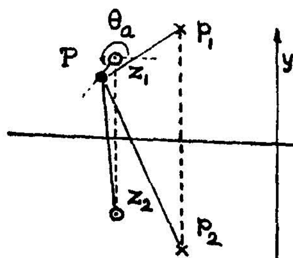
(ஆ) உள்வரு கோணம் : $s = -\alpha$ என்ற சிக்கற் சுழியெண்ணிற்கு மிக அருகில் மூலப் பாதையில் P என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க.

மற்ற மாறுநிலைப் புள்ளிகளில் இருந்துவரும் திசைக் கோடுகள் $-\alpha$-வில் தாங்கும் கோணமும், P-யில் தாங்கும் கோணமும் ஏறத்

தாழச் சமம் ஆகும். எனவே P என்னும் புள்ளியில் கோண விதியைப் பொருத்த,

$$\theta_a + \left| (s+\alpha)^{-1} \, GH(s) \right|_{s=-\alpha} = \pm 180^\circ + K\,360^\circ \text{*}$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta_a = \pm 180^\circ - \left| (s+\alpha)^{-1} \, GH(s) \right|_{s=-\alpha}}$$



படம் 8.11 உள் வருகோணம்

* குறிப்பு : இங்கு $k=0$; வேறு மதிப்புக்கள் θ_a, θ_d இவற்றை மாற்றுவது இல்லை.

$s=-\beta$ என்ற புள்ளியில் m பேரெண்கள் இருப்பின்,

$$m\,\theta_d = \pm 180^\circ + K\,360^\circ + \left| (s+\beta)^{m} \, GH(s) \right|_{s=-\beta}$$

$$\therefore \quad \theta_d = \frac{1}{m}\left[\pm 180^\circ + K 360^\circ + \left| (s+\beta)^{m} \, GH(s) \right|_{s=-\beta} \right]$$

$s=-\alpha$ என்ற புள்ளியில் m சுழியெண்கள் இருப்பின்,

$$m\theta_a = \pm 180^\circ + K\,360^\circ - \left| (s+\alpha)^{-m} \, GH(s) \right|_{s=-\alpha}]$$

$$\therefore \quad \theta_a = \frac{1}{m}\left[\pm 180^\circ + K\,360^\circ - \left| (s+\alpha)^{-m} \, GH(s) \right|_{s=-\alpha} \right]$$

.5. பிரிந்து செல்லும், கூட வரும் புள்ளிகள் :

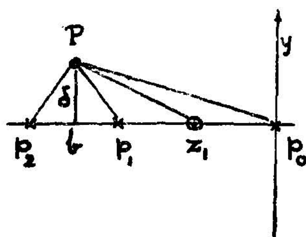
மெய் அச்சில் அடுத்தடுத்த இரு பேரெண்களுக்கு இடையே பிரிந்து செல் புள்ளிகள் அமையும்.

சிறப்பியற் சமன்பாடு s'இன் ஒரு தொடர் சார்பு ஆகும். (continuous function). எனவே அதன் மூலப் பாதையிலும், அதன் சாய்விலும் கூடத் தொடர்ச்சி இருக்கும்.

b என்னும் புள்ளியில் மூலப் பாதையின் கிளைகள் பிரிந்தால், அந்த, சாய்வில் தொடர்ச்சி இருக்க, அச் சாய்வு சுழி ஆகவேண்டும். எனவே, $\frac{d}{ds}\,[1+GH(s)]=0$ என்ற சமன்பாடு b-ன் மதிப்பைத் தருகிறது.

குறிப்பு: b-க்கு இரு மதிப்புக்கள் கிடைத்தால் ஒன்று K-க்கும் மற்றொன்று $-K$-க்கும் பொருந்தும்.

இரண்டாவது முறையை வருவிக்க, பிரிந்து செல்லும் (அல்லது கூடும்) புள்ளிக்கு மிக அருகில் மூலப் பாதையில் P என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. அங்கு $s=b+j\,\delta$ என இருக்கட்டும்.



படம் 8-12 பிரிவுப்புள்ளியைக் கணித்தல்

$$\theta_{z_1}-(\theta_{p_0}+\theta_{p_1}+\theta_{p_2})=180^\circ$$

[எல்லை $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$ எனவே θ சிறிதாக இருப்பின்

$\tan\theta\simeq\theta$]

$$\therefore\ \left(180-\frac{\delta}{b-z_1}\right)-\left[\left(180-\frac{\delta}{b-p_0}\right)+\left(180-\frac{\delta}{b-p_1}\right)+\left(\frac{\delta}{p_2-b}\right)\right]=180^\circ$$

குறிப்பு :

1. 180°-இன் ஒற்றைப் படைப் பெருக்க எண்களே இடது புறத்தில் வரும். எனவே சமன்பாட்டின் இரு புறமும் 180°-ஐ அடித்து விடலாம்.

2. δ பொது: அதையும் நீக்கிவிடலாம்.

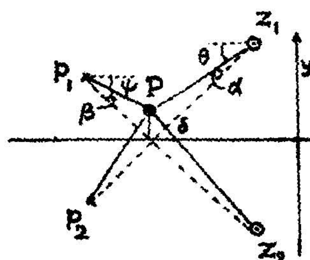
3. $-\dfrac{1}{b-z_1} = \dfrac{1}{z_1-b}$

எனவே,

$$\Sigma \frac{1}{z_1-b} - \Sigma \frac{1}{p_1-b} = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதில் இருந்து b-யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

சிக்கல் பேரெண்கள் அல்லது சுழியெண்கள் இருந்தால் அவற்றைக் கையாளும் முறையைக் கீழே காண்க.



படம் 8.13 சிக்கல் பேரெண்கள், சுழி எண்கள்

இரு சிக்கற் பேரெண்களின் கோணம் $= (\phi+\beta)-(\phi-\beta)$
$= 2\beta$

இரு சிக்கற் சுழியெண்களின் கோணம் $= (\theta+\alpha)-(\theta-\alpha)$
$= 2\alpha$

$P_1, P_2 = \sigma_p \pm j\,\omega_p$

$z_1, z_2 = \sigma_z \pm j\,\omega_z$

$$\alpha \simeq \sin\alpha = \frac{\delta\cos\theta}{\sqrt{\sigma_z^2+\omega_z^2}} = \frac{\delta\,\sigma_z}{(\sigma_z^2+\omega_z^2)}$$

$$\beta \simeq \sin\beta = \frac{\delta\cos\phi}{\sqrt{\sigma_p^2+\omega_p^2}} = \frac{\delta\,\sigma_p}{(\sigma_p^2+\omega_p^2)}$$

எனவே, b-யின் சமன்பாடு.

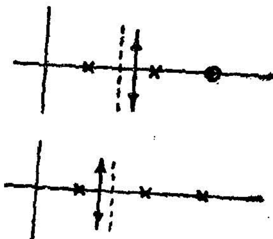
$$\left(\Sigma\ \frac{1}{z_1-b}+\Sigma\ \frac{2\sigma_z}{\sigma_z^2+\omega_z^2}\right)-\left(\Sigma\ \frac{1}{p_1-b}+\Sigma\frac{2\sigma_p}{\sigma_p^2+\omega_p^2}\right)=0$$

இதில் இருந்து b-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

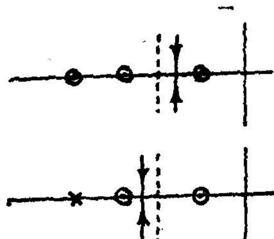
குறிப்பு : மெய் அச்சிற் பிரியும் புள்ளிகளின் ஈர்ப்பும் விலக்கலும்:

பிரிந்து செல்லும் புள்ளிகள் (breakaway points) சுழி யெண்களால் ஈர்க்கப்படுகின்றன ; பேரெண்களால் விலக்கப்படுகின்றன. (படம் 8.14)

அதுபோலவே, கூடும் புள்ளிகள் (breakin points) பேரெண்களால் ஈர்க்கப்படுகின்றன ; சுழியெண்களால் விலக்கப்படுகின்றன. (படம் 8.15)



படம் 8.14 பிரியும் புள்ளியின் ஈர்ப்பும் விலக்கமும்



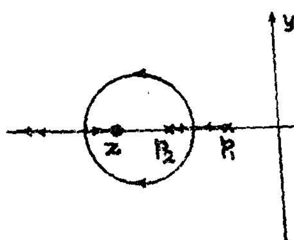
படம் 8.15 கூடும் புள்ளியின் ஈர்ப்பும் விலக்கமும்

6. கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் :

இரவுத்து அணியில் முழுச் சுழி வரிசை ஆயப் புள்ளிக்குச் சம தூரத்தில் உள்ள மூலங்களைக் குறிக்கிறது. s^1 வரிசையில், ஒரே உறுப்பே உண்டு. அதைச் சுழி ஆக்கினால், முழுச் சுழி வரிசை கிடைக்கிறது. s^2 வரிசையில் இருந்து ஒரு துணைச் சமன்பாட்டை எழுதித் தீர்த்தால் அச் சமதூர மூலங்கள் கிடைக்கும். s^2, s^0 உறுப்புக்களே s^2-வரிசையில் இருப்பதால் இம் மூலங்கள் கற்பனை அச்சிலேயே இருக்கும். இவை மூலப் பாதையில் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். எனவே மூலப் பாதைக் கிளைகள், இப் புள்ளிகளில் கற்பனை அச்சைக்கடக்கின்றன என்பது தெளிவு.

8.1.5 வட்ட மூலப் பாதை (circular root locus)

மெய் அச்சில் அடுத்தடுத்த இரு பேரெண்களுக்குப் பின் (p_1, p_2) ஒரு சுழியெண் (z) வருமானுல், பிரியும் புள்ளியில் இருந்து மூலப்பாதைக் கிளைகள் ஒரு வட்டத்திற் செல்லும். அவ் வட்டத்தின் மையம் $(z, 0)$; ஆரம் $\sqrt{(p_1-z)(p_2-z)}$.



படம் 8.16 வட்ட மூலப்பாதை

நிறுவுதல் $GH = \dfrac{K(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$

சிறப்பியற் சமன்பாடு $1 + GH = 0$

அதாவது $(s-p_1)(s-p_2)+K(s-z_1) = 0$

மூலப் பாதையில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி $s = x+jy$ என்க.

எனவே, $(x+jy-p_1)(x+jy-p_2)+K(x+jy-z) = 0$

இதன் மெய்ப் பகுதிகளைப் பிரிக்க.

$$x^2-y^2-(p_1+p_2-k)x+p_1p_2-Kz = 0 \qquad \dots (1)$$

கற்பனைப் பகுதிகளைப் பிரிக்க,

$$2xy-(p_1+p_2-K)y = 0 \qquad \dots (2)$$

இவ் விரண்டு சமன்பாடுகளில் (1), (2) இருந்தும்,

$$K = \frac{x^2-y^2-(p_1+p_2)x+p_1p_2}{z-x} = \frac{(p_1+p_2)-2x}{1}$$

குறுக்கே பெருக்க,

$$x^2-y^2-(p_1+p_2)x+p_1p_2 = (p_1+p_2)(z-x)-2x(z-x)$$

$$x^2+y^2-2zx = p_1p_2-(p_1+p_2)z$$
$$(x^2-2xz+z^2)+y^2 = z^2-(p_1+p_2)z+p_1P_2$$
$$(x-z)^2+(y-0)^2 = (p_1-x)(p_2-z)$$

இது $(x,0)$ என்ற மையத்தையும் $\sqrt{(p_1-z)(p_2-z)}$ என்ற ஆரத்தையும் உடைய வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

மாதிரி வினு 8.2

ஓர் ஆள்குலையில் $GH = \dfrac{K(s+1)}{s(s+0.25)(s+10)}$

இதன் மூலப் பாதையை வரைந்து சிறப்புப் புள்ளிகளைக் குறிக்க.

தீர்வு :

$$GH = \frac{K(s+1)}{s(s+0.25)(s+10)}$$

தொடக்கமும் முடிவும் : கொடுத்துள்ள GH—இல்

பேரெண்கள் : $0, -0.25, -10$ $\therefore\ n_p = 3$

சுழியெண்கள் : -1 $\therefore\ n_z = 1$

எனவே மூலப் பாதையின் கிளைகள் = 3.

அவை 0, −0.25, −10 என்ற புள்ளிகளில் தொடங்குகின்றன. ஒரு கிளை, −1–இலும், மற்ற இரு கிளைகள் வரம்பிலியிலும் முடிகின்றன.

மெய் அச்சுக் கிளைகள் : 0, −0.25 ; —1, −10 இப் புள்ளிகளுக்கு இடைப் பட்ட பகுதிகளில் மூலப் பாதைக் கிளைகள் இருக்கும்.

வட்ட மூலப் பாதை : அடுத்தடுத்து இரு பேரெண்களும் (0, −0.25) பின் ஒரு சுழியெண்ணும் (−1) இருப்பதால் ஒரு வட்ட மூலப் பாதை அமைகிறது. இன்னொரு பேரெண் (−10) தொலைவில் இருப்பதால் அதனுல் வட்டப் பாதையில் தோன்றும் விலக்கும் (repulsion) குறைவு என விட்டு விடுகிறோம்.

வட்ட மூலப் பாதையின் மையம் (−1,0) என்ற சுழி எண் ஆகும்.

இதன் ஆரம் $\sqrt{(0+1)(-0.25+1)} = 0.865$.

ஈற்றணுகிகள்:

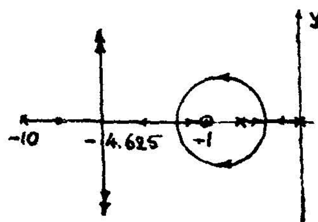
$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(0-0.25-10)-(-1)}{3-1} = -4.625.$$

$$\phi = \pm\frac{180^\circ + k360^\circ}{n_p - n_z} = \pm\frac{180^\circ}{2}, \pm\frac{540^\circ}{2}$$

$$\left(\pm\frac{180}{2} = \pm\frac{540}{2}\right) = \pm 90^\circ$$

வெளிச் செல் கோணம், மெய் அச்சை வெட்டும் புள்ளி இவை இல்லை.

இதன் மூலப் பாதைப் படம் வருமாறு:



படம் 8.17 மூலப் பாதை $GH = \dfrac{K(s+1)}{s(s+0.25)(s+10)}$

மாதிரி வினா 8.3

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+10)}$$

என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மூலப் பாதையை வரைக.

தீர்வு:

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+10)}$$

தொடக்கமும் முடிவும்:

GH-இன் பேரெண்கள்: $0, -2, -1 \pm j3$ $\therefore n_p = 4$

GH-இன் சுழியெண்கள்; — $\therefore n_z = 0$

எனவே மூலப்பாதையின் கிளைகள் 4: அவை $0, -2, -1\pm j3$ என்ற புள்ளிகளில் தொடங்கி, வரம்பிலியில் முடிகின்றன. மெய் அச்சுக்குச் சமச் சீராக உள்ளன.

மெய் அச்சுக் கிளைகள் : மெய் அச்சில், 0, −2 இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியில் ஒரு கிளை இருக்கும்.

சற்றணுகிகள் :

$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(0-2-1+j3-1-j3)-(0)}{4-0} = -1.$$

$$\phi = \pm\frac{180^\circ + k360^\circ}{n_p - n_z} = \pm\frac{180}{4}, \pm\frac{540}{4}$$

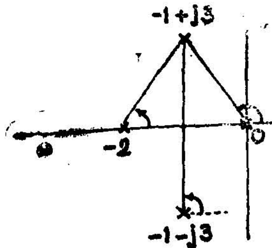
$$= \pm\frac{180}{4}$$

$$\pm\frac{900}{4}$$

$$= \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

4. வெளிச் செல் கோணம் :

$s=-1+j3$ என்ற பேரெண்ணில் இருந்து மூலப்பாதையின் கிளை வெளிச் செல் கோணம் :



படம் 8.18 வெளிச் செல்கோணம்

$$\theta_d = 180^\circ + \phi$$

$$\phi = \angle (s+1-j3)\, GH \Big|_{s=-1+j3}$$

$$= \angle \frac{K}{s(s+2)(s+1+j3)}\Big|_{s=-1+j3}$$

$$= 0 - \left[(180^\circ - \tan^{-1}3) + \tan^{-1}3 + 90\right] = -270^\circ$$

5. பிரியும் புள்ளிகள் : சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$1+GH=0$$

$$1+\frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+10)}=0$$

அதாவது $s(s+2)(s^2+2s+10)+K=0$

$$\frac{d}{ds}[s(s+2)(s^2+2s+10)+K]=0$$

$$\therefore \quad (2s+2)(s^2+2s+10)+(s^2+2s)(2s+2)=0$$

அதாவது $2(s+1)\ [s^2+2s+10+s^2+2s]=0$

$$(s+1)(s^2+2s+5)=0$$

$$s=-1, \quad -\pm j2$$

$s=-1$ பிரிவுப் புள்ளி (breakaway point)

$s=-1\pm j2$ 'தொங்கு புள்ளிகள்' (saddle points)

மெய் அச்சில் இல்லாத பிரிவுப் புள்ளிகள், தொங்கு புள்ளிகள் எனப்படும்.

6. கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் :

சிறப்பியற் சமன்பாடு $s^4+4s^3+14s^4+20s+K=0$

இரவுத்து அணி :

s^4	1	14	K	
s^3	~~4~~ 1	~~20~~ 5		$\div 4$
s^2	9	K		
s^1	$\frac{45-K}{9}$			
s^0	K			

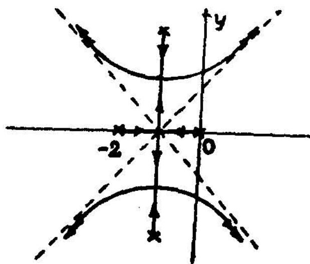
s^1 வரிசையைச் சுழியாக்க;

$$\frac{45-K}{9}=0 \qquad \therefore \quad \underline{K=45}$$

துணைச் சமன்பாடு : $9s^2+45=0$

$s^2+5=0 \qquad s=\pm\sqrt{5}$

இக்குறிப்புக்களால் வரையலாகும் மூலப்பாதைப் படம் வருமாறு.



படம் 8.19 மூலப்பாதை $GH=\dfrac{K}{s(s+2)(s^2+2s+10)}$

மாதிரி வினு 8.4

ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குவையில்,

$$G=\frac{K(1+3s)}{s^2+2s+101};\quad H=\frac{1}{s^2}$$

இதன் மூலப்பாதைப் படத்தை வரைந்து நிலையுறுதியை ஆய்க. K-யின் எந்த மதிப்புக்கு, மூலப்பாதைக் கிளைகள் கற்பனை அச்சைக் கடக்கின்றன ?

தீர்வு :

$$GH=\frac{K(1+3s)}{s^2(s^2+2^2+101)}$$

1. தொடக்கமும் முடிவும் :

GH-இன் பேரெண்கள் : $0,0,-1\pm j10 \quad \therefore\ n_p=4$

GH-இன் சுழியெண்கள் : $-\frac{1}{3} \quad \therefore\ n_z=1$

எனவே மூலப் பாதையின் கிளைகள் 4. இவை $0,0,-1+j10$ $-1-j10$ என்ற புள்ளிகளில் தொடங்கி, ஒரு கிளை $-\frac{1}{3}$-இலும் பிற மூன்று வரம்பிலியிலும் முடிகின்றன. கிளைகள் மெய் அச்சுக்குச் சமச்சீராக உள்ளன.

2. மெய் அச்சுக் கிளைகள் :

$-\infty$ முதல் $-\frac{1}{3}$ வரை உள்ள பகுதியில் மூலப்பாதைக் கிளை இருக்கிறது. $-\frac{1}{3}$,0 இவற்றுக்கு இடையே இல்லை.

3. ஈற்றணுகிகள் :

$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(0+0-1+j10-1-j10)-(-\frac{1}{3})}{3-1} = -\frac{5}{9}$$

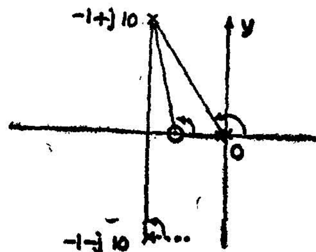
$$\Phi = \pm\frac{180^\circ + k360^\circ}{n_p - n_z} = \pm\frac{180^\circ}{3}, \pm\frac{540^\circ}{3}, \pm\frac{900^\circ}{3} = \frac{\pm 180^\circ}{3}$$

$$= \pm 60^\circ, \pm 180^\circ.$$

எனவே $K \to \infty$ என்கையில், மூலப் பாதையின் 3 கிளைகள் மெய் அச்சில் $c\,(-\frac{5}{9},0)$ என்ற புள்ளியில் தொடங்கி $\pm 60^\circ$, $\pm 180^\circ$ என்ற கோணங்களில் பிரியும் ஈற்றணுகிகளை ஒட்டி வரம்பிலிக்குச் செல்வன.

4. வெளிச் செல் கோணம் :

$s = -1 + j\,10$ என்ற பேரெண்ணில் இருந்து மூலப் பாதைக் கிளை வெளிச் செல் கோணம் :



படம் 8.20 வெளிச் செல்கோணம்

$$\theta\alpha = 180 + \phi$$

$$\phi = \left|(s+1-j\,10)\;GH\right|_{s=-1+j10}$$

$$= \left|\frac{K(1+3s)}{s^2\,(s+1+j10)}\right|_{s=-1+j10}$$

$$= (180^\circ - \tan^{-1} 15) - 2\,(180 - \tan^{-1} 10) - 90^\circ$$

$$= 180^\circ - 86.2^\circ - 360^\circ + 168.6^\circ - 90^\circ = 172.4^\circ$$

$\theta_d = 180^\circ + 172.4 = 352.4^\circ$ அல்லது -7.6°.

5. கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் :

சிறப்பியற் சமன்பாடு : $s^4+2s^3+101s^2+3\,Ks+K = 0$

இரவுத்து அணி :

s^4	1	101	K
s^3	2	$3K$	
s^2	$\frac{202-3K}{2}$	K	
s^1	$\frac{1.5\,K\,(202-3K)-2K}{\frac{1}{2}\,(202-3K)}$		
s^0	K		

s^1 வரிசையைச் சுழி ஆக்க,

$$1.5\,K\,(202-3K) - 2K = 0$$

$$303-4.5\,K - 2 = 0$$

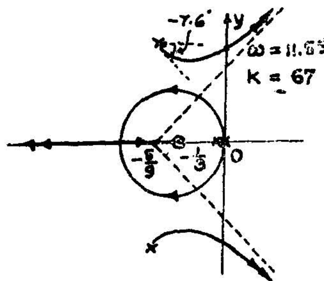
$$\therefore \quad K = \frac{301}{4.5} = 67.$$

துணைச் சமன்பாடு : $\frac{202-3K}{2}\,s^2+K = 0$

$$0.5\,s^2+67 = 0.$$

$\omega^2 = 134$ எனவே $\omega = \sqrt{134} = 11.56.$

மேற்கண்ட குறிப்புக்களின் துணையால் மூலப்பாதையைப் பின்வருமாறு வரையலாம்.



படம் 8.21 மூலப்பாதை $GH = \frac{K\,(1+3s)}{s^2\,(s^2+2s+101)}$

$K = 67$ என்னும் மதிப்பில், மூலப்பாதை கற்பனை அச்சைக் கடக்கிறது.

எனவே, $K < 67$ எனில் (சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் s-தள வலது பாதியில் இல்லாததால்) குலை நிலையுறுதி உடையதாகிறது.

மாதிரி வினா 8.5

ஒரு குலையில் $GH = \dfrac{K}{(0.5\,s+3)\,(0.4\,s+1.2)\,(0.5\,s^2+s+1)}$ Kயின் எந்த மதிப்பிற்குப் பின்னூட்டுக் குலை ஒரு தூய அலைவாக்கியாக (oscillator) இருக்கும் என மூலப் பாதையின் துணையால் கணிக்க.

தீர்வு :

$$GH = \frac{K}{(0.5\,s+3)\,(0.4\,s+1.2)\,(0.5\,s^2+s+1)}$$

$$= \frac{10\,K}{(s+6)\,(s+3)\,(s^2+2\,s+2)}$$

தொடக்கமும் முடிவும் :

GH இன் பேரெண்கள் : $-6, -3 -1 \pm j\,1$ $\therefore n_p = 4$

GH இன் சுழியெண்கள் : இல்லை $\therefore n_z = 0$

மூலப் பாதையின் கிளைகள் 4. இவை -6, -3, $-1+j\,1$, $-1-j1$ என்ற புள்ளிகளில் தொடங்கி வரம்பிலியில் முடிகின்றன. கிளைகள் மெய் அச்சிற்குச் சமச் சீராக இருக்கின்றன.

மெய் அச்சுக் கிளைகள் : -6, -3 க்கு இடைப் பட்ட பகுதியில் மூலப் பாதைக் கிளை ஒன்று உள்ளது.

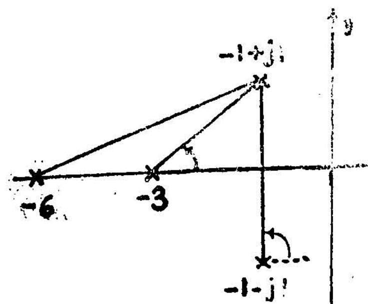
சுற்றணுகிகள் :

$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(-6-3-1+j\,1-1-j1)-(0)}{4-0} = -\frac{11}{4}$$

$$\phi = \pm\frac{180^\circ + K360^\circ}{n_p - n_z} = \pm\frac{180}{4}, \pm\frac{540^\circ}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

வெளிச் செல் கோணம் :

$s=-1+j\,1$ என்ற பேரெண்ணில்,



படம் 8.22

$$\theta_d = 180+\phi$$

$$\phi = \left| \frac{10\,K}{(s+6)\,(s+2)\,(s+1+j\,1)} \right|_{s=-1+j\,1}$$

$$= 0-\,(90°+\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{5})$$

$$= -\,127.8°$$

$$\therefore \quad \theta_d = 180°-127.8° = 52.2°$$

மெய் அச்சில் பிரியும் புள்ளி :

$$1+GH=0$$

$$1+\frac{10K}{(s+6)\,(s+3)\,(s^2+2s+2)} = 0$$

$$(s+6)\,(s+3)\,(s^2+2\,s+2)+10K=0$$

$$s^4+11\,s^3+38\,s^2+54\,s+36+10\,K=0$$

இதன் வகைக் கெழுவைச் சுழியாக்க,

$$4\,s^3+33\,s^2+76\,s+54=0$$

$$s^2\,(4\,s+33)+76\,(s+0.71)=0$$

இதைப் பிழைத் திருத்தல் முறையில் தீர்க்கலாம்.

சோதனைப் புள்ளி -3, -6 இவற்றிற்கு இடைப் பட்டது. -5 எனத் தொடங்குவோம்.

$s = -5$; இடதுபுறம் $= 25 (-20+33) + 76 (-5+0.71)$
$= 325 - 326 = 0$

எனவே, பிரியும் புள்ளி : $s = -5$.

6. கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளி :

சிறப்பியற் சமன்பாடு :

$$s^4 + 11 s^3 + 38 s^2 + 54 s + 36 + 10k = 0$$

இரவுத்து அணி :

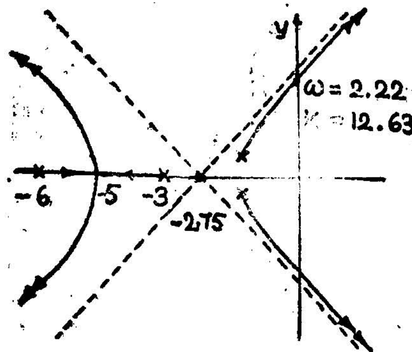
s^4	1	38 $\quad 36+10k$
s^3	11	54
s^2	33.09	$36+10k$
s^1	$\dfrac{33.09 \times 54 - 11(36+10k)}{33.09}$	
s^0	$36+10k$	

s^1 வரிசையைச் சுழியாக்க. $33.09 \times 54 - 11(36+10k) = 0$

$\therefore \quad 36+10k = \dfrac{33.09 \times 54}{11} = 162.3$ இதில் இருந்து $\underline{K = 12.63}$

துணைச் சமன்பாடு $33.09\, s^2 + 162.3 = 0 \qquad \therefore\ s = \pm j\, 2.22$

மூலப் பாதையின் படத்தைக் கீழே காண்க $\boxed{K = 12.63}$ எனில், சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்கள் 2, கற்பனை எண்களாக உள்ளன. அப்பொழுது குலை அலைவாக்கியாக இயங்குகிறது அலைவெண் $\omega = 2.22$.



படம் 8.28 மூலப்பாதை $GH = \dfrac{10K}{(s+6)(s+3)(s^2+2s+2)}$

8.2 மூலப்பாதையில் சிறப்புத் தலைப்புக்கள்

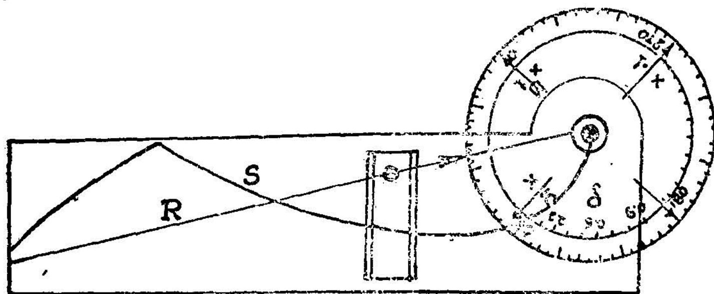
8.2.1 சுருள் அளவி (The spirule)

சரியான மூலப்பாதை வரைதல் : தோராய மூலப் பாதையில் இருந்து பல சோதனைப் புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்ளலாம். அங்கெல்லாம் கோண விதியைப் பொருத்தலாம். கோண விதி பொருந்தும் புள்ளிகளில் வீச்சு விதியைக் கொண்டு *K*யின் மதிப்பையும் கணிக்கலாம். இவ்வாறு சரியான மூலப் பாதையை வரைதல் இயலும்.

சுருள் அளவி : மூலப்பாதை உத்தியில் (technique) கோணங்களைக் கூட்டலும் (கழித்தலும்), திசைக் கோடுகளின் நீளங்களைப் பெருக்கலும் (வகுத்தலும்) அவசியம் ஆகின்றன. இவற்றை எளிய முறையில் செய்ய உதவும் ஒரு கருவியே 'சுருள் அளவி' (spirule).

அமைப்பு : சுருள் அளவி ஒரு வட்டப் பாகை-மானியையும் (circular protractor) ஒரு செவ்வகக் கையில் அமைந்த மடக்கைச் சுருளையும் (logarithmic spiral) உடையது. ஒளி ஊடுருவு நெகிழியால் (transparent plastic) ஆன இவ் இரு உறுப்புக்களும் ஒரு கண்ணில் (eyelet) இணைக்கப் பட்டு இருக்கின்றன. (படம் 8.24)

ஒரு குண்டூசியை கண்ணின் உள் செலுத்தி, எந்த சோதனைப் புள்ளியின் மேலும் படியுமாறு வைக்கலாம். இதுவே சுருள் அளவியின் நிலைத்தானம் (pivot) ஆகும்.



படம் 8.24 சுருள் அளவி

குறியீடுகள் : படத்தில் உள்ள சுருள் அளவியின் வட்டப் பாகைமானியில் சிவப்பு வண்ணத்தில் கோண அளவீடுகளும் பெருக்க எண்களும் (multiplying factors) குறிக்கும் நான்கு அம்புக் குறிகளும் உண்டு. (×0.1, ×1 0, ×10, ×100 அல்லது

$\times 0.01$) என்பவையே அவை. செவ்வகக் கையில் கருப்பு வண்ணத்தில் R என்ற ஒரு நியமக் கோடும், S என்ற சுருள் கோடும், வீச்சு அளவீடுகளும், அளவை விகித எண்களும் (scale factors) உண்டு.

கோணத்தை அளத்தல் :

ஒரு புள்ளியில் கூடும் பல திசைக் கோடுகளின் மொத்தக் கோணத்தைச் சுருள் அளவியால் எளிதிற் கணித்தல் இயலும். சிவப்புப் பாகை அளவீடுகளையும், கருப்பு நியமக் கோட்டையும், இதற்குப் பயன் படுத்துகிறோம்.

1. தொடக்கம் : சோதனைப் புள்ளி Pயின் வழியாகக் கிடை மட்டமாக நிலையான ஒரு நியமக் கோடு வரைக. சுருள் அளவியின் மையத்தைப் P-யில் பொருந்துமாறு வைக்க. சுருள் அளவியின் நியமக் கோடு R, சுழிப் பாகையில் (0°) பொருந்தட்டும்.

2. சுழியெண் திசைக் கோடு : சுருள் அளவியின் கண்ணைத் தாளுடன் சேர்த்து அழுத்திக் கொள்க. வட்டம் சுழலுமாறு இருக்கட்டும். கிடைமட்ட நியமக் கோட்டுடன் R படியுமாறு, வட்டத்தையும், ஆரக்கையையும் ஒன்றாகத் திருப்புக.

இப்பொழுது, வட்டத்தையும் அழுத்திப் பிடித்துக்கொண்டு, ஆரக் கையைமட்டும், R, சுழியெண் திசைக் கோட்டுடன் பொருந்துமாறு திருப்புக. வட்டப்பாகை அளவீட்டை R வெட்டும் புள்ளி கோணத்தைக் கொடுக்கிறது (ϕ_z)

இவ்வாறு ஒவ்வொரு சுழியெண் திசைக் கோட்டின் கோணத்தையும் கணிக்க, இறுதியில் வட்டப்பாகை அளவீட்டை R வெட்டும் புள்ளி $\Sigma\phi_z$ என்னும் மொத்தக் கோணத்தைக் கொடுக்கும்.

3. பேரெண் திசைக்கோடு : சுருள் அளவியின் கண்ணைத் தாளுடன் சேர்த்து அழுத்திக் கொள்க. வட்டம் (disc) சுழலுமாறு இருக்கட்டும். பேரெண் திசைக் கோட்டின்மேல் R படியுமாறு வட்டத்தையும், ஆரக் கையையும் ஒன்றாகத் திருப்புக.

இப்பொழுது வட்டத்தையும் அழுத்திப் பிடித்துக்கொண்டு ஆரக் கையைமட்டும் R ஆனது கிடைமட்ட நியமக் கோட்டுடன் பொருந்துமாறு திருப்புக. வட்டப் பாகை அளவீட்டை R வெட்டும் புள்ளி –கோணத்தைக் ($-\phi_p$) கொடுக்கிறது.

இவ்வாறு ஒவ்வொரு பேரெண் திசைக் கோட்டின் கோணத்தையும் கணிக்க. இறுதியில் வட்டப்பாகை அளவீட்டை R வெட்டும் புள்ளி $-\Sigma\phi_p$ என்னும் மொத்தக் கோணத்தைத் தருகிறது.

4. முடிவு : படி-1 இல் தொடங்கி, சுழி எண்ணுக்குப் படி-2 உம், பேரெண்ணுக்குப் படி-3 உம் ஆகத் தொடர்ந்து முன்னேற வும் இறுதியில், Rக்கு எதிரில் வட்டப் பாகைமானியில் மொத்தக் கோணம் $\phi = \Sigma\phi_z - \Sigma\phi_p$ கிடைக்கிறது. இது $180° \pm k\ 360°$ ஆக இருப்பின், சோதனைப் புள்ளி மூலப் பாதையில் இருக்கிறது என அறியலாம்.

நீளத்தை அளத்தல் :

ஒரு புள்ளியில் கூடும் பல திசைக் கோடுகளுடைய நீளங்களின் பெருக்குத் தொகையை சுருள் அளவியின் உதவியால் எளிதிற் கணிக்கலாம். இதற்கு ஆரக்கையிலேயே வட்டத்தை ஒட்டி அமைந்துள்ள கருப்பு வண்ணவீச்சு அளவீடு, நியமக்கோடு R, சுருள்கோடு S ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

சுருள் கோடு S, நியமக்கோடு R ஆகியவற்றிற்கு இடையில் உள்ள கோணம், மையப் புள்ளி, சுருள் கோடு இவற்றின் இடைத் தூரத்தின் மடக்கைக்கு (logarithm) நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

1. தொடக்கம் : சுருள் அளவியை, அதன் கண், சோதனைப் புள்ளியில் படியுமாறு வைக்க. நியமக் கோடு R, வட்டப் பாகை மானியின் சுழிப் பாகையோடு (0°) பொருந்தட்டும்.

2. பேரெண் திசைக் கோடு : நியமக் கோடு R, பேரெண் திசைக் கோட்டில் பொருந்துமாறு, வட்டத்தையும் ஆரக் கையை யும் ஒன்றாகத் திருப்பவும். வட்டத்தைத் (disc) தாளுடன் அழுத்திப் பிடித்துக் கொண்டு, ஆரக் கையை மட்டும் திருப்பிச் சுருள் கோடு S திசைக் கோட்டின் மறுமுனையை வெட்ட வைக்க வும். இப்பொழுது வீச்சு அளவீடு = (ஓர் அளவைப் பெருக்க எண்) × (திசைக் கோட்டு நீளம்), ஆகும்.

3. சுழியெண் திசைக் கோடு : சுருள்கோடு S, சுழியெண் திசைக் கோட்டின் மறு முனையை வெட்டுமாறு, வட்டத்தையும் ஆரக் கையையும் ஒன்றாகத் திருப்பவும். பிறகு, வட்டத்தைத் தாளுடன் அழுத்திப் பிடித்துக் கொண்டு, ஆரக் கையை மட்டும், நியமக் கோடு R திசைக் கோட்டில் படியுமாறு திருப்பவும். இப் பொழுது, வீச்சு அளவீடு,

$$\text{ஓர் அளவைப் பெருக்க எண்} \times \frac{\text{முன் திசைக் கோட்டு நீளம்}}{\text{இத் திசைக் கோட்டு நீளம்}}$$

என்பதைக் குறிக்கும்.

இவ்வாறு பேரெண் சுழியெண் திசைக்கோடுகளின் நீளங் களின் மொத்தப் பெருக்கல், வகுத்தலைக் காணல் இயலும்.

4. K-யின் மதிப்பை அறிதல்: வீச்சு அளவீடு என்ன என்பதை அறிய வட்டத்தில் உள்ள 4 சிவப்பு அம்புக் குறிகளையும் காண்க. அவற்றுள் ஏதாவது ஒன்று, வீச்சு அளவீட்டைச் சுட்டிக் காட்டும்.

K = (இறுதி வீச்சு அளவீடு) × (பெருக்க எண்)

இதற்குப் பகுதி, தொகுதிகளுடைய உறுப்புக்களின் எண் ணிக்கை சமமாக இருக்க வேண்டும்.

5. அளவை விகித எண் (scale factor)

பொதுவாக,

K = (வீச்சு அளவீடு) × (பெருக்க எண்)×(அளவை விகித எண்)

அளவை விகித எண் = $\sigma^{n_p - n_z}$

வரைபடத் தாளின் ஆயப் புள்ளியில் சுருள் அளவியின் கண் படியுமாறு வைத்து, ஆரக் கையின் நீள அளவைக் குறியீடு 1-க்கு நேர், கணக்கின் அளவைக் குறியீடு என்ன என்று காண்க. இதுவே σ.

$n_p = n_z$ எனில், அளவை விகித எண் $= \sigma^0 = 1$. $n_p > n_z$ என்றாலும், Kயின் மதிப்பைக் காண்கையில், குறைவாய் உள்ள தொகுதி உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை ஒருமைத் திசைக் கோடுகளால் (unit vectors) அதிகமாக்கி, $n_p = n_z$ என்று கொண்டு வரலாம்.

எடுத்துக் காட்டு :

$$K = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4}{L_a \cdot L_b} = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4}{L_a \cdot L_b \cdot 1 \cdot 1}$$

இவ்வாறு கொண்டால், அளவை விகித எண் ஒன்றாகும். எனவே, K = (வீச்சு அளவீடு) × (பெருக்க எண்)

குறிப்பு : அளவை விகிதப்படி, ஒருமைத் திசைக் கோட்டின் நீளம் $\frac{1}{2}$ அங்குலத்திற்கும் குறைவாக இருப்பின்

$$K = 10 \times 10 \times \frac{L_1\, L_2\, L_3\, L_4}{L_a L_b \times 10 \times 10}$$ என்று கொள்க.

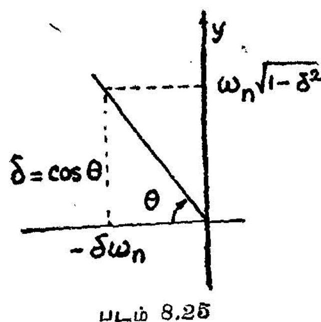
இதில் 10×10 என்ற தொகுதிப் பெருக்கல் இறுதியாகச் செய்யப் படும்.

தடையூட்ட விகிதம் காணல் :

ஒரு ஈரடுக்குப் பின்னூட்டுக் குலையின் சிறப்பியற் சமன்பாடு $s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2=0$. இதன் மூலங்கள்

$s=-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ $(\delta<1)$. இவற்றைப் படம் 8-25-இல் காண்க. இங்கு,

$$\cos\theta = \frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \delta.$$



படம் 8.25

நியமக் கோடு R, வட்டத்தின் 180° இல் பொருந்துமாறு செய்க. வட்டத்தின் கண்ணை ஆயப் புள்ளியில் அழுத்திக் கொண்டு, ஆரக் கையை மட்டும் நகர்த்தி, δ தேவைப் படும் புள்ளியின் வழி நியமக்கோடு R செல்லுமாறு செய்க. நியமக்கோடு R வட்டத்தில் உள்ள δ அளவீட்டை ஓர் இடத்தில் வெட்டும். அதுவே தேவையான δ-வின் மதிப்பைக் கொடுக்கிறது.

மாதிரி வினா 8.8

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆள்குலையின் மூலப் பாதையை வரைந்து, தடையூட்ட விகிதம் 0.55 இருக்குமாறு, நிலைப் பெருக்க எண் Kயின் மதிப்பைத் தேர்க. $K=2.5$ எனில் δ-வின் மதிப்பென்ன ?

$$GH=\frac{K}{s(1+0.5s)(1+0.25s)}$$

தீர்வு :

$$GH=\frac{K_1}{s(s+2)(s+4)}, \quad K_1=8K$$

பேரெண்கள் : $0,-2,-4.$ $\therefore\ n_p=3$

சுழியெண்கள் இல்லை $\therefore\ n_z=0$

மூலப் பாதைக் கிளைகள் $0,-2,-4$ இல் தொடங்கி வரம்பிலியில் முடிகின்றன. மெய் அச்சுக்குச் சமச் சீராக இருக்கின்றன.

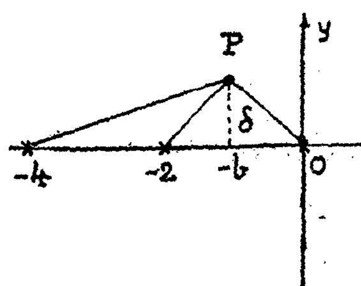
மெய் அச்சில் 0, −2 இவற்றிற்கு இடையிலும், −4, −∞ இவற்றிற்கு இடையிலும் மூலப்பாதைக் கிளைகள் உள்ளன.

ஈற்றணுகி :

$$c = \frac{\Sigma_p - \Sigma_z}{n_p - n_z} = \frac{(0-2-4)-(0)}{3-0} = -2$$

$$\phi = \pm \frac{180^\circ + k360^\circ}{n_p - n_z} = \pm \frac{180^\circ}{3}, \pm \frac{540^\circ}{3} = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ$$

பிரியும் புள்ளி :



படம் 8.26

$$\Sigma \frac{1}{z_1 - b} - \Sigma \frac{1}{p_1 - b} = 0$$

அதாவது

$$0 - \left[\frac{1}{0-b} + \frac{1}{-2-b} + \frac{1}{-4-b} \right] = 0$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+4} = 0$$

$$(b+2)(b+4) + b(b+4) + b(b+2) = 0$$

$$3b^2 + 12b + 8 = 0$$

$$b^2 + 4b + 2.67 = 0$$

$$\therefore \quad b = -2 \pm \sqrt{4 - 2.67} = -2 \pm 1.15 = -0.85 \text{ (அ) } -3.15$$

$b < 2$ (படம் 8.26) எனவே $b = -0.85$.

கற்பனை அச்சை வெட்டும் புள்ளி :

சிறப்பியற் சமன்பாடு : $1+GH=0$

$$1+\frac{K_1}{s(s+2)(s+4)}=0\quad,\quad K_1=8K$$

$$s^3+6s^2+8s+8K=0$$

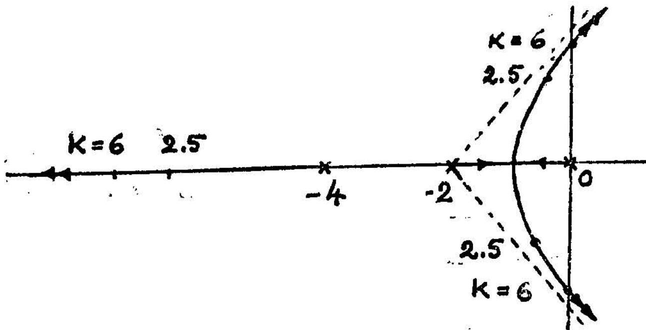
இரவுத்து அணி :

s^3	1	8
s^2	6	$8k$
s^1	$\frac{48-8k}{6}$	
s^0	$8k$	

இதில் s^1 வரிசையைச் சுழியாக்க, $48-8K=0$ $\therefore$ $K=6$ துணைச் சமன்பாடு $6s^2+48=0$ $\therefore$ $s^2=-8$; எனவே $s=\pm j\,2.828$.

இவையே மூலப்பாதை கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளிகள்.

இக் குறிப்புக்களின் துணையால் மூலப் பாதை தோராயமாக வரையப் படுகிறது. பிறகு சுருள் அளவியைக் கொண்டு, சோதனைப் புள்ளிகளின் கோண விதியின் உண்மையை அறிந்து, சரியான மூலப்பாதை வரையப்படுகிறது. பல புள்ளிகளில்,



படம் 8.27 மூலப் பாதை $GH=\dfrac{K}{s(1+0.5s)(1+0.25s)}$

விச்சு விதியின் உதவியால் K கணிக்கப்பட்டு எழுதப்படுகிறது. (படம் 8.27).

கொடுத்துள்ள $\delta = 0.55$.

$$\theta = \cos^{-1}\delta$$

$$= 56.6^\circ$$

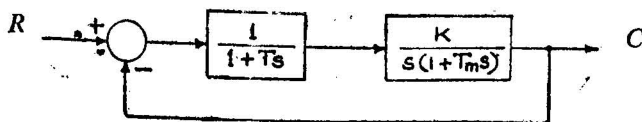
ஆயப் புள்ளியில் இருந்து, இடது மெய் அச்சைத் தளமாகக் கொண்டு 56.6° இல் வரையப்படும் கோடு, மூலப் பாதையை $K = 0.875$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இதுவே தேவையான K ஆகும். $\boxed{K = 0.875}$

$K = 2.5$ எனில், $\theta = 72^\circ$ $\quad \therefore \quad \phi = \cos^{-1}\theta = 0.31$

8 2.2. Kயினும் வேருன உறுப்புக் கெழுக்களுக்கான மூலப் பாதை (Root locus for parameters other than K)

பொதுவாக, $1 + K \dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$, என்ற உருவில் உள்ள எந்தச் சமன்பாட்டிற்கும் மூலப் பாதை வரைதல் இயலும்.

மீத்திறன் ஆள்குலைவ (optimal control system) ஒன்றை உருவாக்க, திறன் பெருக்கியில் உள்ள காலமாறிலி T, குலைவயின் செயலை எவ்வாறு மாற்றுகிறது என அறியவேண்டும் என்க.

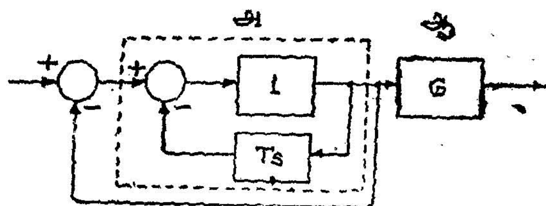


படம் 8.28

சான்ருகப் படம் 8.28இல் காட்டப்பட்டுள்ள குலைவயின் K, T_m இவை தெரியும், Tயின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு மூலப் பாதை வரைய வேண்டும் என்க.

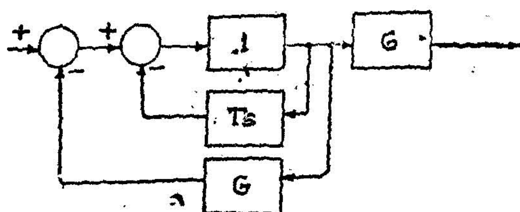
இக் குலைவயின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டை $1 + T \dfrac{N(s)}{D(s)} = 0$ என்ற உருவில் எழுதிவிட்டால், நாம் இதுவரை படித்த வழிகளில் மூலப் பாதையை வரைந்து விடலாம்.

இனி, கொடுத்துள்ள குலையின் உருவை எவ்வாறு மாற்றுவது என்பதைக் காண்போம். இதற்குப் பெட்டிப் பட ஒடுக்க உத்திகளைக் கையாளலாம்.

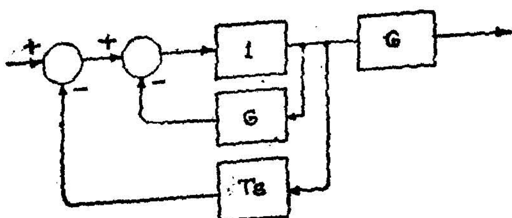


படம் 8.29 இங்கு $G = \frac{K}{s(1+T_m s)}$

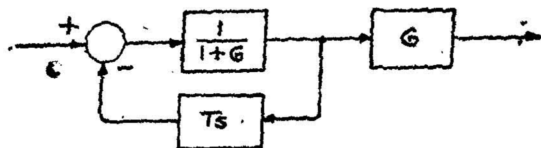
உருமாற்றம் 1 படி 1 (அ) பெருக்கி, (ஆ) இயக்கி



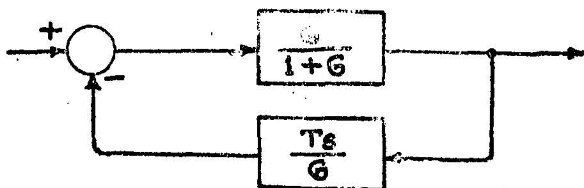
உருமாற்றம் 1 படி 2 படம் 8.30



உருமாற்றம் : படி 3 படம் 8.31



உருமாற்றம் : படி 4 படம் 3.32



உருமாற்றம் : படி 5 படம் 8.33

எனவே, சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$1 + \frac{G}{1+G} \cdot \frac{Ts}{G} = 0$$

$$0 + \frac{Ts}{1 + \frac{K}{s(1+T_m s)}} = 0$$

$$1 + T \cdot \frac{s^2(1+T_m s)}{s(1+T_m s)+K} = 0$$

$$GH_1 = \frac{s^2(1+T_m s)}{s(1+T_m s)+K}, \text{ என்க.}$$

$$\therefore \ |GH_1| = 1$$

$$\angle GH_1 = \pm (180^\circ + k\,360^\circ)$$

இவ் இரண்டு விதிகளையும் கொண்டு மூலப் பாதையை வரையலாம்.

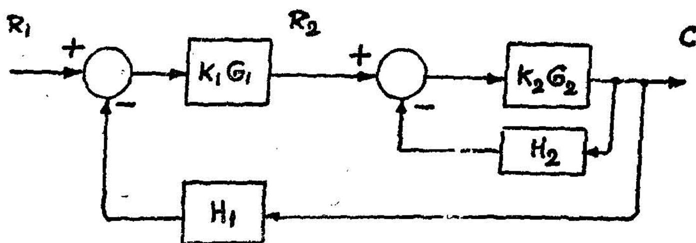
குறிப்பு : இதில் $n_z > n_p$ என்பதைக் காண்க. எப்பொழுதும் போல் $n_p > n_z$ ஆக இருக்கவேண்டும். எனில் $\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{GH_1} = -1$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலப் பாதையை வரையலாம். $T^1 = 1/T$, $GH^1 = 1/GH_1$ என்க. $\therefore \ T^1 GH^1 = -1$.

இதில் $n_p > n_z$. $T^1 = 0$ முதல் ∞ வரை மாறும்பொழுது மூலப் பாதை வரையப்படுகிறது.

8.2.3 பல சுற்று ஆள்குலைகளின் மூலப் பாதை (Root locus of multiple loop systems)

பல சுற்று ஆள்குலைகளில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பின்னூட்டுப் பாதைகள் இருக்கும். இவற்றின் மூலப் பாதைகளைக் காணும் முறையே இங்கு விவரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக் காட்டாகப் படம் 8.34 இல் உள்ள இரு சுற்று ஆள் குவையைக் காண்க.



படம் 8.34 பல சுற்று ஆள்குவை

$$\frac{C}{R_2} = \frac{K_2G_2}{1+K_2G_2H_2}$$

இதில் இருந்து, $1+K_2G_2H_2$ என்ற சிறப்பியற் சமன்பாட்டின் மூலப் பாதையை ($K_2=0$ முதல் ∞ வரை) முதலில் வரையலாம்.

இதனுடைய மூலங்கள், முழுக் குவையினுடைய செலுத்துச் சார்பின் பேரெண்களாக இருக்கின்றன.

முழுக் குவையின் சுற்று-செலுத்துச் சார்பு

$$GH = K_1G_1H_1 \cdot \frac{K_2G_2}{1+K_2G_2H_2}$$

எனவே,

$$1 + K_1 \frac{G_1H_1K_2G_2}{1+K_2G_2H_2} = 0$$

என்ற சிறப்பியற் சமன்பாட்டிற்கு ($K_1=0$ முதல் ∞ வரை) மூலப் பாதையை, அடுத்து வரையலாம். K_2-வின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒரு மூலப் பாதை கிடைக்கும்.

இவ்வாறே ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலப் பாதைகளால், பல சுற்று ஆள்குவைகளின் செயலை அறிதல் இயலும்.

8.2.4 பல உறுப்புக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணல்: நறுப்பு முறை (Factoring polynomials by partition method)

பல உறுப்புக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணவும் மூலப் பாதை பயன்படுகிறது.

$s^4+bs^3+cs^2+ds+e$ என்ற நான்கு படிக்கோவையைச் சான்றாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$s^4+bs^3+cs^2+ds+e=0 \qquad \dots (1)$$

என்னும் சமன்பாட்டை,

$$s^2\,(s^2+bs+c)+d\left(s+\frac{e}{d}\right)=0$$

என எழுதலாம்.

அல்லது,

$$1+\frac{d\left(s+\frac{e}{d}\right)}{s^2\,(s^2+bs+c)}=0 \qquad \dots (2)$$

இது, $1+K\dfrac{(s+\alpha)}{s^2\,(s+\beta)\,(s+\gamma)}=0$

என்ற உருவில் இருக்கிறது.

$d=0$ முதல் ∞ வரை மாறுகையில், சமன்பாடு (2) இன் மூலப் பாதையை வரைந்து, அதில் கொடுத்துள்ள d-யின் மதிப்பிற்கு உரிய மூலங்களைக் குறித்துக் கொள்ளலாம். அவை பல உறுப்புக் கோவையின் காரணிகளைக் கொடுக்கின்றன.

மேலும், சமன்பாடு (1) ஐ,

$$s^3\,(s+b)+c\left(s^2+\frac{d}{c}\,s+\frac{e}{c}\right)=0$$

அல்லது

$$1+\frac{c\left(s^2+\frac{d}{c}\,s+\frac{e}{c}\right)}{s^3\,(s+b)}=0$$

என்றும் எழுதி, மூலப்பாதை வரைந்து, c-யின் உண்மையான மதிப்பில் இருந்து மூலங்களையும், காரணிகளையும் காணலாம்.

இவ்வாறு, கொடுத்துள்ள பல உறுப்புக் கோவையைப் பகுதிகளாகத் தடுத்துக் காரணிகளைக் காண்பதால் இது 'தடுப்பு முறை' (partition method) என வழங்கப்படுகிறது.

ஐந்து படிக் கோவை வரை இவ் வழியில் காரணிகளைக் கண்டு பிடித்து விடலாம். அதற்குமேல், கடினம் ஆகும். அத்தகைய கோவை ஒன்றைக் கையாளும் முறையைக் கீழே காண்போம்.

$$s^6+b\,s^5+c\,s^4+d\,s^3+e\,s^2+f\,s+8=0$$

$$s^3\,(s^3+bs^2+cs+d)+e\left(s^2+\frac{f}{e}\,s+\frac{8}{e}\right)=0$$

$$1+\frac{e\left(s^2+\dfrac{f}{c}\,s+\dfrac{8}{e}\right)}{s^3\,(s^3+b\,s^3+c\,s+d)}=0 \qquad \dots (A)$$

இதன் மூலப் பாதை வரைய s^3+bs^2+cs+d என்பதன் காரணிகள் தேவை. இதற்கு,

$$s^3+bs^2+cs+d=0$$

$$s^2(s+b)+c\left(s+\frac{d}{e}\right)=0$$

அதாவது,

$$1+\frac{c\left(s+\dfrac{d}{e}\right)}{s^2(s+b)}=0 \qquad \dots (B)$$

இதன் மூலப் பாதையை வரைந்து, அதன் வழி s^3+bs^2+cs+d-யின் காரணிகளைக் காண்க. பிறகு சமன்பாடு (A)-யின் மூலப் பாதையை வரைந்து, கொடுத்துள்ள பல் உறுப்புக் கோவையின் காரணிகளைக் கணிக்க.

இவ்வாறு ஆறுபடிக் கோவைக்கு இரு தடுப்புக்கள் தேவைப் படுகின்றன. இதை அட்டவணை 8·1-இல் காணலாம்.

அட்டவணை 8.1

s-இன் அடுக்கு (படி, n)	தேவையான தடுப்புக்களின் எண்ணிக்கை
$3 \leqslant n \leqslant 5$	1
$6 \leqslant n \leqslant 8$	2
$9 \leqslant n \leqslant 11$	4
... ...	...

மாதிரி வினா 8.7

தடுப்பு முறையில் மூலப் பாதையின் துணை கொண்டு காரணிப் படுத்துக :

$$s^4+3s^3+18s^2+48s+32$$

தீர்வு :

$$s^4+3s^3+18s^2+48s+32 = 0$$

$$s^2(s^2+3s+18)+48\left(s+\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$1+48\frac{\left(s+\frac{2}{3}\right)}{s^2(s^2+3s+18)} = 0$$

$K = 48$

$$GH = \frac{\left(s+\frac{2}{3}\right)}{s^2(s^2+3s+18)}$$, என்க.

தொடக்கம் முடிவு :

GH இன் பேரெண்கள் - $0, 0, -1.5 \pm j\,3.96$ $\quad\therefore\ n_p = 4$

GH இன் சுழியெண்கள் : $-\frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ n_z = 1$

எனவே மூலப் பாதையின் கிளைகள் $0,\ 0,\ -1.5+j3.86,\ -1.5-j3.96$ என்ற புள்ளிகளில் தொடங்குகின்றன. இவற்றுள் ஒன்று $-2/3$ இலும், பிற மூன்று, வரம்பிலியிலும் முடிகின்றன.

மெய் அச்சுக்கிளைகள்: $2/3.\ -\infty$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பகுதியில் மூலப் பாதைக் கிளை ஒன்று உள்ளது.

வட்ட மூலப் பாதை : மையம் $(-2/3, 0)$. ஆரம் $2/3$.

ஈற்றணுகிகள் :

$$c = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(0+0-1.5+j3.96-1.5-j3.96)-(0.67)}{4-1}$$

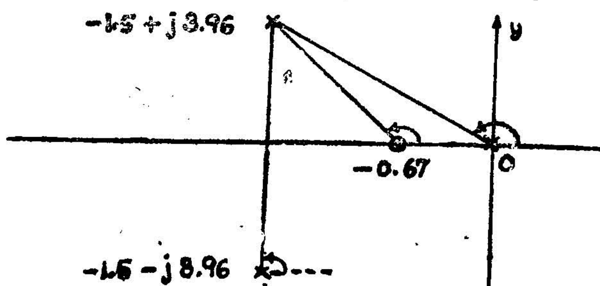
$$= \frac{-3+0.67}{3} = -\frac{7}{9}$$

$$\phi = \pm \frac{180° + k360°}{n_p - n_z}$$

$$= \pm \frac{180°}{3}, \pm \frac{540°}{3} = \pm 60°, \quad \pm 180°$$

வெளிச் செல் கோணம் :

$-1.5 + j3.96$ என்ற பேரெண்ணில்.



படம் 8.35 வெளிச்சசல் கோணம்

$$\theta_d = 180 + \phi$$

$$\phi = \left| \frac{K(s+0.67)}{s^2(s+1.5+j3.96)} \right|_{s = -1.5+j\,3.96}$$

$$= \left((180° - \tan^{-1}\frac{3.96}{0.83}\right) - 2\left(180° - \tan^{-1}\frac{3.96}{1.5}\right) - 90°$$

$$= 180° - 78.2° - 360° + 138.6° - 90° = 150.4°$$

$$\theta_d = 180° + 150.4° = 330.4° \text{ அல்லது } -29.6°$$

கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளிகள் :

சிறப்பியற் சமன்பாடு

$$s^4 + 3s^3 + 18s^2 + Ks + \frac{2}{3}K = 0$$

இரவுத்து அணி

s^4	1	18	$\frac{2}{3}K$
			$\div 3$
s^3	3	K	

$$s^2 \quad \frac{54-K}{3} \qquad \frac{2}{3}K$$

$$s^1 \quad \frac{(54-k)\,k-6k}{(54-k)}$$

$$s^0 \quad \frac{2}{3}K$$

இதில் s^1 வரிசையைச் சுழியாக்க,

$$(54-K)\,K-6K = 0$$

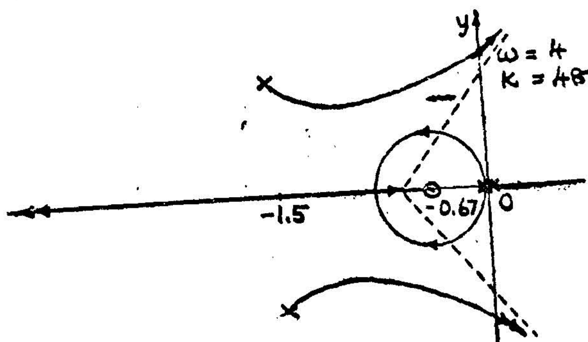
$$(54-K)-6 = 0 \qquad \therefore \quad K = 48$$

துணைச் சமன்பாடு : $\frac{54-K}{3}s^2+\frac{2}{3}K = 0$

அதாவது $\qquad 2s^2+32 = 0 \quad \therefore s = \pm j4$

இவையே மூலப் பாதைக் கிளைகள் கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளிகள் ஆகும்.

இக் குறிப்புக்களில் இருந்து தோராய மூலப்பாதை வரையப்படுகிறது. சுருள் அளவியின் உதவியால், பல சோதனைப் புள்ளிகளில் கோண விதியைப் பொருத்தி பாதையில் திருத்தங்கள் செய்து, வீச்சு விதியைக் கொண்டு Kயின் மதிப்புக்கள் எழுதப் படுகின்றன. இதைப் படம் 8.36 இல் காண்க.



படம் 8.36 மூலப் பாதை $G\,(H) = \frac{K\,(s+0.67)}{s^2(s^2+3s+18)}$

இம் மூலப் பாதைப் படம் Kயின் பல் வேறு மதிப்புகளுக்கு உரிய, சிறப்பியல் சமன்பாட்டு மூலங்களைத் தருகிறது.

$K = 48$ என்கையில் இவற்றின் மதிப்புக்கள் $s = -1, -2, \pm j4$ எனப் படத்தில் இருந்து படிக்கப்படுகின்றன. இச் சிறப்பியற் சமன்பாடு, கொடுக்கப் பட்ட கோவையில் இருந்தே எழுதப் பட்டது. எனவே, கோவையின் காரணிகளே, சிறப்பியற் சமன் பாட்டு மூலங்கள் ஆகும்.

எனவே, $s^4+3s^3+18s^2+48s+32$ என்னும் கோவையின் காரணிகள் வருமாறு :

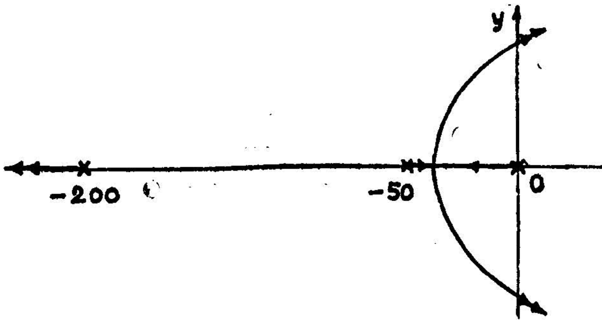
$$(s+1),\ (s+2),\ (s+j4),\ (s-j4).$$

8.2.5 மூலப்பாதை வழி ஆள்குவை ஆக்கம் : (design of control systems through Root locus)

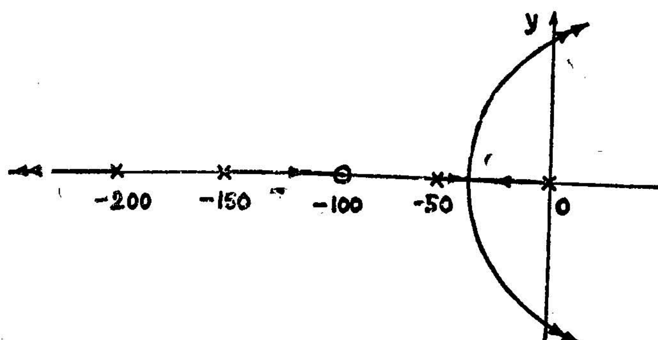
ஓர் ஆள் குவையின் மூலப் பாதை, குவையின் சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களுக்கும், நிலைப் பெருக்க எண் K-வுக்கும் உள்ள உறவைக் காட்டுகிறது. Kயின் எந்த மதிப்புக்களுக்கு மூலப் பாதைக் கிளைகள் S-தள வலது பாதியில் நுழையாது இருந்து விடுகின்றன என்று பார்த்து நிலையுறுதியை அறிகிறோம்.

மேலும் செயற் குறிப்புகளுக்கு (performance specifications) ஏற்ப ஆள்குவைகளை ஆக்கும் பணியில், இம் மூலங்களின் இருப் பிடங்களைத் தேவைக்கு ஏற்ப மாற்றி அமைப்பது அவசியம் ஆகிறது. இதற்கு மூலப்பாதை ஒரு கை வந்த கருவியாக உதவு கிறது.

எடுத்துக் காட்டாகக் கீழே உள்ள இரு மூலப் பாதைகளைக் காணவும்.



படம் 8.37 மூலப் பாதை $GH = \dfrac{K}{s(s+200)(s+50)}$



படம் 8.38 மூலப் பாதை $GH = \frac{K(s+100)}{s(s+50)(s+200)(s+250)}$

ஒரு சுழியெண்ணையும், ஒரு பேரெண்ணையும் புதிதாகப் புகுத்துவதால், மூலப்பாதையின் உருவம் மாறுகிறது. நிலை யுறுதியின் தரம் உயர்கிறது. இதில் இருந்து தெரிவது என்ன? கொடுக்கப்பட்ட ஆள் குலையின் மூலப் பாதையை வரைந்து கொண்டு, செயற்குறிப்புகளுக்கு ஏற்ப அதன் உருவைப் பேரெண், சுழியெண்களை இவற்றின் இணைப்பால் மாற்றி, வரும் புதிய செலுத்துச் சார்பிற்கு ஏற்ப ஈடுசெய் உறுப்புக்களைச் சேர்க்கலாம். இதையே 'ஈடு செய்தல்' என்னும் அத்தியாயத்தில் விரிவாகக் காணபோம்.

பயிற்சி 8

8.1 மூலப் பாதை வரைக:

(அ) $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K}{s(s^2+8s+17)}$

8.2 நிலையுறுதியை மூலப் பாதை முறையில் ஆய்க:

(அ) $G(s) = \frac{Ks}{(s+1)(s+10)}$

(ஆ) $G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+37)}$

8.3 ஒரு பின்னூட்டு ஆள் குலையில் சுற்று செலுத்துச் சார்பு

$$GH = \frac{K}{s(s^2+2s+2)(s^2+6s+10)}$$

இதன் மூலப் பாதையை வரைந்து, K யின் எந்த மதிப்பிற்கு இது ஒரு தூய அலை வாக்கியாக (oscillator) இயங்கும் என்று கண்டு பிடிக்க.

8.4 பின் வரும் சமன்பாட்டில் இருந்து மூலப் பாதையை வரைந்து முக்கியப் புள்ளிகளைக் குறிக்க. ($T=0$ முதல் ∞ வரை.)

$$\frac{T}{s(s+4)(s^2+8s+32)} = -1$$

8.5 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையில்

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.02s)(1+0.01s)}$$

(அ) K யின் எந்த மதிப்பு வரை இக் குலை நிலையுறுதி உடையதாய் இருக்கும்? (ஆ) தடையூட்டு விகிதம் $\delta = 0.388$ எனில், அதற்கு ஏற்ற K-யின் மதிப்பு என்ன ?

8.6 மூலப் பாதையின் துணை கொண்டு காரணிப் படுத்துக.

(அ) $s^4+5s^3+29s^2+125s+100 = 0$

(ஆ) $s^4-4s^3-7s^2+22s+24 = 0$

8.7 ஒரு குலையின் $G(s) = \dfrac{10}{s(1+0.1s)(1+0.5s)(1+s)}$

$1+G(s)$ இன் சுழியெண்கள் ஏதாவது s-தள வலது பாதியில் உள்ளனவா என்று பார்க்க. சிறப்பியற் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் கண்டறிக.

8.8 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலையில்

$G(s) = \dfrac{K}{s(1+0.5s)(1+0.2s)}$. குலையின் நிலைப் பெருக்க எண் K, தடையூட்டு விகிதம் $\delta = 0.4$ இருக்கு மாறு திருத்தி அமைக்கப் படுகிறது. வேக வழு மாறிலியின் (velocity error coefficient) மதிப்பென்ன ?

8.9 ஓர் ஆள் குலையின் சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு வருமாறு:

$$G(s)\,H(s) = \frac{6}{s\,(s+2)\,(s+4)}$$

இதன் பெருக்க நிறைவெண்ணை (gain margin) மூலப் பாதை முறையில் கணிக்க.

8.10 முழுப் பின்னூட்டு ஆள் குலை ஒன்றின் குறை சுற்றுச் செலுத்துச் சார்பு:

$$G(s) = \frac{10\,(s+T)}{s\,(s+2)\,(s+4)}$$

$T=0$ முதல் ∞ வரை மாறுகையில், சிறப்பியற் சமன்பாட்டு மூலங்களின் நியமப் பாதையைக் கணிக்க.

9. ஈடு செய்தல்
(Compensation)

9.1 ஈடு செய்தல் அறிமுகம் : (Introductory to compensation)
9.1.1 வரையறையும் விளக்கமும்

ஓர் ஆள்குவை செயற் குறிப்புகளுக்கு ஏற்ப இயங்க, அதன் அமைப்பில் செய்யப்படும் மாறுதல்கள் ஈடு செய்தல் (compensation) எனப்படும். மாறுதல்களைத் தோற்றுவிக்கும் உறுப்புக்கள் ஈடு செய்விகள் (compensators) எனப்படும்.

எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு முழுப் பின்னூட்டுக் அடிமைக் குவையில் $G(s) = 100/s\ (s^2+6s+25)$. அதன் செயற் குறிப்புக்கள் வருமாறு :

(அ) ஒருமை வேக ஊட்டக் கடைநிலை வழு $e_{ss} < 0.4$

(ஆ) பெருக்க நிறைவெண் $G_m > 2$

ஆள்குவை அமைப்பில் செய்ய வேண்டிய மாறுதல்கள் என்ன என்று காண்போம்.

$$e_{ss} = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{s\,R(s)}{1+G(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad (\text{ஒருமை வேக ஊட்டம் } r=t)$$

$$G(s) = \frac{K}{s\,(s^2+6s+25)} \quad \text{என இருக்கட்டும்.}$$

$$G(s) = \frac{K}{6s^2+s\,(25+s^2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{-6\omega^2 + j\omega\,(25 - \omega^2)}$$

இதன் கற்பனைப் பகுதியைச் சுழி ஆக்க,

$$25 - \omega^2 = 0 \qquad \therefore \quad \omega^2 = 25$$

எனவே $G_x = \left| \frac{K}{-6 \times 25 + 0} \right| = \frac{K}{150}$

$$G_m = \frac{1}{G_x} = \frac{150}{K} > 2 \qquad \therefore \quad K < 75.$$

மேலும்,

$$e_{ss} = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)}$$

$$= \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{1}{s + s\,G(s)}$$

$$= \frac{1}{\underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \; s\,G(s)}$$

$$= \frac{1}{K/25} \leqslant 0.4$$

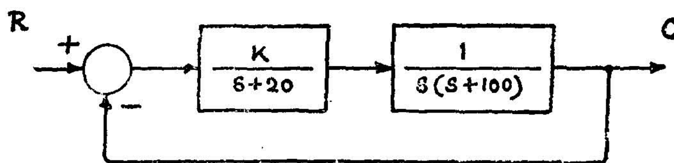
எனவே $K \geqslant \frac{25}{0.4}$ அல்லது 62.5.

அதாவது, ஆள்குலையின் நிலைப் பெருக்க எண் K 62.5–க்கும், 75-க்கும் இடையில் இருந்தால், செயற் குறிப்புகளுக்கு ஏற்ப ஆள்குலை இயங்கும். $K = 70$ எனக் கொள்ளலாம்.

கொடுக்கப் பட்டுள்ள $K = 100$. தேவையான $K = 70$. மாறுதல் 1 $\frac{70}{100}$ என்ற விகிதத்தால் பெருக்கல். இதை ஒரு மின் பிரித்தியாலோ (potential divider) அல்லது பொதுவாக ஒரு குறைப் பெருக்கியாலோ (attenuator) பெறலாம்.

பெருக்க எண் ஈடு செய்தலுக்கு (gain compensation) இது ஓர் எளிய எடுத்துக் காட்டு ஆகும்.

பொதுவாக ஈடு செய்தல் என்பது இவ்வளவு எளிதாக இராது. இதையும் ஓர் எடுத்துக் காட்டால் விளக்குவோம்.



படம் 9.1 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை

படத்திற் காணும் ஆள் குவையின் வேக வழு மாறிலி $K_v \simeq 200$, பருவ நிறைவெண் $\phi_m \simeq 45°$ என்பன செயற் குறிப்புக்கள். தேவையான மாறுதல்களை இப்பொழுது காண்போம்

$$G(s) = \frac{K}{s(s+20)(s+100)}$$

$$K_v = \underset{s \to 0}{\text{எல்லை}} \; sG(s) = \frac{K}{2000} = 200$$

எனவே $\underline{K = 4 \times 10^5}$

$$G(s) = \frac{4 \times 10^5}{s(s+20)(s+100)}$$

பருவ நிறைவெண் காண,

$$G_c = \frac{4 \times 10^5}{\sqrt{\omega_c^2(\omega_c^2+400)(\omega_c^2+10000)}} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\phi_c = -90° - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{20} - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{100}$$

$$\phi_m = 180 + \phi_c$$

சமன்பாடு (1) இல் இருந்து

$$\omega^2_c(\omega_c^2+400)(\omega^2_c+10^4) = 16 \times 10^{10}$$

$\omega_c = 100_u$ என்க.

$$u^2 (u^2+0.04)(u^2+1) = 0.16$$

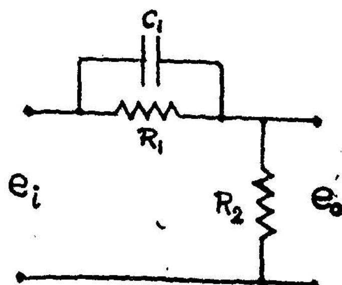
இதைப் பிழைத் திருத்தல் முறையில் தீர்க்க, $u = 0.572$

எனவே $\omega_c - 57.2$

$$\phi_c = -90° - \tan^{-1}\frac{57.2}{20} - \tan^{-1}\frac{57.2}{100} = -190.5°$$

$$\therefore \quad \phi_m = 180° - 190.5° = -10.5°$$

தேவையான பருவ நிறைவெண் 45°. இதை அடைய, செலுத்துச் சார்பில் பருவக் கோணத்தை 55° அதிகமாக்க வேண்டும். இதற்கு ஒரு பருவ முந்து மின் வலையைப் (etectrical phaselead network) பயன் படுத்தலாம். (படம் 9.2)

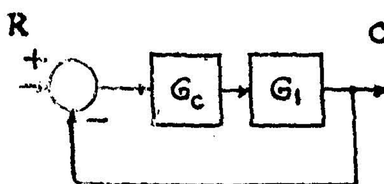


படம் 9.2 பருவம் முந்து மின்வலை

$$G_c = \frac{s+30}{s+300} \text{ என்க.}$$

இது ஏறத்தாழ 55° முந்து பருவக் கோணத்தைத் தரும். இதன் விவரம் பின்னர்க் காண லாம். Kயின் மதிப்பு மாறாது இருக்க, பெருக்க எண் 10 ஐ உடைய முன் பெருக்கி (preamplifier) ஒன்றைப் பொருத்தலாம்.

இவ்வாறு ஈடு செய்யப்பட்ட ஆள்குவையைப் படம் 9.3 இல் காண்க.



படம் 9.3 ஈடு செய்த முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குவை
1. முன்பெருக்கி 2. முந்துவலை 3. ஈடுசெய்வி

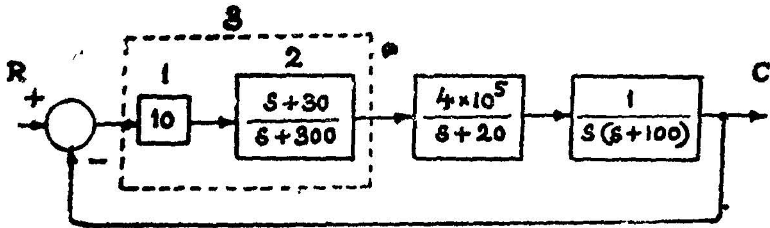
இது தொடர் ஈடு செய்தலுக்கு (series compensation) ஓர் எடுத்துக் காட்டாகும். மேற்கண்ட இரு சான்றுகளும் ஈடு செய்தல் என்றால் என்ன என்பதைத் தெளிவாகக் காட்டுகின்றன.

தம் அமைப்பில் மாறுதல்கள் இன்றி, செயற் குறிப்புக்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஏற்ப இயங்கும் ஆள்குவைகளைக் காணல் அரிது. விரும்பிய வண்ணம் மாறுதல்களைத் தோற்றுவிக்கும் ஈடு செய்வி

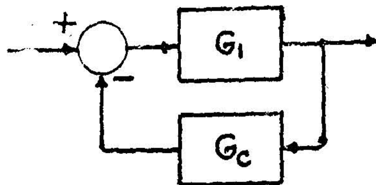
களின் (compensators) அமைப்பு, அவற்றை இணைக்கும் இடம் இவற்றை ஒட்டி ஈடு செய்தலைப் பல வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். இவற்றை அடுத்த பகுதியிற் காணலாம்.

9.1.2 ஈடு செய்தல் வகைகள் (Types of compensation)

ஈடு செய்தலைத் தொடர் ஈடு செய்தல் (series compensation), பின்னூட்டு ஈடு செய்தல் (feedback compensation) என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.



படம் 9.4 தொடர் ஈடு செய்தல்



படம் 9.5 பின்னூட்டு ஈடு செய்தல்

ஈடு செய்வி முன் செல் பாதையில் அமைவது தொடர் ஈடு செய்தல். ஈடு செய்வி பின்னூட்டுப் பாதையில் அமைவது பின்னூட்டு ஈடு செய்தல்.

தொடர் ஈடு செய்தலில் எளிய மின் தடை, தேக்கிகளால் ஆன மின்வலைகளே பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இதன் இலாபம்: எளிமை, சிக்கனம், சிறிய இட அடைவு.

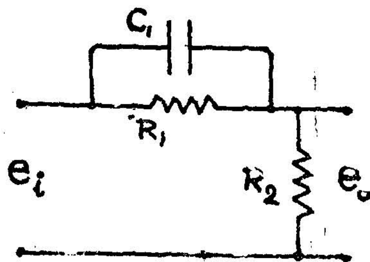
பின்னூட்டு ஈடு செய்தலில், வேக மின்னேற்கி, சமநிலை மின் மாற்றி போன்ற விலை மிக்க உறுப்புக்கள் இடம் பெறுகின்றன. எளிமை, சிக்கனம், சிறிய இட அடைவு போன்ற சிறப்புக்கள் இல்லா விடினும், இடம் ஊட்ட விளைவை இது வெகுவாகக் குறைக்கிறது. மேலும், மிகு திறன் அறிகுறிகள் பின்னூட்டுப்

பாதையில் இல்லை. எனவே ஈடு செய்வியின் ஆக்கத்தில் சிக்கல் இராது.

அடுத்து வரும் பகுதிகளில் தொடர் ஈடு செய்தலிற் பயன் படும் மின் வலைகளின் சிறப்பியல்புகளைக் காணலாம்.

9.1.3 பருவ முந்து மின் வலை (Phase lead network)

ஈட்டப் பருவக் கோணம், ஊட்டப் பருவக்கோணத்தை முந்துவதாகவும், அலைவெண் அதிகமானால் வீச்சு விகிதம் அதிகம் ஆவதாகவும் உள்ளது பருவமுந்து மின் வலை. (படம் 9.6)



படம் 9.6 பருவ முந்து வலை

இதன் சிறப்பியல்புகளை இங்குக் காண்போம். இவை ஈடு செய்விகளின் ஆக்கப் பணியில் பெரிதும் பயன்படும்.

இதன் செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+R_1C_1s}{+\frac{R_2}{R_1+R_2} R_1C_2s}$$

$$\frac{R_1+R_2}{R_2} = \alpha, \quad \frac{R_2}{R_1+R_2}R_1\, C_1 = T, \text{ என்க.}$$

$$\boxed{G_c = \frac{1}{\alpha}\ \frac{(1+\alpha Ts)}{(1+Ts)} = \frac{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}{\left(s+\frac{1}{T}\right)}}$$

$$G_c\,(j\omega) = \frac{1}{\alpha}\ \frac{(1+j\omega\alpha T)}{(1+j\omega T)}$$

$$\theta \quad = \tan^{-1}\omega\alpha T - \tan^{-1}\omega T$$

θ_{max} காண,

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{1}{1+\omega^2\alpha^2T^2}\cdot\alpha T - \frac{1}{1+\omega^2T^2}\cdot T = 0$$

$$\frac{\alpha}{1+\omega^2\alpha^2T^2} = \frac{1}{1+\omega^2T^2}$$

$$1+\omega^2\alpha^2T^2 = \alpha+\omega^2T^2\alpha$$

$$\omega^2T^2\alpha\,(\alpha-1=(\alpha-1)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{T^2\alpha} \qquad \therefore \quad \omega = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

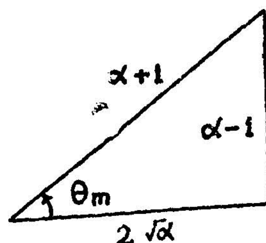
மீப்(பெரிய) பருவக் கோணம் θ_m-க்கு உரிய அலைவெண்

$$\boxed{\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}}$$

$$\theta_m = \tan^{-1}\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}\,.\,T\alpha - \tan^{-1}\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}\,.\,T$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\alpha} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\tan\theta_m = \frac{\sqrt{\alpha}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1+\sqrt{\alpha}\,.\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}$$



படம் 9.7 மீப்பருவக்கோணம்

எனவே,

$$\sin\theta_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$\therefore$ மீப் (பெரிய) பருவக் கோணம் $\boxed{\theta_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$

அட்டவணை 9.1 α, θ_m இடையுறவு

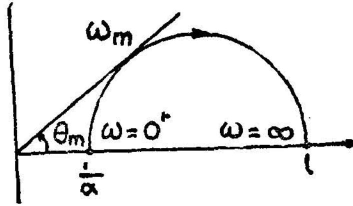
α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
θ_m	0°	20°	30°	37°	42°	46°	49°	52°	54°	56°	57.5°	59°

$$G = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+\omega^2\alpha^2T^2}}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

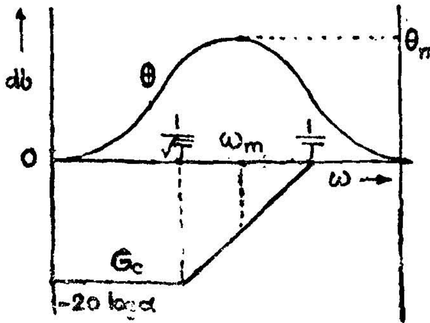
$$G_{\omega m} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

∴ மீப் (பெரிய) பருவக் கோணத்திற்கு உரிய வீச்சு விகிதம்

$$\boxed{G\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$ அல்லது $$\boxed{G\omega_m = -10 \log \alpha}$$ டெசிபல்



படம் 9.8 பருவ முந்து வலை கோணத்தூரப்படம்



படம் 9.9 பருவ முந்து வலை-போடே படம்

பருவ முந்து வலையில்,

1. ஒரு முந்து பருவக் கோணத்தைப் பெற முடிகிறது.

2. மாறிலி α-வைப் பொருத்து அதன் மீப் பெரிய பருவக் கோணம் மாறுகிறது.

3. $\omega = 0$ எனில் $G_c = \frac{1}{\alpha}$ அல்லது $-20 \log \alpha$ டெசிபல்

$\omega = \omega_m$ எனில் $G_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ அல்லது $-10 \log \alpha$ டெசிபல்

$\omega = \infty$ எனில் $G_c = 1$ அல்லது 0 டெசிபல்

4. ஆயப் புள்ளியில் இருந்து, பேரெண் $\frac{1}{T}$, சுழி எண் $\frac{1}{\alpha T}$ ஐ விட அதிக தூரத்தில் இருக்கிறது.

பருவ முந்து வலையின் சிறப்பியல்புகள் :

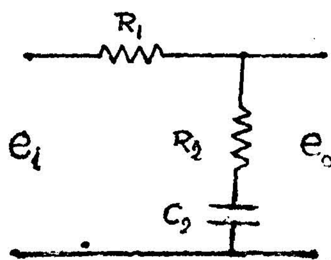
1. முந்து பருவக் கோணத்தால் ஈடு செய்கிறது.
2. அலைவரிசை அகலத்தை அதிகப் படுத்துகிறது.
3. பருவ, பெருக்க நிறைவெல்லைகளை அதிகப் படுத்துகிறது.

9.1.4 பருவந்தாழ் மின் வலை (Phase lag network) :

ஈட்டப் பருவக் கோணம், ஊட்டப் பருவக் கோணத்திற்குப் பிந்தியும், அலைவெண் அதிகமானால், குறையும் வீச்சு விகிதமும் உள்ளது பருவந்தாழ் மின் வலை. (படம் 9.10)

இதன் செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1 + R_2 C_2 s}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} R_2 C_2 s}$$



படம் 9.10 பருவ தாழ்வலை

$\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \alpha$, $R_2 C_2 = T$, என்க.

$$G_c = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)}$$

$$G_c(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T}$$

$$\theta = \tan^{-1}\omega T - \tan^{-1}\omega\alpha T$$

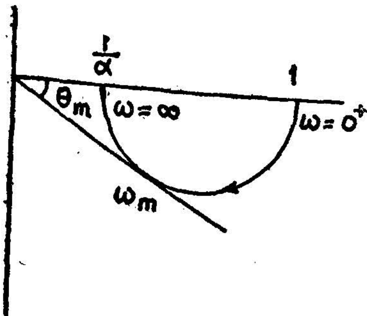
$\frac{d\theta}{d\omega} = 0$ எனப் பிரதியிட, $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

இதை θவில் பிரதியிட, $\theta_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

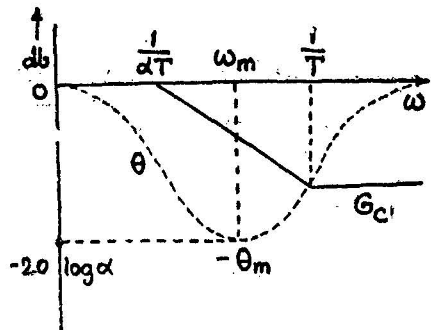
θ_m, α இவற்றின் இடையுறவை அட்டவணை 9.1இல் காண்க.

$G\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ அல்லது $G\omega_m = -\log\alpha$ டெஸிபல்

பருவந் தாழ் வலையின் கோண தூரப் படமும், போடே படமும் கீழே காட்டப் பட்டுள்ளன.



படம் 9.11 பருவம்தாழ் வலை கோண தூரப் படம்



படம் 9.12 பருவம் தாழ் வலை போடே படம்

பருவந் தாழ் வலையில்

1. தாழ் பருவக் கோணம் கிடைக்கிறது.

2. மாறிலி α-வைப் பொருத்து மீப் பெரிய தாழ் பருவக் கோணம் மாறுகிறது.

3. $\omega = 0$ எனில் $G_c = 1$ அல்லது 0 டெசிபல்

$\omega = \omega_m$ எனில் $G_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ அல்லது $-10 \log \alpha$ டெசிபல்

$\omega = \infty$ எனில் $G_c = \frac{1}{\alpha}$ அல்லது $-20 \log \alpha$ டெசிபல்

4. ஆயப் புள்ளியில் இருந்து, சுழியெண் $\frac{1}{T}$, பேரெண் $\frac{1}{\alpha T}$ ஐ விட அதிகத் தூரத்தில் இருக்கிறது.

பருவந் தாழ் வலையின் சிறப்பியல்புகள் :

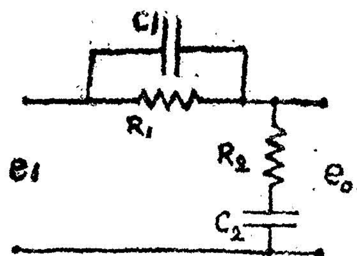
1. பெரிய அலைவெண்களிற் குறைப் பெருக்கத்தைத் (attenuation) தருவதால், வீச்சு குறைந்து ஈடு செய்கிறது.

2. அலை வரிசை அகலத்தைக் குறைக்கிறது.

3. வலிவுடைக் காலமாறிலியை மேலும் பெரிதாக்குகிறது.

4. சிறிய அலைவெண்களிலேயே சுழிப் பேரெண்களைப்பெற்று குறைந்த பருவத் தாழ்வையே புகுத்துகிறது.

9.1.5 பருவ முந்து—தாழ் மின் வலை (Phase Lead-lag network)



படம் 9.13 முந்து தாழ் வலை

சிறிய அலைவெண்களுக்குப் பருவந்தாழ் வலையைப் போன்றும் பெரிய அலைவெண்களுக்குப் பருவ முந்து வலையைப் போன்றும் செயற்படுவது பருவ முந்து-தாழ் வலை. (படம் 9.13)

இதன் செலுத்துச் சார்பு

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{(1+R_1C_1\,s)\,(1+R_2C_2s)}{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\,s+R_1C_1R_2C_2s^2}$$

$$= \frac{(1+T_2s)\,(1+T_3s)}{(1+T_1s)\,(1+T_4s)}$$

இங்கு $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$

$$T_1T_4 = T_2T_3$$

அதாவது,

$$T_1 = a\,R_1C_1$$

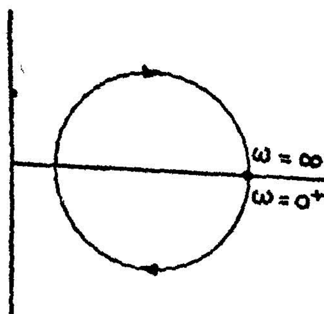
$$T_2 = R_1C_1$$

$$T_3 = R_2C_2$$

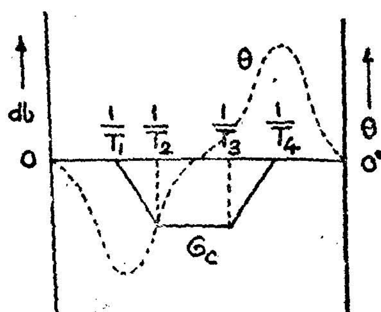
$$T_4 = \frac{1}{a}\,R_2C_2$$

$$a > 1$$

இதன் அலை விளைவுப் படங்கள் வருமாறு :



படம் 9.14 முந்து-தாழ் வலை கோண தூரப் படம்



படம் 9.15 முந்து-தாழ் வலை போடே படம்

இதில் $\frac{(1+T_2s)}{(1+T_1s)}$ என்ற பகுதி பருவந்தாழ் வலையாகவும், $\frac{(1+T_3s)}{(1+T_4s)}$ என்ற பகுதி பருவமுந்து வலையாகவும் செயற் படுகின்றன. எனவே இரண்டின் சிறப்பியல்புகளையும் இதிற்

காணலாம். சிறப்பாக, இது அலை வரிசை அகலத்தை மாற்றாமலேயே, ஈடு செய்ய உதவுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட ஆள்குலையின் அமைப்பு, செயற் குறிப்புகள் இவற்றில் இருந்து எவ்வகை ஈடு செய்வி தேவை என அறியலாம். இது பற்றி விரிவாக அடுத்த பகுதியில் காண்போம்.

9.2 தொடர் ஈடு செய்தல்:

9.2.1 தொடர் ஈடு செய்தல் அறிமுகம்:

ஒரு மின் பிரித்தியைக் கொண்டு, எல்லா அலைவெண்களிலும், ஒரே அளவு பெருக்க எண்ணைக் குறைப்பதே, குறைப் பெருக்கல் முறை (Attenuation method) அல்லது பெருக்க ஈடுசெய்தல் (gain compensation) எனப்படும்.[1]

ஒரு முந்து வலையைக் (lead network) கொண்டு, வீச்சுக் கடப்பு அலைவெண்ணுக்கு அருகில், பருவமுந்து கோணத்தைச் சேர்த்தல் முந்துவலை ஈடு செய்தல் (Lead network compensation) ஆகும்.

ஒரு தாழ்வலையைக் (lag network) கொண்டு, பெரிய அலைவெண்களில் பெருக்க எண்ணைக் குறைத்தல் தாழ்வலை ஈடு செய்தல் (Lag compensation) எனப்படும்.

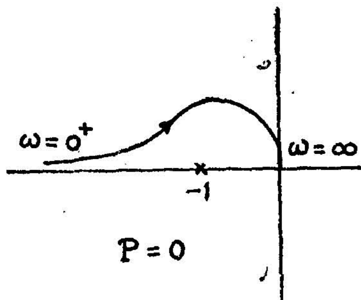
இம் மூன்று வகைகளும் சேர்ந்தும் செயற்படலாம். இவ்வாறு வருவதே முந்து தாழ்வலை ஈடுசெய்தல் (Lead lag compensation) ஆகும்.

இவை யாவும் தொடர் ஈடு செய்தலில் அடங்குவன. அலைவிளைவு முறை (frequency response method), மூலப்பாதை முறை (root locus method) ஆகிய இரண்டு வழிகளிலும் ஈடு செய்வியை ஆய்தலும் ஆக்கலும் இயலும். இருப்பினும், விரிவஞ்சி முன்னதை மட்டுமே இங்கு விளக்கப் புகுவோம்.

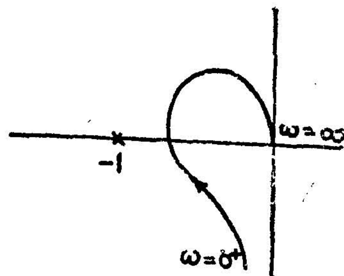
அலை விளைவு முறையின் பின்னணி வருமாறு: எடுத்துக்காட்டுக்குப் படம் 9.16, 9.17இல் உள்ள குலை அலைவிளைவுகளில் இருந்து தொடங்குவோம்.

இவ் இரு குலைகளிலும் பருவ நிறைவெண் 45° இருக்கவேண்டும் என்க.

இவற்றிற்கு எவ்வகை ஈடுசெய்தல் பயன்தரும் என்று முதலில் அறியவேண்டும். பின், ஈடு செய்வியின் அமைப்பைக் கணிக்கலாம்.



படம் 9.16 குலை அலை விளைவு 1



படம் 9.17 குலை அலை விளைவு-2

படம் 9.16-இல் உள்ள குலை நிலையுறுதி அற்றது. எனவே, K-ஐ குறைத்தோ, பருவந்தாழ் வலையைக் கொண்டோ எந்த முன்னேற்றமும் காண இயலாது. தக்க, பருவமுந்து வலை ஒன்றை இணைப்பதன் வழி, $\phi_m = 45°$ பெறலாம். இங்கு ஈடு செய்வி ஒரு பருவ முந்து வலை.

படம் 9 17-இல் உள்ள குலை நிலையுறுதி உடையது. ϕ_m ஏறத்தாழ $90°$ உள்ளது. K-ஐ அதிகம் ஆக்குவதாலோ, பருவ முந்து வலை ஒன்றை இணைப்பதாலோ, $\phi_m = 45°$ ஆகிவிடாது. ஒரு பருவந்தாழ் வலையே இதைக் கைகூட வைக்கிறது. பெரிய அலைவெண்களில் குறைப் பெருக்கம் தோன்றுவதால், குலையின் நிலையுறுதிக்கும் இடர் இராது.

இவ்வாறு எவ்வகை ஈடு செய்வியைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதைக் கோணதூரப் படத்தில் இருந்து அறிகிறோம். ஆனால் ஈடு செய்வியின் ஆக்கம்பற்றி இப் படம் வெளிப்படையாக எதையும் காட்டவில்லை. மாறாக, போடே படத்தில் இருந்து ஈடு செய்வியின் அமைப்பை எளிதில் உணர்தல் இயலும். இது எங்ஙனம் என்பது அடுத்துவரும் பகுதிகளிற் தெளிவாகும்.

9.2.2 பருவ முந்து ஈடு செய்தல் (Phase lead compensation)

பருவமுந்து ஈடு செய்தலில் நான்கு படிகள் உண்டு :

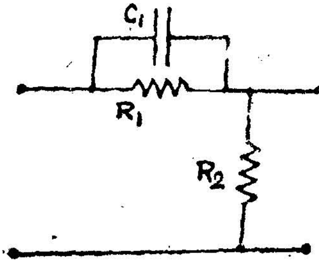
1. தேவையான முந்து பருவக் கோணத்தைக் கணித்தல்;

2. தேவைக்கு ஏற்ப மீப் பெரிய முந்து கோணத்தைத் தரும் மாறிலி α வை அறிதல்;

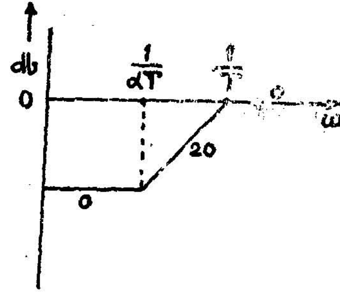
3. பிறகு, வீச்சுக் கடப்பு அலைவெண்ணில் மீப்பெரிய கோணம் வருமாறு, மின்வலைக் காலமாறிலி T-ஐ கணித்தல்;

4. R_1, R_2, C_1 இவற்றின் மதிப்புக்களைக் காணல்·

ஓர் அடிப்படைப் பருவமுந்து வலையும் அதன் வீச்சுப் படமும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 9.18 பருவம் முந்துவலை



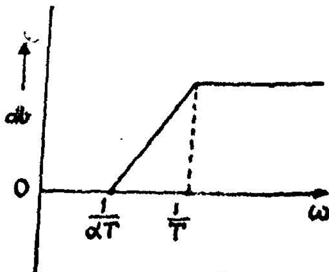
படம் 9.19 போடே வீச்சுப் படம் (முன் பெருக்கி இல்லாமல்)

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

$$\alpha = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

$$T=\frac{R_2}{R_1+R_2} R_1C_1$$

இம் மின்வலை $\frac{1}{\alpha}$ என்ற குறைப் பெருக்கத்தைத் (attenuation) தருவதால், இதை ஈடுசெய்ய α என்ற பெருக்க எண்ணை உடைய ஒரு முன் பெருக்கியையும் அமைக்கவேண்டும். இவை இரண்டையும் இணைத்து விட்டால் பின்வரும் வீச்சுப் படம் கிடைக்கிறது.



படம் 9.20 போடே வீச்சுப்படம் (முன் பெருக்கியுடன்)

அடுத்துவரும் பகுதிகளில் இதையே முந்துவலை ஈடு செய்வியின் வீச்சுப் படமாகக் கொள்வோம். அதாவது, α என்னும் பெருக்க எண்ணைத் தரும் முன் பெருக்கி, எப்பொழுதும் முந்துவலையுடன் சேர்ந்தே இருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

வேண்டாத் தேவையாகிய (necessary evil) இம் முன் பெருக்கியே (preamplifier), பருவ முந்து ஈடு செய்தலின் குறை ஆகும்.

ஆக்கப் பணியில் α-வைக் குறைப்பதற்கு, ϕ_m-ஐ கணக்கிடும் ω_c-இல், θ_m வருமாறு வலை மாறிலிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

பருவ முந்து ஈடுசெய் ஆக்கப் பணிப் படிகள் வருமாறு :

(அ) θ_m காணல் :

1. குறிப்பிட்ட கடைநிலை வழுவிற்கு ஏற்ப, K-யின் மதிப்பைக் காண்க.

2. போடே படம் வரைந்து, பருவ நிறைவெண் ϕ_m-ஐ கணிக்க.

3. தேவையான ϕ_m கிடைக்க, இத்துடன் எவ்வளவு பருவ முந்து கோணம் கூட்டப்பட வேண்டும் என்று அறிக.

4. பருவமுந்து மின் வலைய ஆள்குலையில் நுழைப்பதால், வீச்சுக் கடப்பு அலைவெண் அதிகமாகிறது. இதனால் ϕ_m-இல் ஏற்படும் மாறுதலை ஈடு செய்ய 10% கூட்டிக் கொள்க. எனவே, θ_m= தேவையான பருவமுந்து கோணம் + அதில் 10%.

(ஆ) α காணல் :

5. $\sin\theta_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$. இதில் இருந்து α-வைக் கணிக்க.

இதை முழு எண்ணாக்க நேரின், அடுத்த பெரிய எண்ணையே கொள்க.

(இ) T காணல் :

6. ω_m-இல் வலையின் வீச்சு விகிதம் 10 log α டெசிபல். இந்த அளவு, ஆள்குலையின் வீச்சுப் படம் நகர்த்தப்படுவதால் ஈடு செய்யாப் படத்தில் ω_c நகர்ந்து $-10\log\alpha$ டெசிபல் என்ற வீச்சுக்கு நேர் இருக்கும். இதன் வழி ω_c^1-ஐ அறியலாம்.

7. பருவக் கடப்பு அலைவெண்ணில் மீப்பெரிய கோணம் வருமாறு அமைப்பதால், $\omega_c^1 = \omega_m$. இதில் இருந்து,

$$T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$$

(ஈ) வலை அமைப்பு :

8. $G_c = \dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$

$\alpha = \dfrac{R_1+R_2}{R_2}$; $T = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} R_1C_1$

$R_1C_1 = \alpha T$

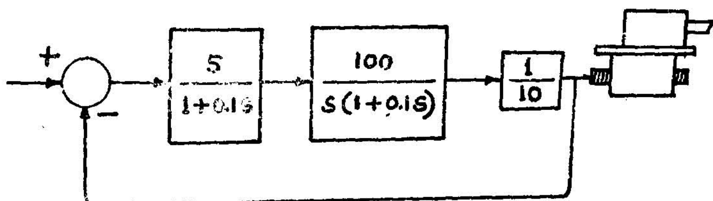
$C_1 = 0.1 \mu F$ என்க.

இதில் இருந்து, $R_1 = \dfrac{\alpha T}{C_1}$

$\alpha = \dfrac{R_1}{R_2} + 1 \therefore R_2 = \dfrac{R_1}{\alpha - 1}$

மாதிரி வினா 9.1

ஒரு கடைசற் பொறியின் உளித் திருப்ப ஆள்குவையைக் கீழே காண்க. ஒருமை வேக ஊட்டக் கடைநிலை வழு 1% எனவும், உச்ச விலக்கம் ≃ 2% எனவும் இருக்க வேண்டும் எனில் அதற்குத் தக்க ஈடு செய்வி ஒன்றைப் புனைக.



படம் 9.21 கடைசற் பொறியின் உளித் திருப்ப ஆள்குவை.

தீர்வு :

ஒருமை வேக ஊட்டக் கடை நிலை வழு $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$. (வேகவழு மாறிலி)

$e_{ss} = 1\% = 0.01$. எனவே $K_v = 100$

$$G(s) = \frac{50}{s(1+0.1s)^2}$$

$K_v = \lim_{s\to 0} s.\dfrac{K}{s(1+0.1s)^2} = K = 100$

கொடுத்துள்ள $K = 50$. எனவே, இதை இரு மடங்காக்க வேண்டும்.

ϕ_m காணல் 1 $G(s) = \dfrac{100}{s(1+0.1\,s)^2}$

$$G = \frac{100}{\omega_c(1+0.01\,\omega_c^2)} = 1$$

$$\omega_c\left(1+\frac{\omega_c^2}{100}\right) = 100$$

$\omega_c = 20$ என்க. இடது புறம் $= 20\left(1+\dfrac{400}{100}\right) = 100$

எனவே, $\omega_c = 20$

$$\phi_c = -90^\circ - 2\tan^{-1}0.1\,\omega_c$$

$$= -90^\circ - 2\tan^{-1}0.1\times 20 = -217^\circ$$

$$\phi_m = 180+\phi_c = -37^\circ$$

தேவையான ϕ_m:

$$M_0 = 100\,e^{-\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}} = 2$$

இதில் இருந்து $\delta = 0.8$

δ, ϕ_m உறவில் இருந்து $\phi_m = 70^\circ$ (படம் 7.7)

எனவே, தேவையான பருவ முந்து கோணம்

$$= 37^\circ + 70^\circ = 107^\circ$$

$\therefore\ \theta_m = 107^\circ + 8^\circ = 115^\circ$, என்க.

θ_m வெகு அதிகமாக இருப்பதால், இரண்டு பருவ முந்து வலை களைத் தொடர் இணைப்பில் கொள்ளலாம். அப்பொழுது,

$2\theta_m = 115^\circ$; எனவே $\theta_m = 57.5^\circ$

α காணல் 1

$$\theta_m = \sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 57.5^\circ$$

எனவே $\alpha = 11$.

T காணல் :

$$\text{அலைவெண் } \omega = \omega_m \text{ எனில் } G = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{100}{\omega\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)} = \frac{1}{11}$$

$$\text{அல்லது, } \omega\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right) = 1100$$

$\omega = 10u$ என்க.

$u\,(1+u^2) = 100$

$u = 5$ என்க. இடது புறம் $= 5\,(1+25) = 130$

$u = 4.75$ என்க. இடதுபுறம் $= 4.75(1+22.6) = 112$

$u = 4.72$ என்க. இடது புறம் $= 4.72\,(1+22.4) \simeq 110$

$\therefore\ u = 4.72; \qquad \omega = 47.2$

$$\frac{1}{T} = \omega_m\sqrt{\alpha} = 47.2\sqrt{11} = 156$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{156}{11} = 14.2$$

$$\therefore\ G_c = \frac{\left(s+\frac{1}{\alpha T}\right)^2}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2} = \frac{(s+14.2)^2}{(s+156)^2}$$

வலை அமைப்பு : (படம் 9.6)

$c_1 = 0.1 \quad \mu F$ என்க.

$$R_1C_1 = \alpha T \quad \therefore\ R_1 = \frac{\alpha T}{C_1} = \frac{1/14.2}{0.1\times10^{-6}} = 70.5\times10^8 \text{ ஓம்.}$$

$$\alpha = \frac{R_1+R_2}{R_2}$$

எனவே $R_2 = \frac{R_1}{\alpha - 1} = \frac{70.5 \times 10^3}{11 - 1} = 7.05 \times 10^3$ ஓம்.

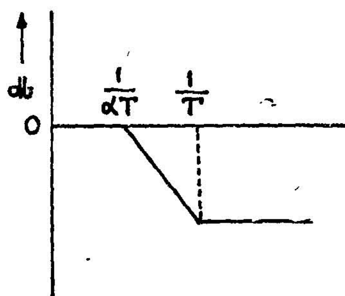
$R_1 = 70$ கிலோ ஓம்

$R_2 = 7$ கிலோ ஓம்

$C_1 = 0.1$ மைக்ரோ ஃபாரடு

9.2.3 பருவந்தாழ் ஈடுசெய்தல் (phase lag compensation) :

ஓர் அடிப்படை பருவந்தாழ் மின் வலையையும் அதன் வீச்சுப் படத்தையும் முறையே படம் 9.10, படம் 9.22 ஆகியவைகளில் காண்க



படம் 9.22 பருவம் தாழ் வலை-போடே வீச்சுப் படம்

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$

பருவந்தாழ் வலையில் பெரிய அலைவெண்களில் ஏற்படும் வீச்சுக் குறைவால் ஈடு செய்தல் முடிகிறது. இதனால் தோன்றும் பருவந் தாழ் கோணம் மிகவும் குறைவாக இருக்கவே, இதன் பேரெண், சுழியெண்கள் மிகச் சிறியனவாகத் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன.

பருவந்தாழ் ஈடுசெய் ஆக்கப் பணிப் படிகள் வருமாறு :

(அ) $\omega_c{}^1$ காணல் :

1. குறிப்பிட்ட கடைநிலை வழுவிற்கு ஏற்ப, Kயின் மதிப்பைக் காண்க.

2. ஆள்குவையின் போடே படத்தை வரைந்து, பருவ நிறைவெண் ϕ_m —ஐ கணிக்க.

3. மின் வலை புகுத்தும் தாழ்கோணம் 5° எனக் கொண்டால் $\phi_c^1 = (\phi_m+5°) - 180°$. இதற்கு உரிய அலைவெண்ணே ω_c^1—

(ஆ) α காணல் :

4. ω_c^1 கடப்பு அலைவெண்ணாக இருக்க வேண்டும் என்றால் அங்கு வீச்சு 0 டெசிபல் ஆக வேண்டும். இதற்குத் தேவையான குறைப் பெருக்கம் (attenuation) $-20 \log \alpha$ டெசிபல். ω_c^1 இல் உள்ள வீச்சை $20 \log \alpha$-க்குச் சமப் படுத்த, α கிடைக்கும்.

(இ) T காணல் :

5. ω_c^1—க்கு ஒரு பதிமம் (decade) முன் ஈடு செய்வியின் சுழி யெண்ணைக் கொள்க.

$$z = \frac{\omega_c^1}{10}, \text{ எனவே } p = \frac{\omega_c^1/10}{\alpha}$$

$$\text{அதாவது } T = \frac{10}{\omega_c^1}, \ \alpha T = \frac{10}{\omega_c^1}\alpha$$

(ஈ) வலை அமைப்பு :

$$R_2 C_2 = T$$

$$C_2 = 0.1\ \mu F \text{ என்க.}$$

$$R_2 = \frac{T}{C_2}$$

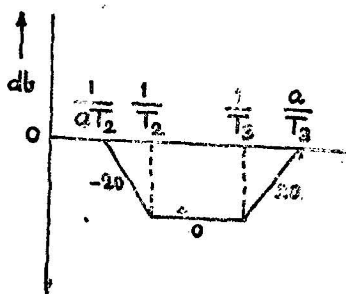
$$\alpha = \frac{R_1+R_2}{R_2}, \text{ எனவே } R_1 = (\alpha-1)\ R_2.$$

9.2.4 பருவ முந்து-தாழ் ஈடு செய்தல் (phase lead-lag compensation)

பருவ முந்து வலை ஈடு செய்வி பொதுவாக, ஆள்குவையின் உயர் நேரம் (rise time), உச்ச விலக்கம் (maximum overshoot) ஆகியவற்றின் தரத்தை உயர்த்துகிறது ; ஆனால் அத்துடன் அலை வரிசை அகலமும் அதிகமாகிறது. பருவந்தாழ் வலை ஈடு செய்வி யில் கடை நிலை விளைவு (steady state response). அல்லது நிலை யுறுதியின் தரம் உயர்கிறது. ஆனால் அலை வரிசை அகலம் குறைவ தால் உயர்நேரம் (rise time) அதிகமாகிறது.

இனி, பருவ முந்து தாழ் வலைகளை இணைப்பதால் இரண்டின் நற்பண்புகளும் கூடிவருகின்றன. சில வேண்டாப் பண்புகளும் மறைந்து போகின்றன.

எனவே தனியாகப் பருவ முந்து ஈடுசெய்வியோ, பருவந்தாழ் ஈடுசெய்வியோ பயன்படுத்தப் பட முடியாத இடங்களில் முந்து-தாழ் ஈடு செய்வி (படம் 9.13) சிறப்புறச் செயற்படுகிறது.



படம் 9.23 பருவமுந்து தாழ்வலை போடே வீச்சுப் படம்

இதன் ஆக்கப் பணிக்கு வரையறுக்கப் பட்ட வழி முறைகள் இல்லை. பிழைத் திருத்தல் முறையிலேயே இது கணிக்கப் படுகிறது.

$$T_1 = aR_1C_1 \qquad a > 1$$
$$T_2 = R_1C_1 \qquad T_2 > T_3$$
$$T_3 = R_2C_2$$
$$T_4 = \frac{1}{a} R_2 C_2$$

கொடுத்துள்ள குவைக்குத் தனித்தனியாக பருவ முந்து ஈடு செய்வியையும், பருவந்தாழ் ஈடு செய்வியையும் தேர்ந்தெடுத்து, அவற்றை இணைத்து, பருவ முந்து-தாழ் ஈடு செய்வியைக் காண லாம்.

எனவே, இதன் நிலைப் பெருக்க எண் K, பருவமுந்து ஈடு செய்வியின் பெருக்க எண் K_1, பருவந்தாழ் ஈடுசெய்வியின் பெருக்க எண் K_2 இவற்றின் பெருக்கற் பலனாக இருக்கும். மேலும் ω_p—இன் மதிப்பு, பருவமுந்து ஈடுசெய்வியினால் கிடைக்கும் மதிப்பிற் சிறிதே குறைந்து இருக்கும்.

அதாவது, பருவந்தாழ் ஈடுசெய்வியில் கிடைப்பதை விட மிக அதிகமான பெருக்கமும் (gain), பருவ முந்து ஈடு செய்வியில் கிடைக்கும் அளவு அதிக ஒத்திசை அலைவெண்ணும் (resonant frequency) முந்து-தாழ் ஈடுசெய்வியிற் கிடைக்கும்.

முந்து-தாழ் ஈடுசெய்வியின் ஆக்கப் படிகள் வருமாறு :

1. கொடுக்கப் பட்டுள்ள. K_v அல்லது M_p இன் மதிப்பிற்கு ஏற்ப, நிலைப் பெருக்க எண் K இன் மதிப்பு அறியப்படுகிறது. போடே படம் வரையப் படுகிறது.

2. தனித் தனியாக பருவமுந்து, பருவந்தாழ் ஈடுசெய்விகள் கணிக்கப்பட்டு, முன்னதன் $1/a$, இரண்டாவதன் a-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு இணைக்கப் படுகின்றன.

9.2.5 மூவகைத் தொடர் ஈடு செய்விகளின் ஒப்புமை (comparison among the three types of series compensators)

(அ) பருவ முந்து ஈடு செய்வி :

1. ஈடுசெய்யப் பட்ட குவையில் K ஓரளவு அதிகமாவதால் கடை நிலை விளைவின் தரம் உயர்கிறது.

2. ஒத்திசை அலைவெண் ω_p மிகவும் அதிகமாகிறது. இதனால் படியும் நேரமும், இடைநிலை அலைவுகளும் வெகுவாகக் குறைகின்றன.

3. ஈடுசெய் வலையால் ஏற்படும் குறைப் பெருக்கத்தைத் தவிர்க்க இணைக்கப் படும் முன் பெருக்கியின் பெருக்க எண் A, அதிகப் படியாகும்.

(ஆ) பருவந்தாழ் ஈடு செய்வி :

1. ஈடு செய்யப் பட்ட குவையில் Kயின் மதிப்பு மிகவும் அதிமாகிறது. இதனால் கடைநிலை வழு மிகச் சிறியதாகிறது.

2. ஒத்திசை அலைவெண் ω_p குறைகிறது. இதனால், படியும் நேரம், இடை நிலை அளவுகள் இவை அதிகம் ஆகின்றன.

(இ) பருவ முந்து-தாழ் ஈடு செய்வி :

பொதுவாக முன்னிரண்டு வகைகளின் சிறப்புக்களையும் ஒருங்கே பெற்றுள்ளது.

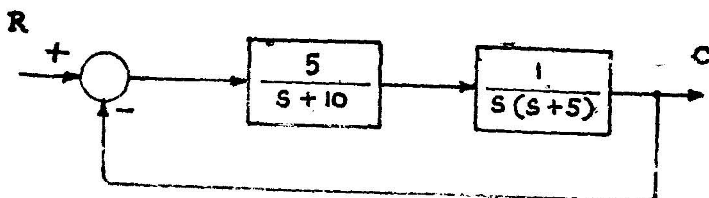
1. ஈடு செய்யப் பட்ட குவையில் Kயின் மதிப்பு மிகவும் அதிகமாகிறது. இது கடை நிலை விளைவின் தரத்தை உயர்த்துகிறது.

2. ஒத்திசை அலைவெண் ω_p மிகவும் அதிகமாகிறது. இது படியும் நேரத்தைக் குறைத்து, இடைநிலை விளைவின் தரத்தை உயர்த்துகிறது.

இதுவரை நாம் கண்டவை 'ஈடுசெய்தல்' என்னும் பெரிய தலைப்பின் கீழ் ஒரு சிறு பகுதியே. மூலப்பாதை முறையிலும் ஈடு செய்விகளைக் கணிக்கலாம். பின்னூட்டு ஈடுசெய்தல் பிறிதொரு பெரும் வகுப்பாகும்.

மாதிரி வினு 9.2

கீழ்க் காணும் ஆள்குவையில், வேக வழு மாறிலி $K_v = 30$, பருவ நிறைவெண் $\phi_m \leqslant 40^\circ$ இருக்க வேண்டும் எனில் தேவையான பருவந் தாழ் ஈடு செய்வியை வருவிக்க.



படம் 9.24 பின்னூட்டு ஆள்குவை

தீர்வு :

$$G(s) = \frac{5}{s(s+5)(s+10)} = \frac{0.1}{s(1+0.2s)(1+0.1s)}$$

$$= \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.1s)}, \text{ என்க.}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = K = 30$$

(மூலத்தில் "lim" என்பதற்குப் பதிலாக "எல்லை" என அச்சிடப்பட்டுள்ளது.)

$$\therefore\ G(s) = \frac{30}{s(1+0.2s)(1+0.1s)}$$

$$G = \frac{30}{\sqrt{\omega^2(1+0.04\omega^2)(1+0.01\omega^2)}}$$

$$\phi = -90^\circ - \tan^{-1}0.2\,\omega - \tan^{-1}0.1\,\omega$$

ϕ_m காணல் :

$$G = \frac{30}{\sqrt{\omega^2(1+0.04\omega^2)(1+0.01\omega^2)}} = 1, \text{ என்க.}$$

$$\omega^2(1+0.04\omega^2)(1+0.01\omega^2) = 900$$

$\omega^2 = 100$; இடது புறம் $= 1000$

$\omega^2 = 95$; இடது புறம் $= 890$

$$\omega^2 \simeq 95 \quad \omega = \sqrt{95} = 9.75$$

$$\phi = -90^\circ - \tan^{-1}0.2\times 9.75 - \tan^{-1}0.1\times 9.75$$

$$= -197^\circ$$

$$\phi_m = 180+\phi = -17°; \text{ தேவையான } \phi_m = 40°$$

$$\phi_c{}^1 = (\phi_m+5) - 180° = -135°$$

$$-90°-\tan^{-1} 0.2\omega_c{}^1-\tan^{-1} 0.1\, \omega_c{}^1 = \phi c^1=-135°$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} 0.2\, \omega^1{}_c+\tan^{-1} 0.1\, \omega^1{}_c=45°$$

பிழைத் திருத்த முறையில் தீர்வு காண, $\omega_c{}^1 \simeq 2.8$

$\omega_c{}^1 = 2.8$ என்கையில்,

$$G = \frac{30}{\sqrt{28^2\,(1+0.04\times2.8^2)(1+0.01\times2.8^2)}} = 9$$

$$= 20 \log 9 \text{ டெசிபல்} = 19.08 \text{ டெசிபல்}$$

$$-20\log \alpha = -19.08$$

$$\log \alpha = +0.954 \quad ஃ \quad \alpha=9$$

[இதை நேரடியாக, Gயில் இருந்து $\alpha=G=9$ என்றும் எழுதலாம்].

$\omega_c{}^1$க்கு ஒரு பதிமம் முன் ஈடு செய்வியின் சுழியெண் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

$$z = \frac{\omega_c{}^1}{10} = \frac{2.8}{10} = 0.28$$

$$p = \frac{z}{\alpha} = \frac{0.28}{\alpha} = 0.031$$

$$T = \frac{1}{z} = 3.58$$

$$\alpha T = \frac{1}{p} = 32.3$$

$$\therefore \quad G_c(s) = \frac{(1+3.58s)}{(1+32.3s)}$$

$$R_2C_2 = T = 3.58$$

$C_2 = 0.1\ \mu F$ என்க,

$$R_2 = \frac{3.58}{0.1} = 35.8\ M\Omega$$

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$\therefore\ R_1 = (\alpha - 1)\ R_2 = 286\ M\Omega$$

பயிற்சி 9

9.1 ஒரு பருவந்தாழ் வலையில் தோன்றும் மீப் பெரிய தாழ் பருவக் கோணம், அதற்கு உரிய வீச்சு விகிதம் இவற்றை வருவிக்க.

9.2 ஒரு பின்னூட்டு ஆள்குலையில் $GH(s) = \frac{K}{s(s+5)^2}$ இதன் பெருக்க நிறைவெண் $G_m \geqslant 2$, பருவ நிறைவெண் $\phi_m \geqslant 45°$ ஆக இருக்கவேண்டும் எனில் Kயின் மிகப் பெரிய மதிப்பு என்ன ?

9.3 ஒரு முழுப் பின்னூட்டு ஆள்குலையில் $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ இதில் பருவ நிறைவெண் $\phi_m \geqslant 45°$, வேக வழுமாறிலி $K_v = 10$ ஆக இருக்க, ஒரு பொருத்தமான பருவமுந்து ஈடு செய்வியைப் புனைக.

9.4 ஓர் ஆள்குலையின் $G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.001s)}$ $H(s) = 1$. $K_v \geqslant 1000$, $\phi_m \geqslant 45°$ ஆகிய செயற் குறிப்புக் களுக்கு ஏற்ப ஒரு பருவமுந்து ஈடுசெய் வலையை வருவிக்க.

9.5 அடிமைக் குலை ஒன்றின் சுற்று செலுத்துச் சார்பு $GH(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)^2}$; இதில் $K_v = 20$, $\delta = 0.707$ என்பவை செயற் குறிப்புக்கள். பொருத்தமான பருவந்தாழ் ஈடுசெய் வலை ஒன்றை வருவிக்க. (குறிப்பு $\delta = 0.707$ எனில் $\phi_m = 65°$)

பயிற்சிகளுக்கு விடைகள்

பயிற்சி 1

1.14 $A = -1.6\times10^{-4} \quad B=5\times10^{-4}$

1.15 $h = 0.9$

1.16 $K_a = 100$

பயிற்சி 2

2·1 $R_1 i_j + \frac{1}{c_1} D^{-1}(i_1 - i_2) = e$

$$(R_2 + L_2 D + \frac{1}{C_1} D^{-1}) i_2 - \frac{1}{C_1} D i_1 = 0$$

2.2 $C_1 D(e_1 - e) + \frac{1}{R_1}(e_1 - e_2) + \frac{1}{L} D^{-1} e = 0$

$$\frac{1}{R_2}(e_2 - e) + \frac{1}{R_1}(e_2 - e_1) + C_2 D e_2 = 0$$

2.3 (அ) $(M_2 D^2 + B_2 D + K_2) y_2 + K_1 (y_2 - y_1) = f(t)$

$$K_1 (y_2 - y_1) = M_1 D^2 y_1$$

(ஆ) $\frac{l_2}{l_1}(MD^2 + BD + K)\, y = f(t)$

2.4 (அ)
$$(J_1 D^2 + B_1 D + B_c D)\,\theta_1 - B_c D \theta_2 = T$$
$$(B_2 D + B_c D + K)\theta_2 - (B_c D \theta_1 + K\theta_3) = 0$$
$$(J_3 D^2 + K_c)\,\theta_3 - K_c\,\theta_2 = 0$$

(ஆ)
$$(J_2 D^2 + B_3 D + K_1 + K_2 + B_1 D)\,\theta_2 - B_1 D \theta_1 = T$$
$$B_1 D(\theta_2 - \theta_1) = (J_1 D^2 + B_2 D)\theta_1$$

2.5 0.906×10^{-3} நியூட்டன்-மீட்டர்

2.6 $(D^2+12D)x_1-12Dx_2=8$

$12D(x_1-x_2) \qquad = 144x_2$

$v=0.667$ மீட்டர்/நொடி

2.7 $e=(R+LD)i$

$K_s i=(M_1D^2+B_1D)y_1$

$\frac{l_1}{l_2} K_s i = (M_2D^2+B_2D+K_2)y_2$

2.8 $(R_c+L_cD)(R_g+R_f+\overline{L_g+L_f}D)(JD^2+BD)\theta$
$$=K_gK_te_c$$

2.9 $R_a[J_m+n^2J_L)D^2+(B_m+n^2B_L)D]\theta_t+$
$$K_bK_tD\theta_m=K_te_a$$

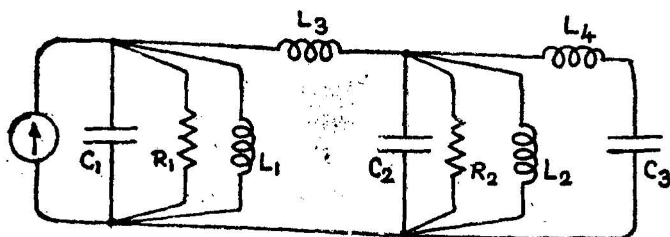
2.10 $(1+RCD)M_1D^2+B_1D+K_1)(JD^2+BD+K)\ \theta$
$$=K_sK_vK_c(B_1D+K_1)y_1$$

2.11 $\Big[(R_c+L_cD)(R_q+L_qD)\Big\{(R_a+R_d)+(L_a+L_d)D\Big\}$
$$(JD^2+BD)+K_bK_tD\Big]\ \theta = K_1K_2K_te_c$$

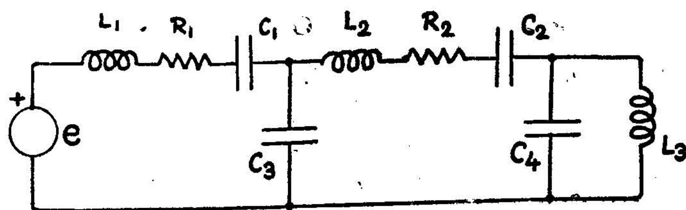
2.12 $(R_f+L_fD)\ \Big[(J_m+n^2J_l)D^2+(B_m+n^2B_l)\ D\Big]\frac{1}{n}\ \theta_l$
$$+AK_tK_s\theta_l=AK_tK_c\theta_r$$

2.13 $\Big[(J+n_1^2J_l)D^2 + (B+n_1^2B_l)D\Big]\ \theta_l$
$$+AK_tK_nn_1n_2\ D\theta_l = AK_tK_sn_1(\theta_r - \theta_L)$$

2.14 (அ)

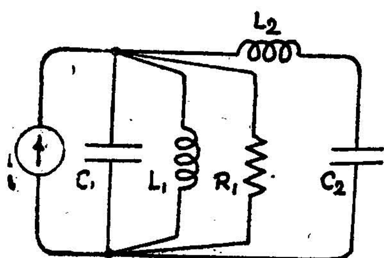


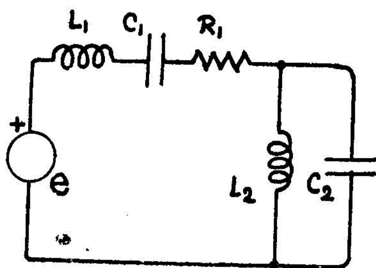
படம் வி-1



படம் வி-2

(ஆ)

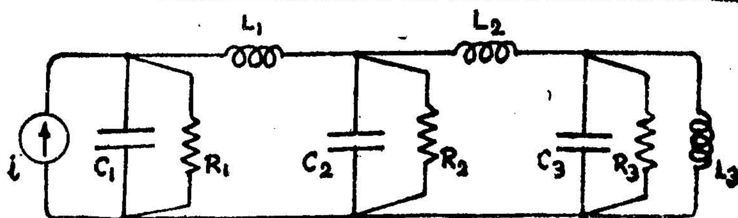




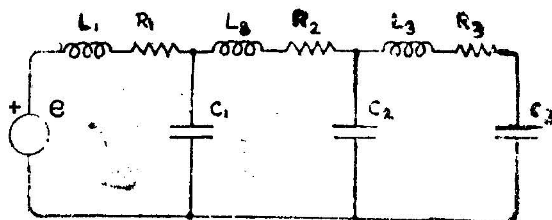
படம் வி-3

படம் வி-4

2.15 (அ)

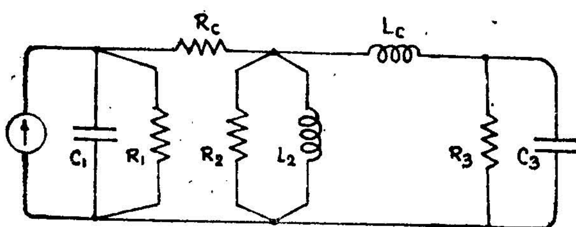


படம் வி-5

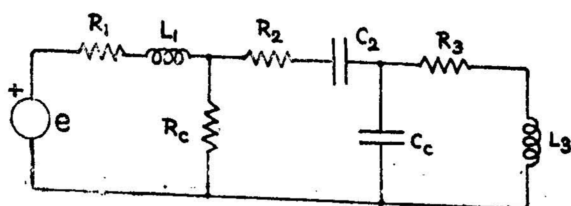


படம் வி-6

(ஆ)

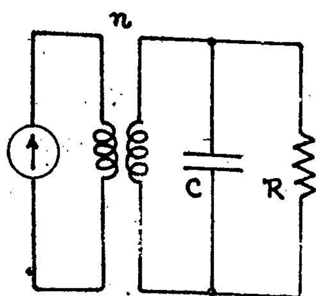


படம் வி-7

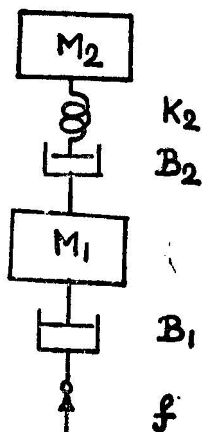


படம் வி-8

2.16 $(2D+1)\,\omega = 500\times 5$ 2.17

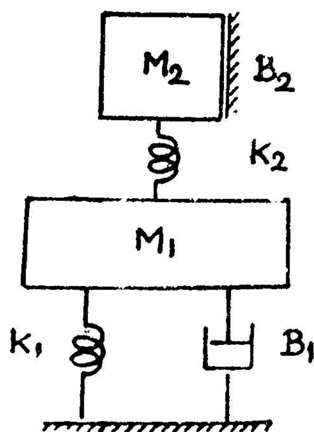


படம் வி-9



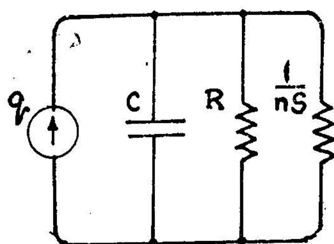
படம் வி-10

2.18



படம் வி-11

2.19



படம் வி-12

பயிற்சி 3

3.1 (அ) $\dfrac{\omega \cos\theta + (s+a)\sin\theta}{(s+a)^2+\omega^2}$

(ஆ) $\dfrac{n!}{(s-0.5)^{n+1}}$

(இ) $\dfrac{1}{s\,(s+\alpha)^2}$

3.2 (அ) $\dfrac{1}{s^2T_1}\,(1-e^{-sT_1}) - \dfrac{1}{s}\,e^{-sT_1}$

(ஆ) $\dfrac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$

(இ) $\dfrac{2}{s}\,(e^{-s} - e^{-3s})$

3.3 (அ) $E\left[\dfrac{1}{Ts^2} - \dfrac{e^{-Ts}}{s(\ -e^{-Ts})}\right]$

(ஆ) $\dfrac{E}{s}\,\tan\dfrac{sT}{4}$

(இ) $\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}\right)$

3.4 $\frac{1}{s(s+a)(s^2+b^2)}$; $\frac{1}{ab^2}$

௩.5 (அ) $\frac{V}{Ts^2}\left(1-e^{-Ts}\right)$

(ஆ) $\lim_{s\to 0} s\left[\frac{V}{TL}\frac{(1-e^{-Ts})}{s^2\left(s+\frac{R}{L}\right)}\right]=\frac{V}{R}$

3.6 $2e^{-t}-te^{-2t}-2e^{-2t}$

3.8 (அ) $\frac{1}{10}\left[1-e^{t-}(\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)\right]$

(ஆ) $-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{45}e^{-6t}$

3.11 (அ) $\delta(t)+1$

(ஆ) $2\delta(t)+1-50e^{-4t}+75e^{-5t}$

3.12 (அ) சு : -1, போ : $0, -1\pm j, -3\pm j$

(ஆ) சு : $-1, -3, -3$

போ : $-2, \pm j2, -4\pm j$

3.13 (அ) $\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{2\angle -127^\circ}{s+1+j}+\frac{2\angle 127^\circ}{s+1-j}$

(ஆ) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s+2}+$

$\frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{1\angle 161^\circ}{s+2j}+\frac{1\angle -161^\circ}{s-2j}\right]$

3.14 (அ) $\frac{2}{9}(3t^2-\sin 3t)$

(ஆ) $\frac{1}{16}\ (1-4t_c^{-4t}\ -_c{}^{4t})$

3.15 $\omega(t)\ =\ tc^{-2t}$
$C(t)\ =\ 7\ (e^{-2}t-e^{-8}t-te^{-2t})$

3.16 $C(t)\ =\ \frac{1}{2}\ (e^{-2t}+c^{-t}\cos t\ +3e^{-t}\sin t)$

3.17 $i_2\ =\ 5+\ 0.05\ e^{-9950t}\ -5.05e^{-100t}$

3.18 $\theta\ =\ 1.25\ -\ [t-2.5\ (1-e^{-0.4t})]$

3.19 $x\ (t)\ =\ 2.125-0.5\ (49\ t-3.75)e^{-4t}$
$x\ (\infty)\ =\ 2.125$ மீட்டர்

3.20 $\theta_0\ =\ 0.4\ [1-e^{-8t}-3t\ e^{-8t}]$

பயிற்சி 4

4.1 (அ) $\frac{1}{(1+R_1C_1s)\ (1+R_2C_2s)}$

(ஆ) இரண்டாம் RC பகுதியின் ஊட்ட மதிப்பு (input impedence) வரம்பிலி (infinity) ஆக உள்ள நிலை.

4.2 (அ) $\frac{R_1C_1R_2C_2s^2}{(1+R_1C_1s)\ (1+R_2C_2s)}$

(ஆ) $\frac{R_1C_1R_2C_2s^2}{(1+R_1C_1s)\ (1+R_2C_2s)\ +\ R_1C_2s}$

4.3 (அ) $\frac{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1)s}{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1\ s+R_1C_1R_2C_2s^2}$

(ஆ) $\frac{(R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1)s+R_1C_1R_2C_2s^2}{1+(R_1C_1+R_2C_2+R_2C_1)s+R_1C_1R_2C_2s^2}$

4.4 $G_1\ =\ R$
$G_2\ =\ 1/R$
$H\ =\ CS$

4.5 (அ) $\frac{1+2s+s^2}{1+3s+s^2}$ (ஆ) $\frac{1+s^2}{1+4s+s^2}$

4.6 (அ) $\frac{X_0}{X_i} = \frac{B_1s+K_1}{B_1s+K_1+K_2}$

(ஆ) $\frac{X_0}{X_i} = \frac{K_1B_1s}{(K_1+K_2)\ B_1s+K_1K_2}$

(இ) $\frac{X_0}{F} = \frac{1}{Ms^2+Bs+K}$

4.7 $\frac{X_1}{F} = \frac{1}{1400s^3\left(1+\frac{s^2}{280}\right)}$

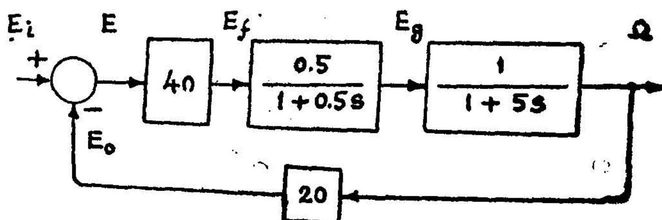
4.8 $\frac{E_0}{Y} = \frac{-AERM_1\ s^2\ (1+RCs)}{2Rd\ (M_1s^2+B_1s+{}_1K)\ (1+Ts)\ (1+0.5Cs)}$

4.9 $\frac{E_g}{E_i} = \frac{10}{(1+0.05s)\ (1+0.2s)}$

4.10 (அ) $\frac{\Omega}{V_i} = \frac{6}{s+10.3}$

(ஆ) $\omega = 0.58\ (1-e^{-10.3t})$

4.12



படம் வி-13

$\frac{\Omega}{E} = \frac{20}{(1+0.1s)\ (1+5s)}$

$\frac{\Omega}{E_i} = \frac{20}{(1+0.1s)\ (1+5s)+400}$

4.13 $\frac{\theta_0}{E_i} = \frac{4\times10^{-3}}{s(1+0.4s)}$

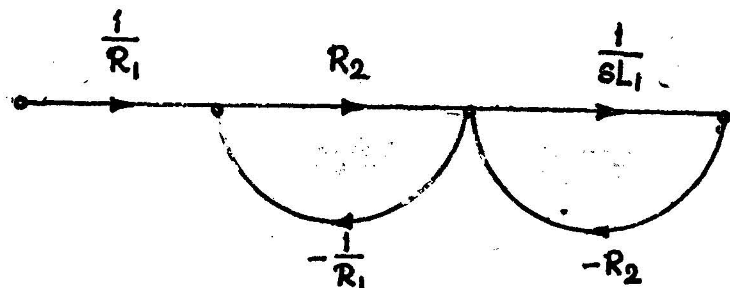
4.14 $\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_5\ (G_2G_3+G_4)}$

4.15 $$C = \frac{G_1G_2G_3R_1 + G_2G_3R_2 - G_3R_3}{1+G_1G_2G_3}$$

4.16 $$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_3 + G_3G_4H_4 + G_1G_2G_3\,(H_2-H_1G_4)}$$

4.17 $$C = \frac{G_1G_2R_1 + G_2R_2 - G_1G_2H_1R_3 - G_2R_4}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1}$$

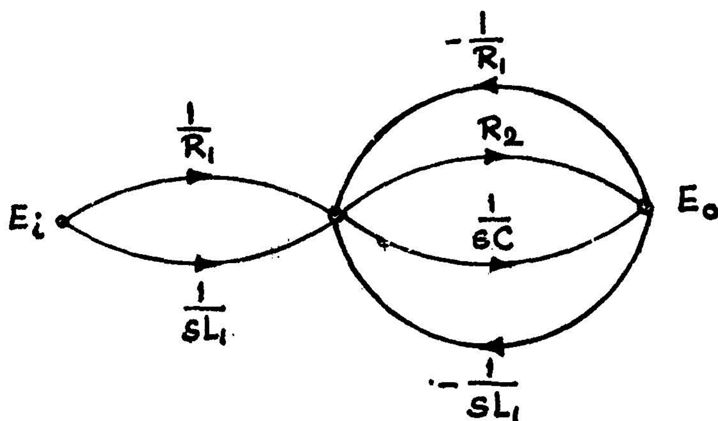
4.18 (அ)



படம் வி-14

$$\frac{I}{E} = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1Ls + R_2Ls}$$

4.18 (ஆ)



படம் வி-15

$$\frac{Eo}{Ei} = \frac{R_1+Ls+R_1R_2Cs+R_2LCs^2}{R_1+Ls+R_1R_2Cs+R_1LCs^2+R_1LCs^2}$$

4.19 $$\frac{C}{R} = \frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_2HG_2}$$

4.20 $$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3+G_4}{1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_4-G_2G_4H_1H_2}$$

பயிற்சி 5

5.1 (அ) 0.8 (ஆ) 15 ரேடியன்/ நொடி
(இ) 9 ரேடியன்/ நொடி

5.2 $\delta=0.8,\ \omega_n=5,\ \omega_d=3,\ M_0=1.5\%,\ Ts=1,$ 1.25 மடங்கு.

5.3 $M_0=16.3\%$

5.4 (அ) முழுப் பின்னூட்டு வகை, $h=1$
(ஆ) 2.935°. 0.26 நொடி.

5.5 $c=1-e^{-0.1t}\sin(10t+89.5°)$

5.6 $\theta=v\left[1-e^{-st}(\cos\sqrt{75}t-0.58\sin\sqrt{75}t)\right]$

$R=5$ ஓம்.

5.7 $K_a=88,\ \omega_n=97$ ரேடியன்/நொடி, $ess=0.6°$

5.8 $$\omega(t)=\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t$$

(அ) $$C(t)=\frac{1}{\omega^n\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t$$

(ஆ) $$C(t)=1-\frac{e^{-\delta\omega^n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t+\cos^{-1}\delta)$$

5.9 (அ) 6.08°, (ஆ) 0-1 ரேடியன்

5.10 (அ) $s^2+2s+4=0$ (ஆ) 16.3% (இ)

5.11 (அ) 1/9 (ஆ) 1/42

5.12 (அ) $C = -0.707\, e^{-2t} \sin(4t + 45°)$ (ஆ) $\infty, 2, 0.$

5.13 (அ) $\infty, N/d, 0$ (ஆ) $0, R_1 d/N, \infty$

5.14 (அ) $\infty, \infty, 1/12$ (ஆ) $0, 0, 24$

5.15 (அ) 0.0475 (ஆ) ∞ (இ) ∞

5.16 $A \simeq 10.5$

5.17 $e = \frac{1}{500}(2+2t) + \frac{49}{500}(2)$

$e_{ss} = \infty$

5.18 (அ) 0.2 (ஆ) ∞ (இ) ∞ (ஈ) ∞

5.19 $e = 0.0436\,(4+3t),\ e_{ss} = \infty$

5.20 (அ) 0.0163 நியூட்டன் மீட்டர்/ரேடியன்
(ஆ) 263×10^{-6} நியூட்டன் மீட்டர்-நொடி/ரேடியன்

பயிற்சி 6

6.1 $\delta = 0.205 \qquad \omega_n = 8.4$

6.2 $M_p = 1.15, \qquad \omega_p = 1.13$

6.3 $T = 0.116 \qquad K = 1.21$

6.4 $K \simeq 100 \qquad \omega_n \simeq 37$

6.5 $M_p = 2.06 \qquad \delta = 0.25$
$\omega_p = 9.1 \qquad \omega_n = 9.75$

6.6 $M_o = 9.05\,\% \qquad \omega_n = 2$

6.7 $M_p = 1.14 \qquad \omega_p = 7.07$

6.8 $\delta = 0.555 \qquad M_p = 1.08$
$\omega_n = 3.6 \qquad \omega_p = 2.22$

6.9 $Bw = 1$ ரேடியன்

6.10 (அ) 45° (இ) 135°

(ஆ) −45° (ஈ) −135°

(உ) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\omega}{1-\omega^2}$ $\omega^2 \leqslant 1$

$\theta = 180 - \tan^{-1} \dfrac{\omega}{\omega^2 - 1}$ $\omega^2 \geqslant 1$

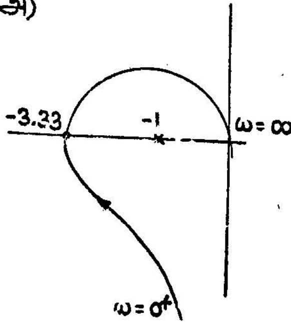
(ஊ) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1-\omega^2}{\omega}$ $\omega^2 \leqslant 1$

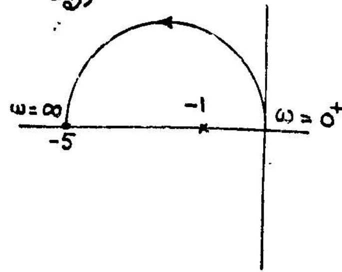
$\theta = -\tan^{-1} \dfrac{\omega^2 - 1}{\omega}$ $\omega^2 \geqslant 1$

6.11 (அ) 0.8 பதிமம் (ஆ) 1.36 பதிமம்

6.12 (அ) 3.33 இருமம் (ஆ) 2.6 இருமம்

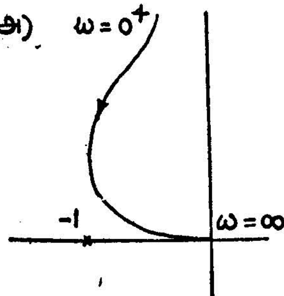
6.13 (அ) (ஆ)

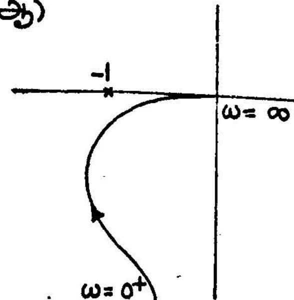




படம் வி-16

6.14 (அ) (ஆ)



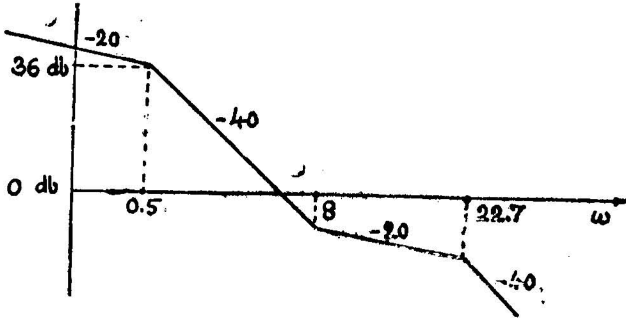


படம் வி 17

6.15 (அ) $\omega_z = \sqrt{15}$ (ஆ) எதிர்-கிடை அச்சைக் கடக்காது.

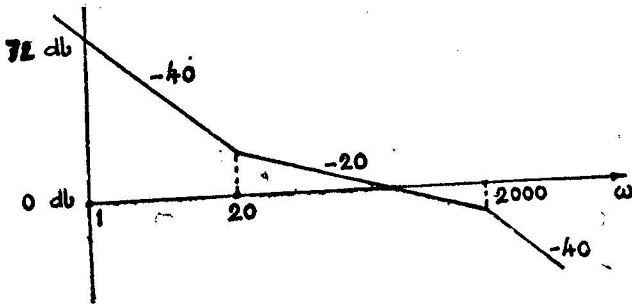
$$\therefore G_x = -\frac{K}{12}$$

6.16 (அ)



படம் வி-18

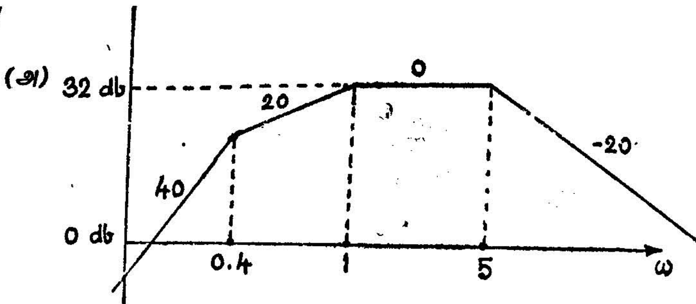
(ஆ)



படம் வி-19

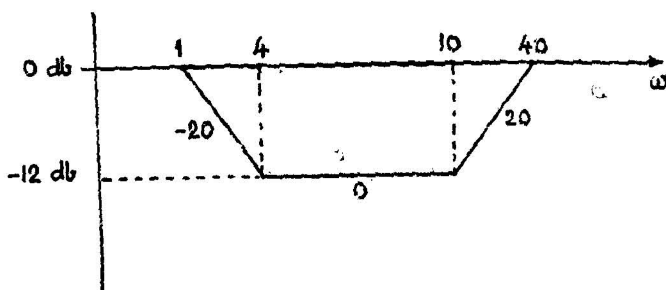
6.17

(அ)



படம் வி-20

(ஆ)



படம் வி-21

6.18 (அ) $G(s) = \dfrac{100\,(s+5)}{s(s+0.5)\,(s+16)}$

(ஆ) திருத்தம் = − 5.5 டெசிபல்

6.19 $G(s) = \dfrac{4000}{s(s+2)\,(s+10)}$

6.20 $K = 165$

பயிற்சி 7

7.1 (அ) நிலையுறுதி உடையது

(ஆ) நிலையுறுதி அற்றது

(இ) நிலையுறுதி அற்றது

(ஈ) நிலையுறுதி உடையது

7.2 (அ) $K < 12$, $\omega = 1.732$

(ஆ) $K < 8\,15$, $\omega = 1.095$

7.3 நிலையுறுதி அற்றது

7.4 (அ) $\dfrac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$; நிலையுறுதி உடையது

$(N = 0,\ P = 0,\ Z = 0)$

(ஆ) $\dfrac{K}{s^2(1+T_1 s)}$; நிலையுறுதி அற்றது $(N=2,\ P=0,\ Z=2)$

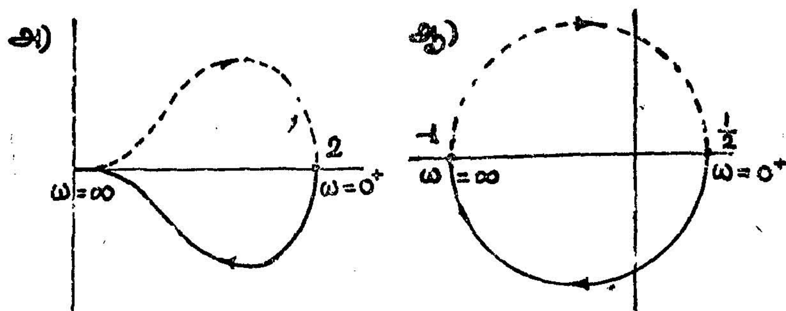
7.5 (அ) நிலையுறுதி உடையது ($N = 0, P = 0, Z = 0$)
(ஆ) நிலையுறுதி அற்றது ($N = 0, P = 2, Z = 2$)

7.6 (அ) நிலையுறுதி அற்றது.
(ஆ) நிலையுறுதி உடையது

7.7 நிலையுறுதிக்கு $0 < K < 4$

7.8 (அ) $G_m =$ 6 டெசிபல்
$\phi_m = 20°$
(ஆ) $G_m =$ 7.95 டெசிபல்
$\phi_m = 22.4°$

7.9 (அ) நிலையுறுதி அற்றது ($N = O, P = 1, Z = 1$)



படம் வி. 22

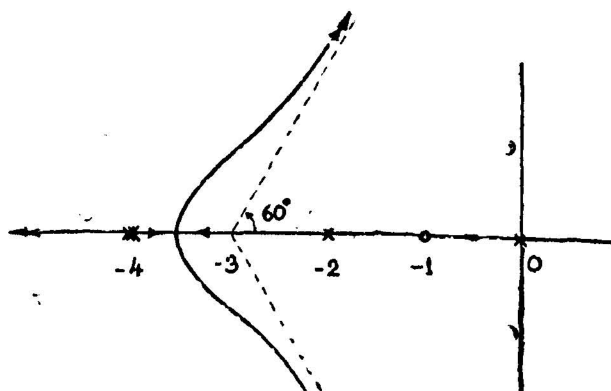
(ஆ) விளிம்பு நிலையுறுதி உடையது
(நைக்விச்டு பாதை சிக்கற் புள்ளி — 1 இன் ஊடே செல்கிறது.)

7.10 (அ) $K = 8$
(ஆ) $\phi_m = 27°, G_m = 2.$

பயிற்சி 8

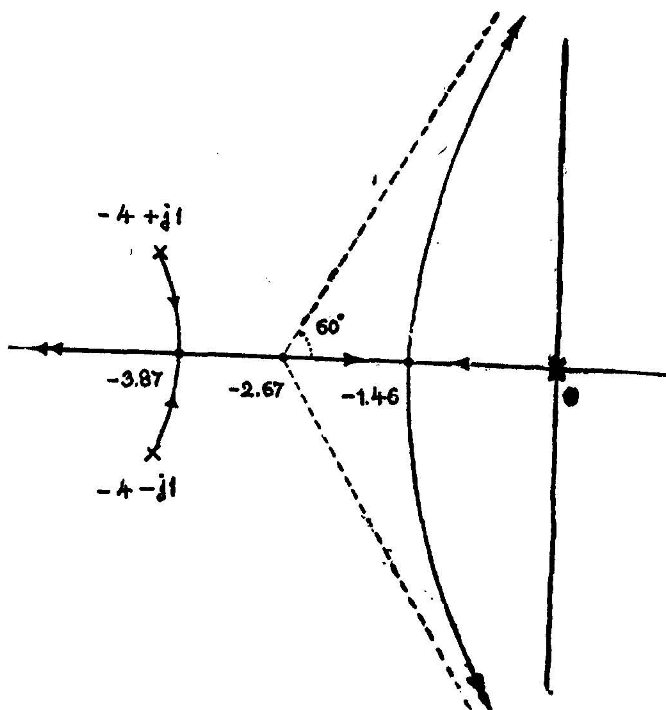
8.1 (அ) 4 கிளைகள், $C = -3$; $\phi = \pm 60°; \pm 180°$
(ஆ) 3 கிளைகள்; $C = -2.67$; $\phi = \pm 60°, \pm 180°$;
$b = -3.87, -1.46$

(அ)



படம் வி-23

(ஆ)



படம் வி-24

8.2 (அ) K-யின் எந்த நேர்மதிப்பிற்கும் நிலையுறுதி உடையது.
(ஆ) $K > 30$ எனில் நிலையுறுதி அற்றுப் போகிறது.

8.3 5 கிளைகள் ; $C = -1.6$; $\phi = \pm 36°, \pm 108°, \pm 180°$; $\theta_d = -90°, -26°$; $\omega_s = 0.9$, தேவையான $K = 20.6$

8.4 5 கிளைகள் ; $C = -3$; $\phi = \pm 45°, \pm 135°$; $b = -1.5$; கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளிகள் $s = +j3.25$; $K = 570$, $\theta_d = \pm 225°$

8.5 3 கிளைகள்; $C = -50$; $\phi = \pm 60°, \pm 180°$; $\theta_d = \pm 46°, \pm 135°$; $b = -21.2$; கற்பனை அச்சைக் கடக்கும் புள்ளிகள் $s = \pm j70.7$;

(அ) $K = 150$; (ஆ) $K = 36.1$

8.6 (அ) $s = -1, -4, \pm j5$; (ஆ) $s = -1, -2, 3, 4$.

8.7 (அ) 2 சுழி எண்கள்; (ஆ) $s = -9.7, -4.4, 0.55 \pm j2.1$

8.8 $K_v = 1.56$

8.9 $G_m = 8$

8.10 கிளைகள் 3 ; $C = -2$; $\phi = \pm 60°, \pm 180°$; $\omega_j = \pm 4.16$; $T = 10.4$; $\theta_d = \pm 45°$.

பயிற்சி 9

9.1 $\theta_m = -\sin^{-1} \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

$G\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

9.2 $K = 59.2$

9.4 $AG_c = \dfrac{1 + 0.416s}{1 + 0.319s}$; $A = 3$

9.4 $AG_c = \dfrac{1 + 0.0167s}{1 + 0.0022s}$; $A = 7.5$

9.5 $G_c = \dfrac{1 + 6.66s}{1 + 94.6s}$

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. Alexander, J. E. & Bailey, J. M.
System Engineering Mathematics,
Prentice Hall, (1955)

2. Bower, J. L. & Schutheiss, P. M.
Introduction to the Design of Servomechanisms,
John Wiley, (1958)

3. Cannon, R. H.
Dynamics of Physical Systems,
McGraw-Hill, (1967)

4. Cheng, D. K.
Analysis of Linear Systems,
Addison Wesley (1963)

5. Chestnut, H. & Mayer, R. W.
Servomechanisms and Regulating System Design,
2nd Edition, Vols I & II
John Wiley (1959)

6. Clark, R. N.
Introduction to Automatic Control Systems,
John Wiley (1962)

7. D'Azzo, J. J. & Houpis, C. H.
FBC Analysis & Synthesis, 2nd Edition,
McGraw-Hill (1966)

8. Del Toro, V. & Parker, S. R.
Principles of Control Systems Engineering,
McGraw-Hill (1960)

9. Dorf, R. C.
Modern Control Systems,
Addison Wesley (1967)

10. Elgerd, O. I.
Control Systems Theory,
McGraw-Hill (1967)

11. Gibson, J. E. & Tuteur, F. B.
Control System Components,
McGraw-Hill (1958)

12. Gille, J. C., Pelegrin, M. J. Decaulre, P.
Feedback Control Systems Analysis, synthesis & Design,
McGraw-Hill (1959)

13. Ku, Y. H.
Analysis and Control of Linear Systems,
International Text-book Co. (1962)

14. Kuo, B. C.
Automatic Control Systems,
Prentice Hall (1966)

15. Murphy, G. J.
Basic Automatic Control Theory, 2nd Edition
D. Van Nostrand Co. (1966)

16. Raven, F. H.
Automatic Control Engineering, 2nd Edition
McGraw-Hill (1968)

17. Savant, C. J.
Basic Feedback Control Systems Design,
McGraw-Hill (1958)

18. Smith, O. J. M.
Feedback Control Systems,
McGraw-Hill (1958)

19. Taylor, P. L.
Servomechanisms, 2nd Edition,
Longmans (1969)

20. Thaler, G J. & Brown, R. G.
Analysis and Design of Feedback Control Systems,
2nd Edition, McGraw-Hill (1960)

21. Truxal, J. G.
Automatic Feedback Control Systems Synthesis,
McGraw-Hill (1955)

22. Virgil W. Eveleigh,
Introduction to Control Systems Design,
McGraw-Hill (1972)

கலைச்சொற்கள்

அ

அடிமை இயக்கி — Servomotor
நேர் மின் - — DC -
மாறு மின் - — AC -
இரு பருவ - — Two phase -
காந்தச் சுருள் கட்டுப்பாட்டு — Field controlled -
மின்னகக் கட்டுப்பாட்டு - — Armature controlled-
அடுக்குத் தொடர் ஊட்டம் — Power series input
அடுக்கு — Exponent, degree
அழியும் - — Decaying -
வளரும் - — Increasing -
அதிர்ச்சி தாங்கி — Shock absorber
அலை வரிசை அகலம் — Band width
அலை வாங்கி — Antenna
அலை விளைவு — Frequency response
அலை விளைவுப் படங்கள் — Frequency response plots
அலைவு — Oscillation
குறை - — Damped -
தொடர் - — Sustained -
அலைவு ஆக்கி — Oscillator
அலைவு எண் — Frequency (of oscillation)
அலைவு முறைப் பகுப்பாய்வு — Frequency domain analysis
அழுத்தம் — Pressure
அளவைச் சார்பு — Weighting function
அறிகுறி — Signal
ஆதார - — Reference -
ஆள் - — Control -

இயக்கு -	—	Actuating -
பின்னூட்டு -	—	Feedback -
வழு -	—	Error -
இடர் -	—	Disturbance -
அறிகுறி பாய் படம்	—	Signal flow graph
அறிகுறி பாய்பட ஒடுக்கம்	—	Signal flow graph reduction
அறிகுறி மாற்றி	—	Transducer

ஆ

ஆக்கம்	—	Design, construction
ஆட்படு பகுதி	—	Controlled plant
ஆதாரப் படம்	—	Chart
நிக்கல்சு -	—	Nichols -
ஆதார ஊட்டம்	—	Reference input
ஆழி	—	Wheel, disc
திருப்பு -	—	Steering - wheel
ஆள் சுருள்	—	Control winding
ஆள் குவை	—	Control system
குறை சுற்று-	—	Open loop -
நிறை சுற்று -	—	Closed loop -
பின்னூட்டு -	—	Feedback -
ஒருமை ஊட்ட ஈட்ட-	—	Single input single output-
பன்மை ஊட்ட ஈட்ட -	—	Multiple input multiple output -
தொடர் செய்தி -	—	Continuous data -
துண்டுச் செய்தி -	—	Discrete data-
மீத் திறமை -	—	Optimal-
மாற்று இயல் -	—	Adaptive -
ஆம்பிளிடைன்	—	Amplidyne
ஆற்றல் செலவுக் கூறு	—	Energy dissipating element
ஆற்றல் தேக்குக் கூறு	—	Energy storing element

இ

இடர் அறிகுறி	—	Disturbance signal
இடர் ஊட்டம்	—	Disturbance input
இடர் ஒலி	—	Noise
இடை உறவு	—	Inter - relation
இடை (நிலை) விளைவு	—	Transient response
இயக்க வழு மாறிலி	—	Dynamic error constant (coefficient)

இயக்கக் கூறு	—	Active element
இயக்கமில் கூறு	—	Passive element
இயக்கு வில்லை	—	Piston (-head)
இயக்குத் தண்டு	—	Piston rod
இயக்கி	—	Actuator, motor
நேர் மின் -	—	DC - motor
மாறு மின் -	—	AC - motor
திருப்பு விசை -	—	Torque - motor
நீர்ம -	—	Hydraulic -
வளிம -	—	Pneumatic -
இயந்திரக் குவை	—	Mechanical system
இயந்திர வலைப் படம்	—	Mechanical network diagram
இயந்திரக் குவை மாதிரி	—	Mechanical system model
இயந்திர மின் இயற் குவை	—	Electromechanical system
இயந்திர விசை	—	Mechanical force
இரவுத்து	—	Routh
இரவுத்து அணி	—	Routh's array
இரவுத்து நிலையுறுதி விதி	—	Routh's stability criterion
இருபடி	—	Second order
இருபருவ அடிமை இயக்கி	—	Two phase servomotor
இருமம்	—	Octave
இலக்கக் கணிப் பொறி	—	Digital computer
இலாப்லாசு மாற்றம்	—	Laplace Transform
எதிர் -	—	Inverse -
இழுவைக்குப்பி	—	Drag cup

ஈ

ஈடு செய்தல்	—	Compensation
தொடர் -	—	series-, cascade -
பின்னூட்டு -	—	Feedback -
பருவம் முந்து -	—	Phase lead -
பருவம் தாழ் -	—	Phase lag -
முந்து தாழ் -	—	Lead lag -
ஈடு செய்வி	—	Compensator
ஈரப் பதன்	—	Humidity
ஈரடுக்கு உறுப்பு	—	Quadratic term
ஈற்றணுகி	—	Asymptote

உ

உச்ச விலக்கம் — Maximum overshoot
உச்சம் — Peak, maximum
  ஒத்திசைவு- — Resonant-peak
உந்தம் — Momentum
உந்து பொறி — Rocket engine
உருவியல் மாதிரி — Physical model
உருவியல் மாறி — Physical variable
உறுப்பு — Component, term

ஊ

ஊட்டம் — Input
  அலைவு- — Oscillatory -
  ஆதார- — Reference -
  இடர் - — Disturbance -
  கட்டளை - — Command -
  படி - — Step -
  நேர் வளர் - — Ramp -
  பரவலய - — Parabolic -
ஊடுருவு மாறி — Through variable

எ

எச்சம் — Residue
எண்மான முறை — Statistical method
எதிர் எண் — Negative number
எதிர்க் குறி அடுக்கு — Negative exponent
எதிர்க் குறி — Negative sign
எதிர்ப் பின்னூட்டு — Negative feedback
எதிர் இலாப்லாசு மாற்றம் — Inverse Laplace transform
எளி படம் — Sketch
எளி புனைவு — Simplifying assumption

ஒ

ஒடுக்கம் — Reduction
  பெட்டிப் பட - — Block diagram -
  அறிகுறி பாய் பட - — Signal flow graph
ஒடுக்க விதிகள் — Reduction formulae
ஒத்திசைவு — Resonance

ஒத்திசை உச்சம்	—	Resonant peak
ஒத்திசை அலைவுஎண்	—	Resonant frequency
ஒருபடி	—	Homogeneous
ஒருமைப் படி ஊட்டம்	—	Unit step input
ஒருமை நேர்வளர் ஊட்டம்	—	Unit ramp input
ஒழுங்கமை குவை	—	Regulator (system)
ஒழுங்கு எண் (காரணி)	—	Regulation factor
ஒற்றுமை உரு	—	Anolog
இயந்திர இயல் -	—	Mechanical -
மின் இயல் -	—	Electrical -
பாய்ம இயல் -	—	Fluid -
வெப்ப இயல் -	—	Thermal -
விசை ஓட்ட -	—	Force current -
விசை அழுத்த -	—	Force voltage -

ஓ

ஓரதர் (அடைப்பிதழ்)	—	Valve

க

கட்டுப்பாடு	—	Control
கட்டுப்படுத்தி	—	Controller
கட்டுப்படு ஈட்டம்	—	Controlled output
கட்டளைச் சார்பு	—	Forcing function
கட்டளை விளைவு	—	Forced response
கடைநிலை வழு	—	Steady state error
கடைநிலை விளைவு	—	Steady state response
கடை மதிப்புத் தேற்றம்	—	Final value theorem
கணிப்பு முறை	—	Deterministic method
கால விளைவு	—	Time response
காந்தச் சுருள்	—	Field winding
காந்தத் தாரை	—	Magnetic flux
காந்தப் புலம்	—	Magnetic flux
கிர்காஃபு விதிகள்	—	Kirchhoff's Laws
கிளர்	—	Stimulate
குவிஉரு	—	Lumped model
குவி இயல்பு	—	Lumped characteristic
குவை	—	System
மின்னியல்—	—	Electrical -

இயந்திர இயல் - — Mechanical -
பாய்ம இயல் - — Fluid -
வெப்ப இயல் - — Thermal -
குறை சுற்று - — Open loop -
நிறை சுற்று - — Closed loop -
பல் சுற்று - — Multiple loop -
குறி — Sign
குறியுரு — Symbol
குறுக்கு இணைப்பு — Short - circuit
குறுக்கு மாறி — Acrossvariable
குறைத் தடையூட்டு விளைவு — Underdamped response
கூடும் புள்ளி — Break-in point
கூலும் — Coulomb
கூறு — Element
இயக்க - — Active -
இயக்கமில் - — Passive -
தேக்கு - — Storage -
செலவு - — Dissipating -
கோணத் தூரப் படம் — Polar plot
கோண விதி — Angle criterion

ச

சந்தி — Node
சந்திச் சமன்பாடு — Nodal equation
சார்பு — Function
நேர் வளர் - — Ramp -
நெடுக்கை - — Sine -
கட்டளை - — Forcing -
செலுத்து - — Transfer -
சார்பு நிலையுறுதி — Relative stability
சிக்கல் உறுப்பு — Complex term
சிலக்கு — Slug
சிறப்பு இயற் சமன்பாடு — Characteristic equation
சீர் உருவம் — Normalised form
சுமை — Load
சுருள் அளவி — Spirule
சுருள் — Winding
ஆதார - — Reference -
ஆள் - — Control -

காந்த -	—	Field -
மின்னக -	—	Armature -
நிலை அச்சு -	—	Quadrature axis -
கிடை அச்சு -	—	Direct axis -
பின்னூட்டு -	—	Feedback -
சுழலி (சுழற் பொறி)	—	Turbine
சுழற் பகுதி	—	Rotor
சுழி எண்	—	'Zero'
சுழிப் பேரெண் படம்	—	Pole-zero plot
சுற்று	—	Ciruit, loop
சூழல்	—	Environment
செயற் குறிப்பு	—	Performance specification
செயற் சமன்பாடு	—	Performance equation
செலுத்துச் சார்பு	—	Transfer function
குறை சுற்று -	—	Open loop -
நிறை சுற்று -	—	Closed loop -
முன் செல் பாதை -	—	Forward path -
பின்னூட்டுப் பாதை -	—	Feedback path-
சுற்று -	—	Toop–
செவ்வகப் படம்	—	Rectangular plot

ட

டலம்பர்ட்டு	—	D'Alembert
டெசிபல்	—	Decibel

த

தடுப்பு முறை	—	Partition method
தடைக் கெழு (எண்)	—	Damping coefficient (factor)
தடையூட்டு	—	Damping
தடையூட்டு விகிதம்	—	Damping ratio
தடையூட்டு அலைவெண்	—	Damped frequency
தண்டு	—	Shaft
தனித்த கூறுப் படம்	—	Free body diagram
தாரை	—	Flux
தானியங்கு	—	Automatic
திறன்	—	Power
திறன் பெருக்கி	—	Power amplifier
திறன் எண் (கெழு)	—	Power factor

திசைநிலை — Aattitude
திசைநிலை ஆள்குவை — Attitude control system
திசைவேகம் — Velocity
தீர் அணி — Determinant
துணை அலகு (அளவை) — Parameter
துணைச் சமன்பாடு — Auxiliary equation
தொகையீடு — Integration
தொடுவை — Drush
தொழில் — Process
தொகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு — Integral contr[illegible]

ந

நிச்சயமின்மை — Uncertainty
நிக்கல்சு — Nichols
நிலைமம் — Inertia
நிலைமத் திருப்பு விசை — Moment of inertia
நிலையுறுதி — Stability
  சார்பு - — Relative -
  விளிம்பு - — Marginal -
நிறை சுற்று — Closed loop
நீர்ம இயக்கி — Hydraulic actuator
நீராவிச் சுழலி — Steam turbine
நேர்இயற்குவை, நேர்வகைக் குவை — Linear system
நேர் இயல்பு — Linearity
நேர்வகைக்கெழுச் சமன்பாடு — Linear differential equation
நேரிலா — Nonlinear
நேரிலாவகைக்கெழுச் சமன்பாடு — Nonlinear differential equation
நேரிலா வகைக் குவை — Nonlinear system
நைக்விச்டு பாதை — Nyquist path
நைக்விச்டு விதி — Nyquist criterion

ப

பகுப்பாய்வு — Analysis
பகுதிப் பின்ன விரிவு — Partial fraction expansion
பதிமம் — Decade
படர் இயல்பு — Distributed characteristic
படி ஊட்டம் — Step input

திறமை, திறம்	—	Efficiency
படியும் நேரம்	—	Settling time
பயனுடை தோராய மதிப்புகள்	—	Useful approximations
பரவலய ஊட்டம்	—	Parabolic input
பருவம்	—	Phase
பருவம் முந்து வலை	—	Phase lead network
பருவம் தாழ் வலை	—	Phase lag network
பருவக் கடப்பு	—	Phase crossover
பருவ நிறைவெண்	—	Phase margin
பருவப் பெயர்ச்சிப் படம்	—	Phase shift plot
பல் ஊட்ட ஈட்டக் குவை	—	Multiple input multiple output system
பல் இணை	—	Gear
சுழி -	—	Differential -
பல் இணைத் தொடர்	—	Gar train
பல் இணை விகிதம்	—	Gear ratio
மீத் திறமை -	—	Optimal -
பால - T வலை	—	Bridged T network
பிரியும் புள்ளி	—	Breakaway point
பின்னூட்டு	—	Feedback
முழு -	—	Unity -
எதிர் -	—	Negative -
பிழை - திருத்தல் முறை	—	Trial and error method
'புள்ளி' வழக்கு	—	Dot convention
பெட்டிப் படம்	—	Block diagram
பெட்டிப் பட ஒடுக்கம்	—	Block diagram reduction
பெருக்கம்	—	Gain
பெருக்கக் கடப்பு	—	Gain crossover
பெருக்கி	—	Amplifier
சுழல் -	—	Rotating -
திறன் -	—	Power -
பெருக்க நிறைவெண்	—	Gain margin
பெயர்ச்சி	—	Displacement
பேரெண்	—	Pole
'போடே'	—	Bode
- வீச்சுப் படம்	—	Magnitude plot
- பருவப் பெயர்ச்சிப் படம்	—	Phase shift plot
'போடே' படம்	—	Bode diagram

ம

மடக்கை — Logarithm
மடக்கைப் படம் — Logarithmic plot
மடிப்பு — Convolution
மடிப்புத் தேற்றம் — Convolution theorem
மறிப்பு — Impedance
  மாறிய - — Transformed -
மறு உரு — Dual
மறு உரு வலை — Dual network
மாதிரி — Model
  உருவியல் - — Physical -
  கணித - — Mathematical -
மாற்றம் — Transformation
  இலாப்லாசு - — Laplace -
மாறு அளவை — Constant parameter
மாறி — Variable
  கட்டுப்படு - — Controlled -
  ஊடுருவு - — Through -
  குறுக்கு - — Across -
  சார்ந்த — Dependent -
  சாரா - — Independent -
மாற்றி — Transformer
  மின் அழுத்த - — Potential -
மாறுநிலைத் தடையூட்டு — Critically damped
மிகைத் தடையூட்டு விளைவு — Overdamped response
மின் ஆக்கி — Electric generator
  நேர் மின் - — DC -
  மாறுமின் - — AC -
மின் இயக்கி — Electric motor
  இருபருவ மாறு - — Two phase AC - motor
  தூண்டு - — Induction motor
  காந்தச் சுருள் கட்டுப்பாட்டு — Field controlled motor
  மின்னகக் கட்டுபாட்டு — Amature controlled motor
மின் ஏற்றம் — Electric charge
மின்னகம் — Armature
மின் தூண்டம் — Inductance
மின் தேக்கம் — Capacitance
மின் பிரித்தி — Potential divider
  வட்ட - — Circular-

மின் புலம்	—	Electric field
மீச்சிறு, குறுமம்	—	Minimum
மீச்சிறு பருவச் செலுத்துச்-சார்பு	—	Mminimum phase transfer function
மீப் பெரிய, பெருமம்	—	Maximum
மீள்சக்தி	—	Elasticity
மீள்சக்தி எண்(-கெழு)	—	Elastance
முடுக்கம்	—	Acceleration
முடுக்கமானி	—	Accelerometer
முடுக்க வழு மாறிலி	—	Acceleration error constant
முதல் இயக்கி	—	Prime mover
முதற் கணிப்பு	—	Initial calibration
முதல் மதிப்புத் தேற்றம்	—	Initial value theorem
முறுக்கம்	—	Torsion
முறுக்க மாறிலி	—	Torsion constant
முழுமைச் செயல்	—	Overall performance
முழுமை விளைவு	—	Overall response
முழுமைச் செலுத்துச் சார்பு	—	Overall transfer function
முழுப் பின்னூட்டு	—	Unity feedback
முனை	—	Terminal
நேர் -	—	Postive -
எதிர் -	—	Negative -
மூலப் பாதை	—	Root locus
மூலப் பாதைக் கிளைகள்	—	Root locus - branches
மூலைப் படம்	—	Corner plot
மேசனின் விதி	—	Mason's rule
மேல்வைப்புத் தேற்றம்	—	Superpostion theorem

வ

வகையிடல்	—	Differentiation
வகையீட்டுக் கட்டுப்பாடு	—	Derivative control
வரம்பு	—	Limit
நிலையுறுதி -	—	Stability -
வலை	—	Network
மின் -	—	Electrical -
இயந்திர -	—	Mechanical -
வழு	—	Error
கணடநிலை -	—	Steady state
வழுக் கணிப்பி	—	Error detector

வழுத் தொடர்	—	Error series
வழு விகித சமக் கட்டுப்பாடு	—	Proportional error control
வழு மாறிலி	—	Error constant
இயக்க -	—	Dynamic -
இயக்கமில் -	—	Static -
பெயர்ச்சி -	—	Position -
வேக -	—	Velocity -
முடுக்க -	—	Acceleration -
வழங்கி	—	Source
ஆற்றல் -	—	Energy -
வளிம இயக்கி	—	Pneumatic motor
விளிம்பு நிலையுறுதி	—	Marginal stability
விளைவு	—	Response
நேர் -	—	Actual -
விரும்பும் -	—	Desired -
கட்டளை -	—	Forced -
இயற்கை -	—	Natural -
விளைவு வேகம்	—	Speed of response
வீச்சுப் படம்	—	Magnitude plot
வீச்சு விகிதம்	—	Magnitude ratio
வெட்டுறு அலைவெண்	—	Cut-off frequency
வெட்டுறு வேகம்	—	Cut-off rate
வேக மின் ஆக்கி	—	Tachogenerator
வேக வழு மாறிலி	—	Velocity error constant

ஹ

ஹர்விட்சு தீர் அணி	—	Hurwitz determinant
ஹர்விட்சு விதி	—	Hurwitz criterion
ஹெவிசைடு தேற்றம்	—	Heaviside theorem